

1.- La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 300t(3 - t)$ donde t mide el tiempo en horas.

(a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?

(b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración para que la saltadora pueda batir su propia marca?

(c) Representa gráficamente la función de capacidad concentración.

Resolución

$$f(t) = 300t(3 - t) = 900t - 300t^2 \quad f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ó } t = 3 ; \quad f'(t) = 900 - 600t = 0 \Leftrightarrow t = 1,5.$$

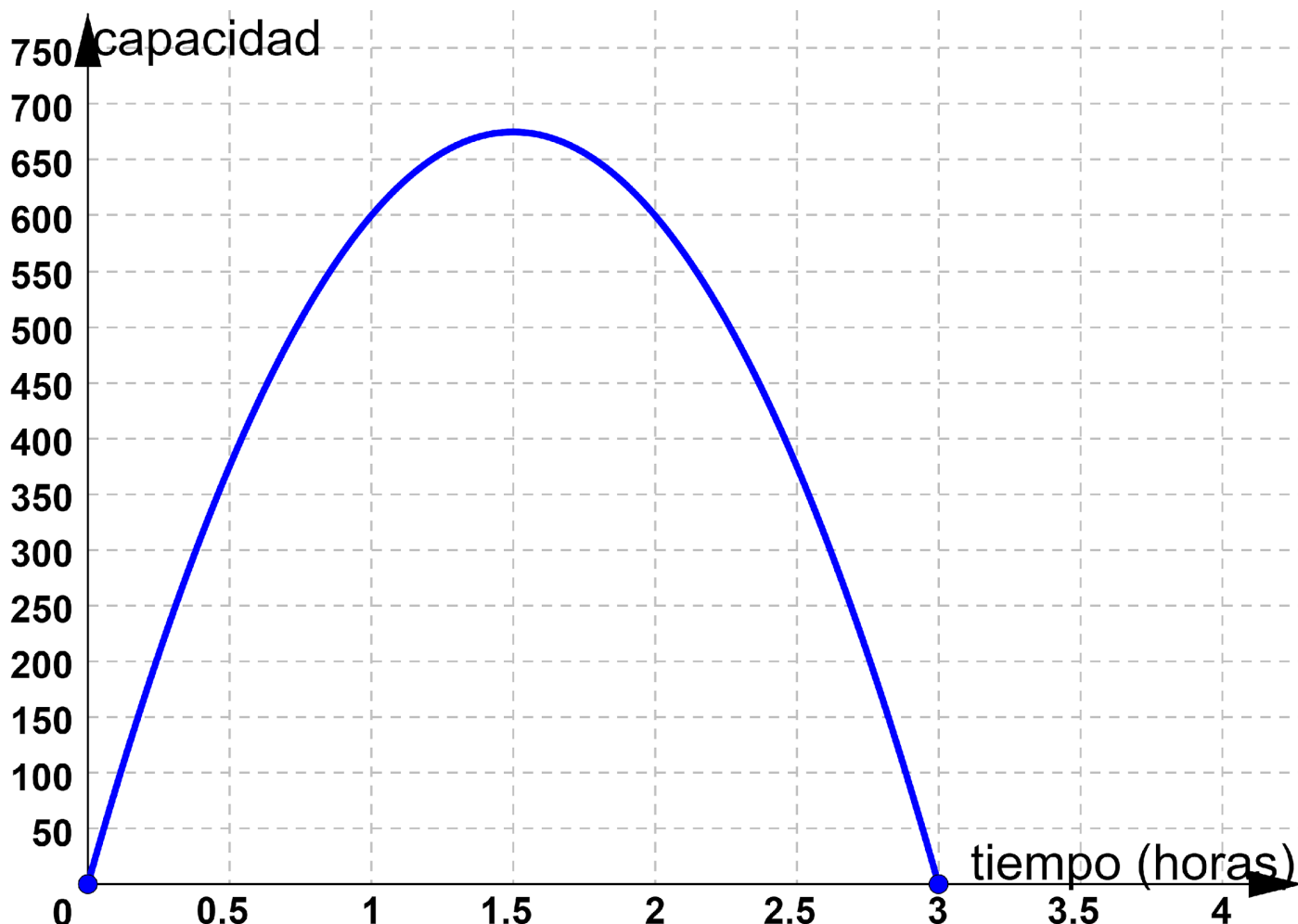
Hagamos una tabla de signos de $f'(t)$:

	$(0 ; 1,5)$	1,5	$(1,5 ; 3)$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	creciente	máximo	decreciente

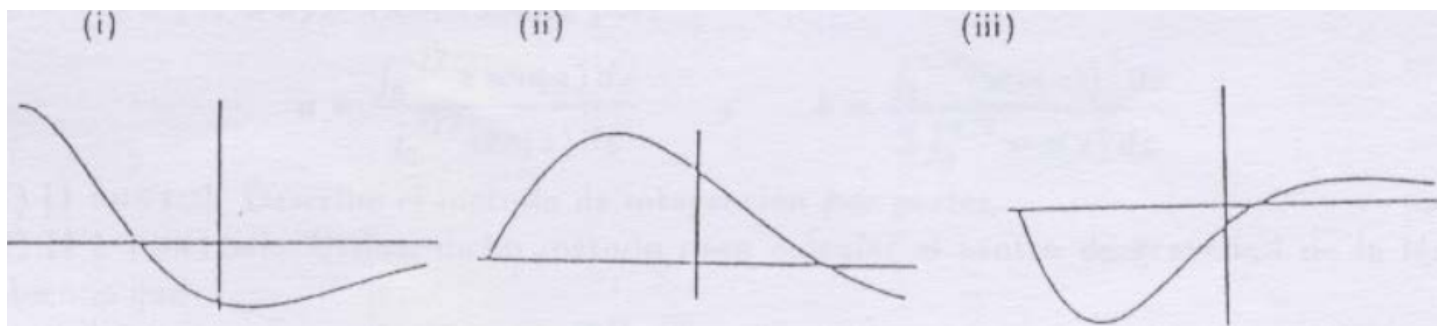
f es creciente en $(0 ; 1,5)$ y decreciente en $(1,5 ; 3)$. Máximo: $t = 1,5$; $f(1,5) = 300 \cdot 1,5(3 - 1,5) = 675$

La capacidad de concentración aumenta desde el inicio hasta las 1,5 horas y disminuye desde las 1,5 horas hasta las 3 horas. Es nula al inicio y al final.

El mejor momento para que la saltadora pueda batir su propia marca es cuando la capacidad de concentración es máxima, es decir, a las 1,5 horas



2.- Las gráficas (i), (ii) y (iii) corresponden, no por ese orden, a las de una función derivable f , su función derivada f' y una primitiva F . Identifica cada gráfica con su función justificando la respuesta.



Resolución

Por ser F una primitiva de f resulta que $F'(x) = f(x)$ y $F''(x) = f'(x)$

Si observamos la gráfica (ii) vemos que pasa de ser creciente y a decreciente y de cóncava a convexa.

Luego, su derivada debe pasar de positiva a negativa (esto le ocurre sólo a la gráfica (i)) y su segunda derivada debe pasar de negativa a positiva (esto le ocurre sólo a la gráfica (iii)).

Por tanto, la gráfica (ii) corresponde a F , la (i) a f y la (iii) a f' .

3.- Una partícula si mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \frac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$

En el punto $P\left(2, \frac{-4}{3}\right)$ la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

(a) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

Resolución

Sea $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$. Se trata de hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P\left(2, \frac{-4}{3}\right)$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$

es $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 2$; $f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2}$

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 2}{(1-2^2)^2} = \frac{10}{9} \quad ; \quad f(x_0) = f(2) = \frac{-4}{3} = \frac{2 \cdot 2}{1-2^2}.$$

$$\text{La recta tangente es } rtg: y = \frac{10}{9}(x - 2) - \frac{4}{3} \quad ; \quad rtg: y = \frac{10x - 32}{9}$$

(b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula encuentra al eje OX.

Resolución

Se trata de encontrar el punto de corte de la recta tangente con el eje OX: $\frac{10x - 32}{9} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$

Por tanto, el punto que se pide es $Q\left(\frac{16}{5}, 0\right) \Rightarrow Q(3, 2 ; 0)$

(c) Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, encuentra el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

Resolución

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2(-1)}{1-(-1)^2} = \frac{-2}{0} = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2 \cdot 1}{1-1^2} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

Las asíntotas son entonces $x = -1$, $x = 1$. La más próxima es entonces $x = 1$

Como la gráfica no puede tocar a ninguna asíntota vertical, no existe tal punto.

4.- De una función integrable $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que para cada x en dicho intervalo se tiene $|f(x)| \leq 1 + x^2$. De los números -3 ; -2 ; -1 ; $2,5$ y $2,75$ ¿cuáles pueden ser el valor de la integral $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Justifica la respuesta.

Resolución

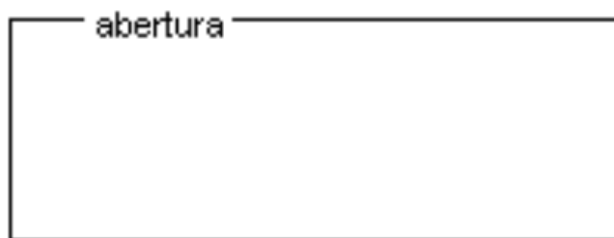
Usando propiedades del valor absoluto y de la integral definida tenemos:

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| \leq \int_{-1}^1 |f(x)| dx \leq \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx. \text{ Una primitiva de } (1 + x^2) \text{ es } p(x) = x + \frac{x^3}{3} = \frac{3x + x^3}{3}$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx = p(1) - p(-1) = \frac{3 \cdot 1 + 1^3}{3} - \frac{3(-1) + (-1)^3}{3} = \frac{8}{3} \cong 2,67$$

Por tanto, $-2,67 \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq 2,67$. Los únicos números entre $-2,67$ y $2,67$ son -2 , -1 y $2,5$.

5.- En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 80 m de tela metálica para vallarla, pero dejando en uno de sus lados una abertura de 20 m sin vallar tal y como se muestra en la figura:



Halla las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede acotarse de esa manera y el valor de dicha área.

Resolución

Sean x e y las dimensiones de la parcela. Como usamos 80 m de tela entonces

$$2x + 2y - 20 = 80 \Rightarrow 2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$$

Función a maximizar: $A(x) = \text{área} = xy = x(50 - x) = 50x - x^2$. $A'(x) = 50 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 25$

Vamos a comprobar que $x = 25$ corresponde al máximo de la función.

$$A''(x) = -2; A''(25) = -2 < 0 \Rightarrow \text{máximo. Luego, } x = 25, y = 50 - 25 = 25$$

Las dimensiones del terreno son 25 m x 25 m, cuadrado de lado 25 m. Y el área es $A = 25^2 = 625 m^2$

6.- Las coordenadas (a, b) del centro de gravedad de una lámina de densidad uniforme que está limitada por la curva $y = \sin x$ y la porción del eje OX comprendida entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$, vienen dadas por:

$$a = \frac{\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx} \quad y \quad b = \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx}{2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx}$$

(a) Describe el método de integración por partes.

Resolución

Si u y v son funciones con derivada continua entonces $\int u(x) v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x) v(x) \, dx$

(b) Utiliza dicho método para calcular el centro de gravedad de la lámina sabiendo

que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$

Resolución

Sea $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, dx$. Hallemos una primitiva, $p(x)$, usando la integración por partes:

$$[u = x \, dx \, dv = \operatorname{sen} x \, dx \, v = -\cos x]; \int (x \operatorname{sen} x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx \Rightarrow$$

$$p(x) = -x \cos x + \operatorname{sen} x.$$

Por la regla de Barrow,

$$\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, dx = p\left(\frac{\pi}{2}\right) - p(0) = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - (-0 \cos 0 + \operatorname{sen} 0) = 1$$

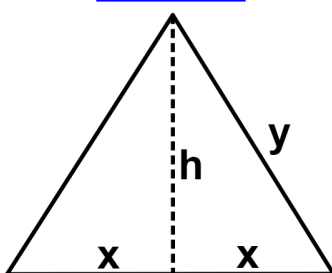
Sea $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$. Una primitiva, es $q(x) = -\cos x$. Por la regla de Barrow,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = q\left(\frac{\pi}{2}\right) - q(0) = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1. \text{ Sustituyendo, } a = \frac{\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y \quad b = \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx}{2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2 \cdot 1} = \frac{\pi}{8}. \text{ El centro de gravedad es } \left(1, \frac{\pi}{8}\right)$$

7.- Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Entonces podemos construir con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcula, de manera razonada, las dimensiones del que tiene mayor área.

Resolución



Como la cuerda mide 5 m, el perímetro es 5. Luego, $2x + 2y = 5 \Rightarrow x + y = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2} - x$

Usando el teorema de Pitágoras

$$h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 - x^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - 5x + x^2 - x^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - 5x}$$

Función a maximizar: $A(x) = \text{área} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} 2xh = xh = x\sqrt{\frac{25}{4} - 5x}$.

$$A'(x) = 1 \cdot \sqrt{\frac{25}{4} - 5x} + x \frac{-5}{2\sqrt{\frac{25}{4} - 5x}} = \frac{2\left(\frac{25}{4} - 5x\right) - 5x}{2\sqrt{\frac{25}{4} - 5x}} = \frac{\frac{25}{2} - 15x}{2\sqrt{\frac{25}{4} - 5x}} = 0 \Leftrightarrow$$

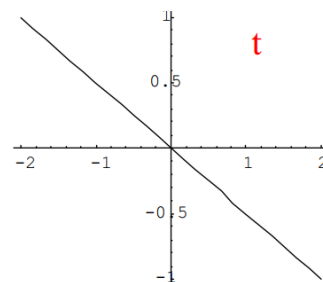
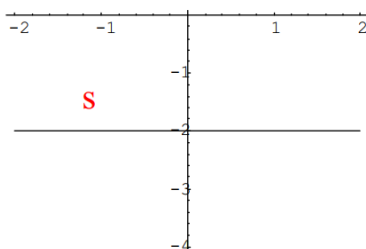
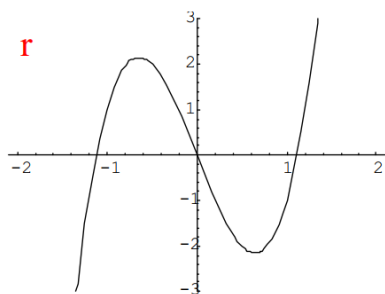
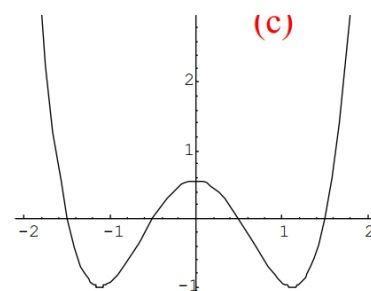
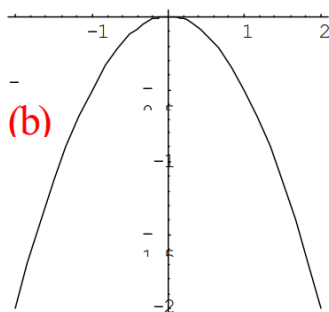
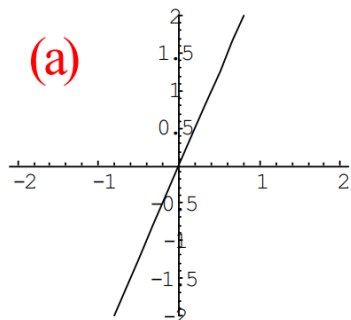
$$\frac{25}{2} - 15x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

Como si $x < \frac{5}{6}$, $A'(x) > 0$ (A es creciente) y si $x > \frac{5}{6}$, $A'(x) < 0$ (A es decreciente) el máximo está en $\frac{5}{6}$

Base del triángulo: $2x = 2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3} \cong 1,67 \text{ m}$. Observa que $y = \frac{5}{2} - \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$ (es un triángulo equilátero)

Altura del triángulo: $h = \sqrt{\frac{25}{4} - 5 \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{25}{12}} \cong 1,44 \text{ m}$

8.- Las gráficas (a), (b) y (c) corresponden, respectivamente, a tres funciones derivables f, g y h. ¿Podrían representar las gráficas (r), (s) o (t) a las gráficas de f', g' o h' (no necesariamente en ese orden)? Justifica la respuesta en cada caso.



Resolución

Como la gráfica (a) es una recta, entonces $f(x) = mx + n$, $f'(x) = m$ (constante). Luego, f' corresponde a la recta s.

Como la gráfica (b) es una parábola, entonces $g(x) = ax^2 + bx + c$, $g'(x) = 2ax + b$ (polinómica de primer grado). Luego, g' corresponde a la recta t.

Por tanto, no queda más remedio que h' corresponda a la recta r.

9.- El número de bacterias en un cultivo experimental en un instante t es $N(t) = 1000(25 + te^{-t/20})$,

para $0 \leq t \leq 100$. ¿Cuánto valen el máximo y el mínimo número de bacterias y en qué instantes se alcanzan, respectivamente dichos valores, extremos?

Resolución

$$N(t) = 25000 + 1000te^{-\frac{t}{20}} \Rightarrow N'(t) = 1000e^{-\frac{t}{20}} + 1000te^{-\frac{t}{20}} \cdot \frac{-1}{20} = 1000e^{-\frac{t}{20}} \left(1 - \frac{t}{20}\right) = 0 \Leftrightarrow t = 20$$

$$N''(t) = 1000e^{-\frac{t}{20}} \frac{-1}{20} \left(1 - \frac{t}{20}\right) + 1000e^{-\frac{t}{20}} \frac{-1}{20} = 1000e^{-\frac{t}{20}} \frac{-1}{20} \left(2 - \frac{t}{20}\right)$$

$$N''(20) = 1000e^{-\frac{20}{20}} \frac{-1}{20} \left(2 - \frac{20}{20}\right) = 1000e^{-1} \frac{-1}{20} < 0.$$

$$\text{Máximo relativo: } t = 20, N(20) = 1000 \left(25 + 20e^{-\frac{20}{20}}\right) = 1000(25 + 20e^{-1}) \cong 32358$$

Hallamos el valor de $N(t)$ en los extremos del intervalo $[0, 100]$:

$$N(0) = 1000 \left(25 + 0e^{-\frac{0}{20}}\right) = 25000 ; N(100) = 1000 \left(25 + 100e^{-\frac{100}{20}}\right) = 1000(25 + 100e^{-5}) \cong 25674$$

Por tanto, el máximo de bacterias es, aproximadamente 32358 y se alcanza en el instante $t = 20$ y el mínimo es 25000 bacterias y se alcanza en el momento inicial, $t = 0$.

10.- Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta debido a la acción de una fuerza F que depende continuamente de la posición x del objeto en dicha línea recta. Se sabe que el trabajo realizado por la

fuerza para mover el objeto desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dado por $W = \int_a^b F(x) dx$.

(a) Si la fuerza es $F(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$, calcula el trabajo para ir desde $x = 3$ hasta $x = 5$.

Resolución

Sustituyendo, lo que se pide es hallar $W = \int_3^5 \frac{2}{(x-1)^2} dx$. Una primitiva de F es $p(x) = \frac{-2}{x-1}$

$$\text{Por la regla de Barrow, } W = p(5) - p(3) = \frac{-2}{5-1} - \frac{-2}{3-1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

(b) Determina razonadamente si la fuerza $G(x) = \frac{2}{(x^2+1)^2}$ realiza más o menos trabajo que la fuerza F anterior para el mismo desplazamiento.

Resolución

El trabajo que ejerce la fuerza G es $W' = \int_3^5 \frac{2}{(x^2+1)^2} dx$.

Como el denominador tiene raíz compleja de multiplicidad 2, descomponemos la fracción por el método de Hermite: $\frac{2}{(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{ax+b}{x^2+1} \right) + \frac{mx+n}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1) - (ax+b)2x}{(x^2+1)^2} + \frac{mx+n}{x^2+1} = \frac{a-2bx-ax^2}{(x^2+1)^2} + \frac{mx+n}{x^2+1}$

Multiplicando los dos miembros por $(x^2+1)^2$ se obtiene: $2 = a - 2bx - ax^2 + (mx+n)(x^2+1)$

Operando, $2 = a - 2bx - ax^2 + mx^3 + nx^2 + mx + n \Rightarrow mx^3 + (n-a)x^2 + (m-2b)x + (a+n-2) = 0$

Por tanto,

$$\{m = 0 \quad n - a = 0 \quad m - 2b = 0 \quad a + n - 2 = 0 \Rightarrow \{n = a \quad 0 - 2b = 0 \rightarrow b = 0 \quad a + n - 2 = 0 ; a + a - 2 = 0 \rightarrow a = 1 ; n = 1$$

Resumen: $a = n = 1, b = m = 0$. Queda $\frac{2}{(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x^2+1} \right) + \frac{1}{x^2+1}$.

Una primitiva es $q(x) = \frac{x}{x^2+1} + \arctg x$. Por la regla de Barrow,

$$W' = q(5) - q(3) = \frac{5}{5^2+1} + \arctg 5 - \left(\frac{3}{3^2+1} + \arctg 3 \right) = \frac{-7}{63} + \arctg 5 - \arctg 3 \cong 0,$$

Como $0,0132 < 0,5$, la fuerza G realiza menos trabajo que la fuerza F

11.- Considera la curva de ecuación $y = x\sqrt{x}$ ($x \geq 0$)

(a) ¿Cuál es el punto de la curva más cercano al punto $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Resolución

El punto que se busca es de la forma $Q(x, x\sqrt{x})$ con $x \geq 0$.

Función a minimizar: $f(x) = \text{dist}^2(P, Q) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (x\sqrt{x} - 0)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + x^3$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3(-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6}, \quad x = \frac{1}{3}, \quad x = -1 \text{ (no válido porque } x \geq 0)$$

$$f''(x) = 6x + 2, \quad f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 4 > 0. \text{ Mínimo en } x = \frac{1}{3}. \text{ El punto es } Q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

(b) Deduce de forma razonada si existe o no un punto en la curva que sea el que está más lejos de P.

Resolución

Como $f(x) = \text{dist}^2(P, Q) = x^2 - x + \frac{1}{4} + x^3$ resulta que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Luego, la distancia de P a la curva no tiene máximo. Es decir, no existe tal punto

12.- De todas las primitivas de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + x|x|$ determina aquélla cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.

Resolución

Usando la definición del valor absoluto, $f(x) = \{1 - x^2, \text{ si } x < 0 \quad 1 + x^2, \text{ si } x \geq 0\}$. Las primitivas de f son de la forma

$$F(x) = \{x - \frac{x^3}{3} + a, \text{ si } x < 0 \quad x + \frac{x^3}{3} + b, \text{ si } x \geq 0\}. \text{ Al ser } f \text{ continua en } \mathbb{R} \text{ (la función valor absoluto lo es y el producto de}$$

funciones continuas, también), por el teorema fundamental del cálculo integral la función F es derivable en $\mathbb{R}$ y $F'(x) = f(x)$.

$$\text{En particular, } F \text{ es continua en } x = 0 \Rightarrow F(x) = F(x) \Rightarrow 0 - \frac{0^3}{3} + a = 0 + \frac{0^3}{3} + b \Rightarrow a = b$$

Como la primitiva F para por (1, 0) entonces $F(1) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1^3}{3} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$

Conclusión: $a = b = -\frac{4}{3}$ y la primitiva buscada es

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} = \frac{3x - x^3 - 4}{3}, & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} = \frac{3x + x^3 - 4}{3}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

13.- Si una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, se llama valor medio de f en el intervalo $[a, b]$ al

$$\text{número } m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Para hacer un estudio sobre, la capacidad de memorizar de un niño se utiliza el siguiente modelo: si x es su edad en años, entonces su capacidad de memorizar viene dada por $f(x) = 1 + 2x \ln x$ ($0 \leq x \leq 5$).

Encuentra el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños.

Resolución

Hallemos $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (1 + 2x \ln x) dx$. Para $\int (2x \ln x) dx$ usemos la integración por partes:

$$\left[u = \ln x \quad \frac{1}{x} dx \quad dv = 2x dx \quad v = x^2 \right] \Rightarrow x^2 \ln x - \int x dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + k.$$

$$\text{Una primitiva de } f \text{ es } F(x) = x + x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} = \frac{2x + 2x^2 \ln x - x^2}{2}$$

Por la regla de Barrow,

$$\int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 \ln 3 - 3^2}{2} - \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 \ln 1 - 1^2}{2} = \frac{18 \ln 3 - 4}{2}$$

Por tanto, el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños es

$$m = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \frac{18 \ln 3 - 4}{2} = \frac{18 \ln 3 - 4}{4} \cong 3,94$$

14.- Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2xe^x + \frac{x^3-2}{x^2+4}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$

es $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ y la de la recta normal es $rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

$$x_0 = 0; f'(x) = 2e^x + 2xe^x + \frac{3x^2(x^2+4) - (x^3-2)2x}{(x^2+4)^2} = 2e^x(1+x) + \frac{x^4+12x^2-4x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x_0) = f'(0) = 2e^0(1+0) + \frac{0^4+12 \cdot 0^2-4 \cdot 0}{(0^2+4)^2} = 2; \quad f(x_0) = f(0) = 2 \cdot 0e^0 + \frac{0^3-2}{0^2+4} = -\frac{1}{2}$$

$$rtg: y = 2(x - 0) - \frac{1}{2}; \quad rtg: y = \frac{4x-1}{3}; \quad rn: y = \frac{-1}{2}(x - 0) - \frac{1}{2}; \quad rn: y = \frac{-x-1}{2}$$

15.- Determina una función $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su función derivada viene dada por $f'(x) = \ln[(x+3)(x+1)]$ y que $f(0) = \ln 27$.

Resolución

$$f'(x) = \ln[(x+3)(x+1)] = \ln(x^2 + 4x + 3) ; f(x) = \int f'(x) dx = \int \ln(x^2 + 4x + 3) dx . \text{ Por partes}$$

$$\left[u = \ln(x^2 + 4x + 3) \quad du = \frac{2x+4}{x^2+4x+3} dx \quad dv = dx \quad v = x \right] \Rightarrow x \ln(x^2 + 4x + 3) - \int \frac{2x^2+4x}{x^2+4x+3} dx$$

Haciendo la división obtenemos la forma mixta de la fracción:

$$\frac{2x^2+4x}{x^2+4x+3} = 2 + \frac{-4x-6}{x^2+4x+3} . \text{ Luego, } I = \int \frac{2x^2+4x}{x^2+4x+3} dx = 2x + \int \frac{-4x-6}{x^2+4x+3} dx \quad I_1$$

Para calcular I_1 descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\text{Como } x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1), \quad \frac{-4x-6}{x^2+4x+3} = \frac{-4x-6}{(x+3)(x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}$$

Multiplicando los dos miembros por $(x+3)(x+1)$, tenemos $-4x-6 = A(x+1) + B(x+3)$

para $x = -1 \Rightarrow -2 = 2B$, $B = -1$; para $x = -3 \Rightarrow 6 = -2A$, $A = -3$

$$I_1 = \int \left(\frac{-3}{x+3} + \frac{-1}{x+1} \right) dx = -3 \ln |x+3| - \ln |x+1| + k ;$$

$$I = 2x - 3 \ln |x+3| - \ln |x+1| + k$$

Por tanto, la función f es de la forma

$$f(x) = x \ln(x^2 + 4x + 3) - 2x + 3 \ln |x+3| + \ln |x+1| + c$$

$$f(0) = \ln 27 = \ln 3^3 = 3 \ln 3 \Rightarrow$$

$$0 \ln(0^2 + 4 \cdot 0 + 3) - 2 \cdot 0 + 3 \ln |0+3| + \ln |0+1| + c = 3 \ln 3$$

$$\text{Luego, } 3 \ln 3 + c = 3 \ln 3 \Rightarrow c = 0 \quad \text{y}$$

$$f(x) = x \ln(x^2 + 4x + 3) - 2x + 3 \ln |x+3| + \ln |x+1|$$

16.- La función f definida por $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (a+3)x + 3a}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \end{cases}$ es derivable en toda la recta real.

(a) ¿Cuánto vale a ?

(b) Para dicho valor de a , ¿cuánto vale $f'(3)$?

Resolución

$$\text{Haciendo la división, } \frac{x^2 - (a+3)x + 3a}{x-3} = x - a.$$

Al ser f derivable, en particular es derivable en $x = 3$. Luego, $f'(x) = f'(3) = 1$ (apartado (b))

$$f'(x) = \frac{x^2 - (a+3)x + 3a}{x-3} = (x - a) = 3 - a \Rightarrow 3 - a = 1 \Rightarrow a = 2 .$$

17.- Sea $f: [-4, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^x$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(b) Halla los máximos y mínimos relativos y absolutos de f .

Resolución

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x = x(2 + x)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2.$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-4, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-4, -2) \cup (0, 2)$ y decreciente en $(-2, 0)$

$$\text{Máximo relativo: } x = -2, y = f(-2) = (-2)^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2} \cong 0,54. \text{ Punto } \left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$\text{Mínimo relativo: } x = 0, y = f(0) = 0^2 e^0 = 0. \text{ Punto } (0, 0)$$

Evaluamos f también en los extremos del intervalo ($x = -4, x = 2$):

$$x = -4, y = f(-4) = (-4)^2 e^{-4} = \frac{16}{e^4} \cong 0,29. \text{ Punto } \left(-4, \frac{16}{e^4}\right)$$

$$x = 2, y = f(2) = 2^2 e^2 = 4 \cdot e^2 \cong 29,56. \text{ Punto } (2, 4e^2)$$

Por tanto, el mínimo absoluto es $(0, 0)$ y el máximo absoluto $(2, 4e^2)$

$$18.- \text{ Sabiendo que } \int_1^5 f(x) dx = 3, \int_1^5 g(x) dx = 3, \int_1^3 f(x) dx = 3, \int_3^5 g(x) dx = 3,$$

$$\text{calcula } \int_3^5 [f(x) + 3g(x)] dx - \int_1^3 [3f(x) + g(x)] dx.$$

Resolución

Usando los datos y la linealidad de la integral definida

$$I = \int_3^5 [f(x) + 3g(x)] dx - \int_1^3 [3f(x) + g(x)] dx = \int_3^5 f(x) dx + 3 \int_3^5 g(x) dx - 3 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx$$

$$I = \int_3^5 f(x) dx + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - \int_1^3 g(x) dx$$

Por otra parte, usando la propiedad de aditividad con respecto al intervalo de integración:

$$3 = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \Rightarrow \int_3^5 f(x) dx = 3 - \int_1^3 f(x) dx = 3 - 3 = 0$$

$$3 = \int_1^5 g(x) dx = \int_1^3 g(x) dx + \int_3^5 g(x) dx \Rightarrow \int_3^5 g(x) dx = 3 - \int_1^3 g(x) dx = 3 - 3 = 0$$

$$\text{Sustituyendo, } I = \int_3^5 f(x) dx + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - \int_1^3 g(x) dx = 0 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - 0 = 0$$

19.- Sea f la función definida por $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ para $x \neq 2$ y $x \neq -2$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Resolución

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{0(x^2 - 4) - 3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-
$f(x)$	creciente	$\nexists$	creciente	máximo	decreciente	$\nexists$	decreciente

f es creciente en $(-\infty, 0) - \{-2\}$ y decreciente en $(0, +\infty) - \{2\}$

(b) Teniendo en cuenta cómo es la función en el intervalo $[3, 4]$ demuestra, sin calcular la integral, que se cumple $\frac{1}{4} \leq \int_3^4 f(x) dx \leq \frac{3}{5}$.

Resolución

El teorema del valor medio para las integrales nos dice que si f es continua en un intervalo $[a, b]$ entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$, siendo m y M el mínimo y máximo absoluto de f en $[a, b]$.

En nuestro caso, como f es decreciente en $[3, 4]$ resulta que $f(4) = \frac{3}{4^2 - 4} = \frac{1}{4}$ es el mínimo absoluto de f en $[3, 4]$ y $f(3) = \frac{3}{3^2 - 4} = \frac{3}{5}$ es el máximo absoluto de f en $[3, 4]$. Además, $b - a = 4 - 3 = 1$.

Aplicándole el teorema del valor medio para integrales tenemos $\frac{1}{4} \leq \int_3^4 f(x) dx \leq \frac{3}{5}$

20.- Una vía de ferrocarril transcurre por un terreno llano de manera que su trazado coincide con el de la recta $y = 1$ para $x \leq 0$. A partir del punto $x = 0$ su trazado coincide con el de la curva $y = (ax + b)e^{-x}$. Sabiendo que el trazado de la vía admite recta tangente en todos sus puntos, ¿cuánto valen a y b ?

Resolución

Según el enunciado, el trazado de la vía es la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ (ax + b)e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como el trazado admite recta tangente en todos sus puntos, f es derivable en $\mathbb{R}$. En particular, lo es en $x = 0$.

Para $x \neq 0$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ ae^{-x} + (ax + b)e^{-x}(-1) = e^{-x}(a - ax - b), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como es continua en $x = 0$, $f(x) = f(x) \Rightarrow 1 = (a \cdot 0 + b)e^{-0} \Rightarrow b = 1$

Al ser derivable en $x = 0$, $f'(x) = f'(x) \Rightarrow 0 = e^{-0}(a - a \cdot 0 - 1) \Rightarrow a = 1$

Conclusión: debe ser $a = b = 1$ y quedaría $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ (x + 1)e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

21.-

(a) Calcula, de manera razonada, todas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifican

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) Estudia la derivabilidad de cada una de las funciones f halladas.

Resolución

Como f es derivable y definida en todo $\mathbb{R}$, $f(x) = \int f'(x) dx = \{e^x + a, \text{ si } x < 0 \quad x^2 + x + b, \text{ si } x \geq 0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Si $x \neq 0$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

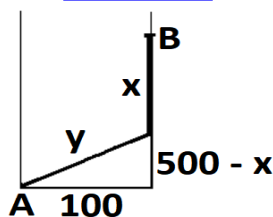
Para $x = 0$, f no es derivable porque según el enunciado, como $f'(x) = \{e^x, \text{ si } x < 0 \quad 2x + 1, \text{ si } x > 0\}$, no existe $f'(0)$

Aunque f no es derivable en $x = 0$ puede ser continua en $x = 0$ si se cumple:

$$f(x) = f(x) \Rightarrow e^0 + a = 0^2 + 0 + b \Rightarrow 1 + a = b \Rightarrow b - a = 1$$

22.- En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta y a 500 metros río arriba se ha construido una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta eléctrica y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta 1200 ptas el metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta 2000 ptas el metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

Resolución



Usando el teorema de Pitágoras $y = \sqrt{100^2 + (500 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 1000x + 260000}$

Función a minimizar: $c(x) = \text{coste} = 2000y + 1200x = 2000 \sqrt{x^2 - 1000x + 260000} + 1200x$

$$c'(x) = \frac{2000(2x - 1000)}{2\sqrt{x^2 - 1000x + 260000}} + 1200 = \frac{1000(2x - 1000)}{\sqrt{x^2 - 1000x + 260000}} + 1200 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2000(500 - x)}{\sqrt{x^2 - 1000x + 260000}} = 1200$$

Simplificando entre 400, $\frac{5(500 - x)}{\sqrt{x^2 - 1000x + 260000}} = 3$. Elevando al cuadrado, $\frac{25(250000 - 1000x + x^2)}{x^2 - 1000x + 260000} = 9$

$$6250000 - 25000x + 25x^2 = 9x^2 - 9000x + 2340000 ; 16x^2 - 16000x + 3910000 = 0$$

$$x^2 - 1000x + 244375 = 0 ; x = \frac{1000 \pm \sqrt{1000000 - 4 \cdot 1 \cdot 244375}}{2 \cdot 1} = \frac{1000 \pm 150}{2}$$

$x = 425$, $x = 575$ (no válida, porque debe ser $x < 500$). Hallando $c''(x)$ resulta que $c''(425) > 0$

Mínimo para $x = 425$, $y = \sqrt{100^2 + (500 - 425)^2} = 125$.

Por tanto, las longitudes que nos hacen mínimo el coste son $x = 425$ m y $y = 125$ m

23.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función polinómica dada por $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 80$.

(a) Determina el intervalo (a, b) en el que f es creciente.

Resolución

$$f'(x) = -6x^2 + 30x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2}, x = 4, x = 1$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente

Luego, f es creciente en el intervalo (1, 4)

(b) Calcula el área limitada por la parte de la gráfica de f correspondiente al intervalo (a, b), el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Resolución

Para hallar el área observamos que f es creciente en el intervalo (1, 4)

$$f(1) = -2.1^3 + 15.1^2 - 24.1 + 80 = 69, f(4) = -2.4^3 + 15.4^2 - 24.4 + 80 = 69 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ en } (1, 4).$$

$$\text{Por tanto, el área que se pide es } A = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 (-2x^3 + 15x^2 - 24x + 80) dx.$$

$$\text{Una primitiva es } F(x) = \frac{-x^4}{2} + 5x^3 - 12x^2 + 80x = \frac{-x^4 + 10x^3 - 24x^2 + 160x}{2}. \text{ Por la regla de Barrow,}$$

$$A = F(4) - F(1) = \frac{-4^4 + 10.4^3 - 24.4^2 + 160.4}{2} - \frac{-1^4 + 10.1^3 - 24.1^2 + 160.1}{2} = \frac{160}{2} - \frac{145}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ u}^2.$$

24.- De las siguientes afirmaciones, hechas sobre una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ¿cuáles deben ser ciertas, pueden ser ciertas en algunas ocasiones o nunca son ciertas? Justifica, las respuestas; en el caso de una respuesta "puede" debes dar un ejemplo en el que la correspondiente afirmación sí es cierta y otro en el que no es cierta.

(a) Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ y f es continua entonces $f(0) = 1$.

Resolución

Como f es continua, en particular lo es en $x = 0$. Luego, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} x = 1 \cdot 0 = 0$

Por tanto, la afirmación NO es cierta

(b) Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $f'(0) = 3$.

Resolución Cierta porque por definición de derivada en un punto, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$

(c) Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $y = 3x + 1$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente en un punto $A(a, f(a))$ es $rtg: y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

En este caso, $a = 0$; $f'(a) = f'(0) = 3$

La ecuación de la recta tangente es $rtg: y = 3(x - 0) + f(0)$; $rtg: y = 3x + f(0)$

Luego, puede que sea cierta. De hecho, sería cierta si fuese $f(0) = 1$.