

Тема 1.2.1 Кінематика точки

План

1. Предмет кінематики. Спокій і рух, відносність цих понять. Система відліку. Основні поняття кінематики: траєкторія, відстань, шлях, швидкість, прискорення
2. Способи задання руху точки. Натуральний спосіб руху точки; швидкість та прискорення точки. Прискорення повне, нормальне, дотичне
3. Види руху точки залежно від прискорення

<https://www.youtube.com/watch?v=1pIIQNwufX8>

<https://www.youtube.com/watch?v=UqmII9T6p-c>

<https://www.youtube.com/watch?v=yZioqlX-k1Y>

1.Предмет кінематики. Спокій і рух, відносність цих понять. Система відліку. Основні поняття кінематики: траєкторія, відстань, шлях, швидкість, прискорення

Кінематикою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчають рух матеріальних тіл у просторі з геометричної точки зору, без врахування сил, що діють на них.

Рух у механіці – це зміна з часом положення певного тіла в просторі відносно інших тіл.

Щоб визначити положення рухомого тіла (або точки) у просторі будь-яку систему координат жорстко зв'язують з тим тілом, відносно якого вивчають рух. Цю систему координат називають системою відліку. Система відліку може бути рухомою і умовно нерухомою. Рух тіла відносно нерухомої системи відліку називають абсолютним; а відносно рухомої – відносним.

Рух тіла відбувається в просторі з часом. Простір в механіці розглядають як тривимірний евклідовий простір.

Час – це скалярна безперервно змінна величина, і його вважають незалежною змінною величиною.

Криву, яку описує точка під час руху її в просторі відносно вибраної системи відліку, називають її траєкторією.

2.Способи задання руху точки. Натуральний спосіб руху точки; швидкість та прискорення точки. Прискорення повне, нормальне, дотичне

Рух точки задається двома способами: натуральним і координатним.

За **натурального** способу задається траєкторія і рівняння руху за цією траєкторією, а також початок і напрям руху.

Рівняння руху в загальному випадку:

$$S=f(t),$$

де: S – відстань точки від початкового положення, що є функцією часу;
 t – час руху точки від початкового моменту.

Знаючи траєкторію руху точки і рівняння руху за цією траєкторією, можна визначити положення точки у будь-який момент часу; для цього в рівняння $S=f(t)$, треба підставити час.

Координатний спосіб полягає у тому, що положення точки у системі відліку визначається трьома координатами X, Y, Z .

Рівняння руху точки у координатному вигляді $X=f(t); Y=f(t); Z=f(t)$, за допомогою їх в кожний момент часу можна визначити положення точки в просторі.

Якщо точка за довільно вибрані, але рівні проміжки часу проходить однаковий шлях, то рух її називають **рівномірним**, а в протилежному випадку – **нерівномірним**.

За рівномірного руху швидкість точки є сталою величиною, а за нерівномірного – змінною. Найпростіше швидкість точки визначають тоді, коли вона рухається рівномірно і прямолінійно. У цьому разі модуль швидкості дорівнює відношенню шляху S , пройденого точкою, до проміжку часу t , впродовж якого рухалась точка:

$$V = \frac{S}{t}.$$

За прямолінійного руху точки вектор швидкості буде спрямований за прямолінійною траєкторією з цього положення точки вбік її руху.

За рівномірного прямолінійного руху, шлях S , пройдений точкою, дорівнює добутку швидкості V точки на час її руху, $S = V \cdot t$, це рівняння називають рівнянням рівномірно-прямолінійного руху точки.

Якщо в початковий момент часу ($t = 0$) точка M знаходиться від точки O на відстані $S_0 = OM_0$, тобто в точці M_0 (рис.1), то рівняння руху матиме вигляд: $S = S_0 + V \cdot t$.

Тоді швидкість точки дорівнює:

$$V = \frac{S-S_0}{t}, \text{ (м/с)}.$$

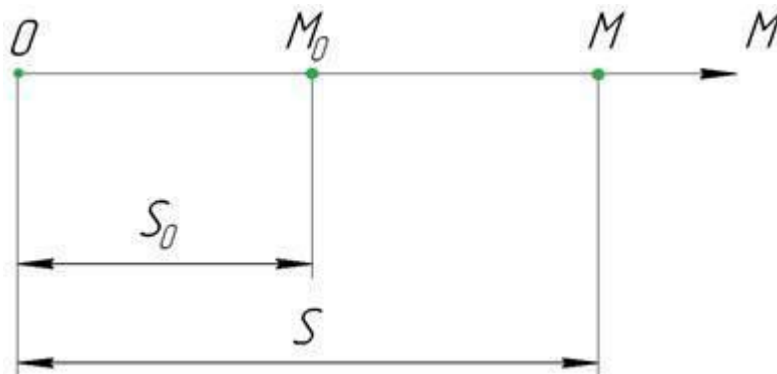


Рис.1

За нерівномірного руху розрізняють два поняття: *середня швидкість* і *швидкість у певний момент*.

Розглянемо, як визначають швидкість точки у загальному випадку нерівномірного криволінійного руху за натурального способу визначення руху.

Позначимо проміжок часу, протягом якого відбувається рух, через Δt . Знак Δt (грецька літера «дельта») означає приріст відповідної змінної величини (в даному випадку t). Нехай будь-яка точка M рухається за криволінійною траєкторією (рис. 2). У момент часу t ця точка займає на траєкторії положення M , а за проміжок часу Δt пройде відстань і перейде в положення M_1 . З'єднаємо точки M і M_1 вектором. Вектор MM_1 називають **вектором переміщення** точки за деякий проміжок часу.

Середня швидкість точки визначатиметься так:

$$V_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

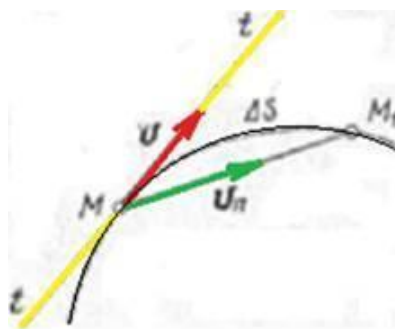


Рис.2

Переміщення точки MM_1 є вектор, а тому вектор середньої швидкості точки має напрямок вектора її переміщення, оскільки Δt є скалярна величина.

Якщо зменшувати проміжок часу, залишаючи незмінним початок цього проміжку, то безперервно зменшуватиметься і величина переміщення $MM_1 = \Delta S$ точки, а середня швидкість наближуватиметься до значення швидкості точки в певний момент часу.

Швидкості точки в певний момент часу – це границя, до якої прямує середня швидкість, коли Δt прямує до нуля.

$$V = V_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Отже, швидкість V точки в певний момент часу дорівнює першій похідній за часом від дугової координати. Швидкість спрямована за дотичною до траєкторії в бік руху точки.

Рівнозмінний рух – рух, за якого швидкість точки за однакові проміжки часу змінюється на однакову величину.

Величину, яка характеризує зміну вектора швидкості за модулем і напрямком, називають прискоренням.

У прямолінійному русі точки вектор швидкості завжди збігається з траєкторією і тому вектор зміни швидкості також збігається з траєкторією. Якщо за невеликий проміжок часу Δt швидкість точки змінилася на ΔV , то середнє прискорення $a_c = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Середнє прискорення не дає уявлення про дійсне прискорення у кожний певний момент часу (дійсне прискорення називають миттєвим). Дійсне прискорення – це границя, до якої прямує середнє прискорення за Δt , що прямує до нуля:

$$a = a_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

Враховуючи, що $V = \frac{dS}{dt}$ дістаємо

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}, \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Дійсне прискорення в прямолінійному русі дорівнює першій похідній швидкості за часом або другій похідній координати (відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Коли точка рухається за криволінійною траєкторією, то швидкість змінює свій напрямок. Уявимо точку M , яка за час Δt , рухаючись за криволінійною траєкторією, перемістилася у положення M_1 (рис. 3). Вектор приросту (зміни) швидкості позначимо ΔV , тоді $\Delta V = V_1 - V$.

Щоб знайти вектор ΔV , перенесемо вектор V_1 у точку M і побудуємо трикутник швидкостей. Знайдемо вектор середнього прискорення: $a_c = \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

Вектор a_c паралельний вектору ΔV , оскільки від ділення векторної величини на скалярну напрямок вектора не зміниться.

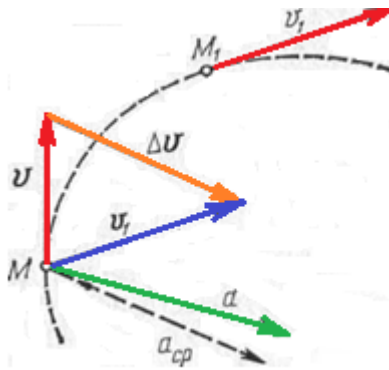


Рис.3

Вектор дійсного прискорення – це границя, до якої прямує відношення вектора приросту швидкості відповідного проміжку часу, коли він прямує до нуля,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Таку границю називають векторною похідною. Таким чином, *дійсне прискорення точки в криволінійному русі дорівнює векторній похідній швидкості за часом.*

З рис. 3 бачимо, що вектор прискорення в криволінійному русі завжди спрямований у бік угнутості траєкторії.

Прискорення в криволінійному русі, якщо рух точки задано звичайним способом, визначається за теоремою про проекції прискорення на дотичну і нормаль.

Проекцію повного прискорення на нормаль до траєкторії називають **нормальним прискоренням**; проекцію повного прискорення на дотичну до траєкторії називають **дотичним прискоренням**; його іноді називають ще тангенціальним.

Теорема. Нормальне прискорення a_n дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії у певній точці, дотичне прискорення a_t дорівнює першій похідній швидкості за часом.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна побачити, що коли швидкість за модулем не змінюється, то

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0,$$

а коли швидкість не змінюється за напрямком (прямолінійний рух), то

$$a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0,$$

Отже, дотичне прискорення характеризує зміну швидкості лише за модулем, а нормальне – лише за напрямком.

Знаючи дотичне і нормальне прискорення, можна визначити модуль і напрямок повного прискорення за формулами: модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2};$$

напрямок прискорення

$$\cos \cos(a_t, a) = \frac{a_t}{a}$$

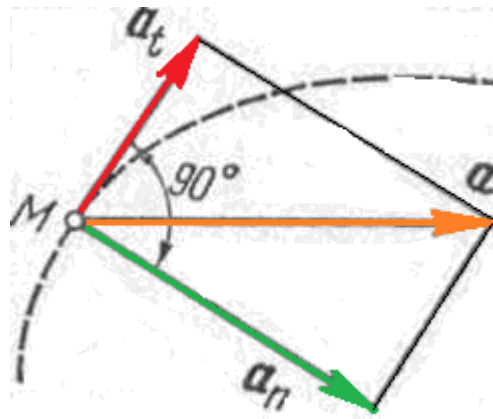


Рис.4

Часто дотичне і нормальне прискорення розглядають не як проекції, а як *складові повного прискорення*, тобто векторні величини. Коли осі взаємно перпендикулярні, то проекції вектора на ці осі і його складові, спрямовані за цими осями, рівні між собою за модулем. Дотичне, нормальне і повне прискорення показано на рис.4.

Якщо $a_t > 0$, то вектори дотичного прискорення і швидкості спрямовані в один бік і тому рух буде прискореним. А коли $a_t < 0$, то вектор дотичного прискорення має протилежний до швидкості напрямок і тому рух буде сповільненим. Вектор нормального прискорення завжди напрямлений до центра кривизни, тому це прискорення називають ще *доцентровим*.

3. Види руху точки залежно від прискорення

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна дійти таких висновків:

$$1. \ a_t = \frac{dv}{dt} \neq 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$$

рух нерівномірний ($v \neq \text{const}$), криволінійний ($\rho \neq \infty$);

$$2. a_t = \frac{dV}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0$$

рух рівномірний ($V = \text{const}$), криволінійний ($\rho \neq \infty$);

$$3. a_t = \frac{dV}{dt} \neq 0, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$$

рух нерівномірний ($V \neq \text{const}$), прямолінійний ($\rho = \infty$);

$$4. a_t = \frac{dV}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$$

рух рівномірний прямолінійний.

Під час рівномірного руху дотичне прискорення $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$. Модуль швидкості точки в рівномірному русі – величина стала $V = \frac{dS}{dt} = \text{const}$. Звідси $dS = V \cdot dt$, інтегруючи цей вираз, дістаємо

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t V \cdot dt$$

$$S - S_0 = V \cdot t.$$

Остаточно формули рівномірного руху:

$$V = \text{const}, \quad S = S_0 + V \cdot t.$$

У рівнозмінному русі дотичне прискорення – величина стала:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = \text{const},$$

звідси

$$dV = a_t \cdot dt.$$

Інтегруючи цей вираз, дістаємо:

$$\int_{V_0}^V dV = \int_0^t a_t \cdot dt, \quad V - V_0 = a_t \cdot t.$$

Остаточно формула швидкості:

$$V = V_0 \pm a \cdot t.$$

Оскільки $dS = V \cdot dt$, інтегруючи цей вираз, дістаємо рівняння рівнозмінного руху точки:

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t (V_0 + a \cdot t) \cdot dt, \quad S - S_0 = V_0 \cdot t + \frac{a_t \cdot t^2}{2}.$$

Формули рівнозмінного руху:

$$V = V_0 \pm a \cdot t, \quad S = S_0 + V_0 \cdot t \pm \frac{a_t \cdot t^2}{2}.$$

Якщо точка рухається криволінійно, то вона має нормальне прискорення

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}$$

, а модуль повного прискорення визначають за формулою:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$