

Bài tập 1: Một chất điểm M chuyển động trong hệ quy chiếu Oxyz có phương trình chuyển động được cho bởi:

$$x(t) = \sin(t), \quad y(t) = \cos(t); \quad z(t) = \cos(2t) \quad \text{đơn vị tính mét (m)}$$

- Tìm phương trình quỹ đạo của M (phương trình chỉ chứa x, y, z không chứa biến thời gian t)
- Tìm khoảng cách từ M đến gốc tọa độ O tại thời điểm $t = \pi/4$ giây
- Tìm vận tốc trung bình của M sau khoảng thời gian $\pi/4$ giây
- Tìm vận tốc tức thời của M tại thời điểm $t = \pi/4$ giây
- Tìm gia tốc trung bình của M sau khoảng thời gian $\pi/4$ giây
- Tìm gia tốc tức thời của M tại thời điểm $t = \pi/4$ giây

Đáp án

- a) Phương trình quỹ đạo của M:

$$y^2 - x^2 = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t) = z$$

$$y^2 - x^2 - z = 0$$

- b) Tại thời điểm $\pi/4$ giây:

$$\{x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z = 0\}$$

Khoảng cách r từ M tới gốc O:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2} = 1 \text{ (m)}$$

- c) Vận tốc trung bình:

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}{\Delta t}$$

Tại $t = 0$: $x(0) = 0$; $y(0) = 1$; $z(0) = 1$

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}{\Delta t}$$

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}-0)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2 + (0-1)^2}}{1/4} = 1,6 \text{ m/s}$$

d) Các thành phần của v :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -2\sin 2t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 4\sin^2 2t}$$

$$v = \sqrt{1 + 4\sin^2 2t}$$

Thế $t = \frac{\pi}{4}$: $v = \sqrt{5} \text{ m/s}$

e) Gia tốc trung bình:

$$a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(\frac{\pi}{4}) - v(0)}{\Delta t}$$

$$\text{Mà } v(0) = \sqrt{1 + 4\sin^2 2t} = 1 \text{ m/s}$$

$$a_{tb} = \frac{v(\frac{\pi}{4}) - v(0)}{\Delta t} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\pi/4} = 1,57 \text{ m/s}^2$$

f) Các thành phần của gia tốc:

$$v_x = \cos t \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\sin t$$

$$v_y = -\sin t \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\cos t$$

$$v_z = -2\sin 2t \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = -4\cos 2t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 16\cos^2 2t}$$

$$a = \sqrt{1 + 16\cos^2 2t}$$

Thế $t = \frac{\pi}{4}$: $a = 1 \text{ m/s}^2$

Homework 1: A particle M moves in the Oxyz coordinate system with the motion equations given by::

$$x(t) = \sin(t), \quad y(t) = \cos(t); \quad z(t) = \cos(2t)$$

where the unit of measurement is meters (m).

- Find the equation of the trajectory of M (the equation should only contain x, y, z without the time variable t)
- Determine the distance from M to O at time $t = \pi/4$ seconds
- Find the average velocity of M after a time interval of $\pi/4$ seconds
- Determine the instantaneous velocity of M at time $t = \pi/4$ seconds
- Find the average acceleration of M after a time interval of $\pi/4$ seconds
- Determine the instantaneous acceleration of M at time $t = \pi/4$ seconds

Answer

a) The equation of the trajectory of M:

$$y^2 - x^2 = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos \cos (2t) = z$$

$$y^2 - x^2 - z = 0$$

b) At time $t = \pi/4$ seconds:

$$\{x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z = 0$$

The distance from M to O:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2} = 1 \text{ (m)}$$

c) the average velocity:

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}{\Delta t}$$

At $t = 0$: $x(0) = 0$; $y(0) = 1$; $z(0) = 1$

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}{\Delta t}$$

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 + (0-1)^2}}{1/4} = 1,6 \text{ m/s}$$

d) The components of v :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -2\sin 2t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 4\sin^2 2t}$$

$$v = \sqrt{1 + 4\sin^2 2t}$$

Thế $t = \frac{\pi}{4}$: $v = \sqrt{5} \text{ m/s}$

e) The average acceleration:

$$a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\left(\frac{\pi}{4}\right) - v(0)}{\Delta t}$$

$$v(0) = \sqrt{1 + 4\sin^2 2t} = 1 \text{ m/s}$$

$$a_{tb} = \frac{v\left(\frac{\pi}{4}\right) - v(0)}{\Delta t} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\pi/4} = 1,57 \text{ m/s}^2$$

f) The components of a:

$$v_x = \cos t \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\sin t$$

$$v_y = -\sin t \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\cos t$$

$$v_z = -2\sin 2t \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = -4\cos 2t$$

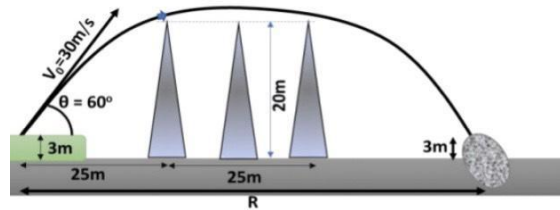
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 16\cos^2 2t}$$

$$a = \sqrt{1 + 16\cos^2 2t}$$

$$\text{At } t = 0 : a = 1 \text{ m/s}^2$$

Bài tập 2: Một khẩu pháo được đặt trên mô đất cao 3 m so với mặt đất và nòng pháo hướng lên một góc 60° so với phương nằm ngang. Đạn được bắn ra với tốc độ $v_0 = 30$ m/s để trúng vào mục tiêu cách đó một khoảng R cao hơn so với mặt đất 3 m và viên đạn phải vượt qua ba cái tháp cao 20 m (hình). Biết $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- Viết phương trình quỹ đạo của viên đạn
- Với thông số ban đầu như vậy thì viên đạn có vượt qua tháp đầu tiên không?
- Nếu viên đạn đạt độ cao cực đại tại tháp số 2 thì khoảng cách giữa viên đạn và đỉnh tháp thứ 2 là bao nhiêu?
- Thời gian bao của viên đạn đến lúc chạm mục tiêu là bao nhiêu?
- Tầm xa R của viên đạn (lúc chạm mục tiêu)?

Đáp án

- Phương trình chuyển động:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \theta \text{ (m)} \\ y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \text{ (m)} \end{cases}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta) x$$

$$y = -\frac{1}{45} x^2 + \sqrt{3} x \text{ (m)}$$

- Thế $x = 25$ m vào phương trình quỹ đạo:

$$y = -\frac{1}{45} x^2 + \sqrt{3} x \text{ (m)}$$

$$y = -\frac{1}{45} \cdot 25^2 + \sqrt{3} \cdot 25 = 29,41 \text{ m}$$

Vậy viên đạn vượt qua tháp đầu tiên

c) Khi viên đạn đạt độ cao cực đại:

$$v_y = 0$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$\text{Thế } t \text{ vào: } y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2$$

$$y = 33,75 \text{ (m)}$$

Vậy viên đạn cách đỉnh tháp thứ 2 là : $(33,75 + 3) - 20 = 16,75 \text{ m}$

d) Khi chạm mục tiêu: $y = 0$

$$y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$30 \sin 60^\circ t - \frac{1}{2} \cdot 10 t^2 = 0$$

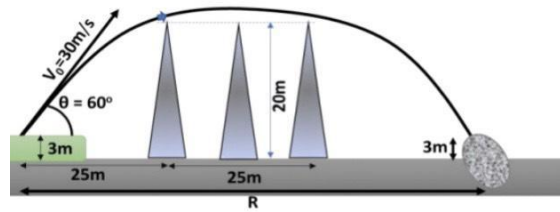
$$t = 3\sqrt{3} = 5,196 \text{ m}$$

e) Tầm xa R của viên đạn lúc chạm mục tiêu:

$$R = x(t = 3\sqrt{3}) = v_0 t \cos \theta$$

$$R = 30 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 77,94 \text{ m}$$

Homework 2: A cannon is placed on a hill 3 meters above the ground, with its barrel pointing upwards at an angle of 60° relative to the horizontal. The projectile is fired with an initial velocity of $v_0 = 30 \text{ m/s}$ to hit a target located at a horizontal distance R away. The target is also 3 m above the ground, and the projectile must pass over three towers, each 20 m high (as shown in the figure). Given that $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- Write the equation of the projectile's trajectory.
- With the given initial conditions, does the projectile clear the first tower?
- If the projectile reaches its maximum height above the second tower, what is the vertical distance between the projectile and the top of the second tower?
- How long does the projectile take to reach the target?
- What is the total range R of the projectile (when it hits the target)?

Answer

- Equations of motion::

$$\{x(t) = v_0 t \cos \theta \text{ (m)} \quad y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \text{ (m)}\}$$

The trajectory equation:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta) x$$

$$y = -\frac{1}{45} x^2 + \sqrt{3} x \text{ (m)}$$

- Substituting $x = 25 \text{ m}$ into the trajectory equation:

$$y = -\frac{1}{45} x^2 + \sqrt{3} x \text{ (m)}$$

$$y = -\frac{1}{45} \cdot 25^2 + \sqrt{3} \cdot 25 = 29,41 \text{ m}$$

Since the projectile's height is 29.41 m, which is greater than 20 m, it clears the first tower.

- At the highest point, the vertical velocity component is zero:

$$v_y = 0$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Substituting t into the height equation:

$$y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2$$

$$y = 33,75 \text{ (m)}$$

Thus, the vertical distance between the projectile and the top of the second tower is::
 $(33,75 + 3) - 20 = 16,75 \text{ m}$

d) At the point of impact: $y = 0$

$$y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$30 \sin 60^\circ t - \frac{1}{2} \cdot 10 t^2 = 0$$

$$t = 3\sqrt{3} = 5,196 \text{ m}$$

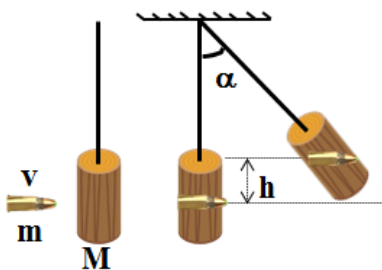
e) Range R of the projectile when it hits the target:

$$R = x(t = 3\sqrt{3}) = v_0 t \cos \theta$$

$$R = 30 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 77,94 \text{ m}$$

Bài tập 3: Một viên đạn khối lượng $m = 50 \text{ g}$, được bắn thẳng vào một khối gỗ nặng $M = 5 \text{ kg}$ được treo trên sợi dây mảnh. Sau khi bắn, viên đạn dính chặt vào khối gỗ và người ta thấy khối gỗ được nâng lên độ cao $h = 50 \text{ cm}$ so với vị trí ban đầu. Cho gia tốc trọng trường $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) Tính tốc độ của viên đạn trước khi chạm vào khối gỗ.
- b) Nếu khối gỗ được giữ chặt không chuyển động và viên đạn đi sâu vào khối gỗ một đoạn $s = 10 \text{ cm}$. Tính lực cản trung bình của khối gỗ lên viên đạn.



Đáp án

- a) Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho thời điểm viên đạn trước khi ghim vào gỗ và sau khi vừa ghim vào gỗ:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \vec{p}_2 \\ \Leftrightarrow \vec{p}_{1_đạn} + \vec{p}_{1_gỗ} &= \vec{p}_{2_đạn} + \vec{p}_{2_gỗ} \\ \Leftrightarrow m\vec{v} &= (m + M) \vec{V} \\ \Leftrightarrow v &= \frac{(m+M)V}{m} \quad (*)\end{aligned}$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho thời điểm hệ đạn nằm trong gỗ và thời điểm hệ đạn gỗ đạt độ cao cực đại:

$$\begin{aligned}W_2 &= W_3 \\ \Leftrightarrow W_{2_đạn} + W_{2_gỗ} &= W_{3_đạn} + W_{3_gỗ}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

Thế vào (*):

$$\Rightarrow v = \frac{(m+M)V}{m} = \frac{(m+M)}{m} \sqrt{2gh} = \frac{50 \cdot 10^{-3} + 5}{50 \cdot 10^{-3}} \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 10^{-2}} = 319,4 \text{ (m/s)}$$

b) Áp dụng định lý động năng cho viên đạn ngay trước khi chạm vào gỗ và sau khi đi được quãng đường s rồi dừng lại:

$$W_{đ'} - W_{đ} = A_{cản}$$

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = F_{cản} \cdot s \cdot \cos 180^\circ$$

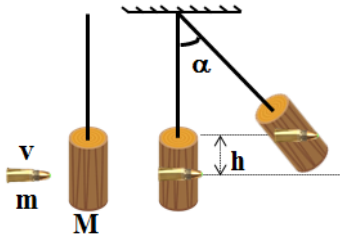
$$- \frac{1}{2}mv^2 = - F_{cản} \cdot s$$

$$\Rightarrow F_{cản} = \frac{mv^2}{2s} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot (319,4)^2}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 25,5 \cdot 10^3 \text{ (N)}$$

Homework 3: A bullet with mass $m = 50 \text{ g}$ is fired straight into a wooden block with mass $M = 5 \text{ kg}$, which is suspended by a thin string. After the shot, the bullet becomes embedded in the wooden block, and it is observed that the wooden block rises to a height of $h = 50 \text{ cm}$ from its initial position. Given the acceleration due to gravity $g = 10 \text{ m/s}^2$, solve the following:

a) Determine the velocity of the bullet before it hits the wooden block.

b) If the wooden block is held stationary and the bullet penetrates it to a depth of $s = 10 \text{ cm}$, calculate the average force exerted by the wooden block on the bullet.



Answer

a) Applying the law of conservation of momentum at the moment before the bullet embeds into the wooden block and just after embedding:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{p}_{1_đạn} + \vec{p}_{1_gỗ} = \vec{p}_{2_đạn} + \vec{p}_{2_gỗ}$$

$$\Leftrightarrow m\vec{v} = (m + M) \vec{V}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{(m+M)V}{m} \quad (*)$$

Applying the law of conservation of mechanical energy between the moment when the bullet-wood system is in motion and when it reaches the highest position:

$$W_2 = W_3$$

$$\Leftrightarrow W_{2_đạn} + W_{2_gỗ} = W_{3_đạn} + W_{3_gỗ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

Substituting into (*):

$$\Rightarrow v = \frac{(m+M)V}{m} = \frac{(m+M)}{m} \sqrt{2gh} = \frac{50 \cdot 10^{-3} + 5}{50 \cdot 10^{-3}} \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 10^{-2}} = 319,4 \text{ (m/s)}$$

b) Applying the work-energy theorem for the bullet just before it hits the wooden block and after traveling a distance s before stopping:

$$W_{\vec{d}} - W_{\vec{d}} = A_{c\grave{a}n}$$

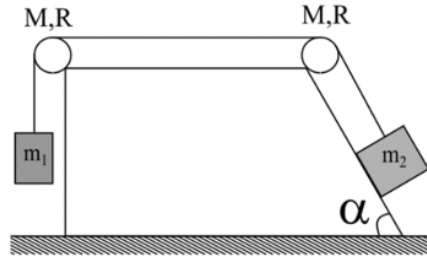
$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = F_{c\grave{a}n} \cdot s \cdot \cos 180^\circ$$

$$-\frac{1}{2}mv^2 = -F_{c\grave{a}n} \cdot s$$

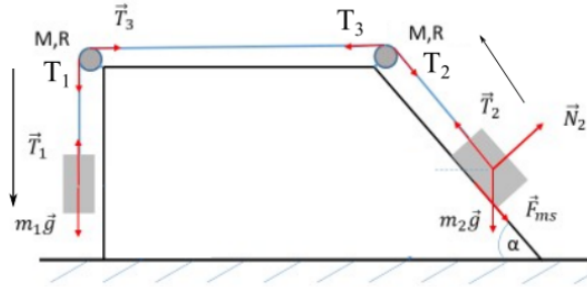
$$\Rightarrow F_{c\grave{a}n} = \frac{mv^2}{2s} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot (319,4)^2}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 25,5 \cdot 10^3 \text{ (N)}$$

Bài tập 4: Cho hai vật có khối lượng $m_1 = 7 \text{ kg}$ và $m_2 = 3 \text{ kg}$ được nối với nhau bởi dây không giãn có khối lượng không đáng kể, vắt qua hai ròng rọc (đĩa rắn) có cùng khối lượng $M = 1 \text{ kg}$, bán kính R , m_2 trượt trên mặt phẳng nghiêng góc $\alpha = \pi/3$ so với mặt đất với hệ số ma sát $k = 0,5$. Hệ chuyển động trong trường trọng lực Trái đất với $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, có chiều chuyển động m_1 đi xuống. Giả sử ban đầu hệ đứng yên, hãy xác định:

- Gia tốc chuyển động của m_1 và m_2 .
- Các lực căng dây.
- Tìm động năng của hệ sau 2s kể từ lúc hệ bắt đầu chuyển động.



Đáp án



$$\vec{T}_1 + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\rightarrow -T_1 + m_1 g = m_1 a \quad (1)$$

$$\vec{T}_2 + m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{ms} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\rightarrow T_2 - m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha = m_2 a \quad (2)$$

$$-T_3 + T_1 = \frac{Ma}{2} \quad (3)$$

$$T_3 - T_2 = \frac{Ma}{2} \quad (4)$$

Giải hệ 4 phương trình (1) (2) (3) (4) ta có:

$$a = \frac{m_1 - m_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + M}g = 3,25 \text{ m/s}^2$$

$$(1) \Rightarrow T_1 = m_1(g - a) \Leftrightarrow T_1 = \left(\frac{m_2(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha) + M}{m_1 + m_2 + M} \right) m_1 g = 45,73 \text{ N}$$

$$(2) \Rightarrow T_2 = m_2(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha) \Leftrightarrow T_2 = 42,5 \text{ N}$$

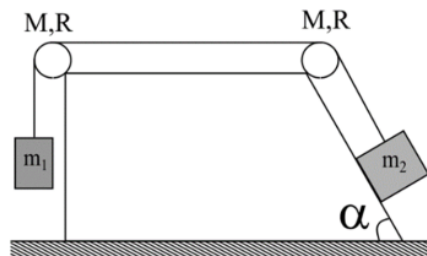
$$(3) \Rightarrow T_3 = T_1 - \frac{Ma}{2} \Leftrightarrow T_3 = 44,1 \text{ N}$$

c) Vận tốc của vận sau 2 s chuyển động: $v = at = 6,5 \text{ m/s}$

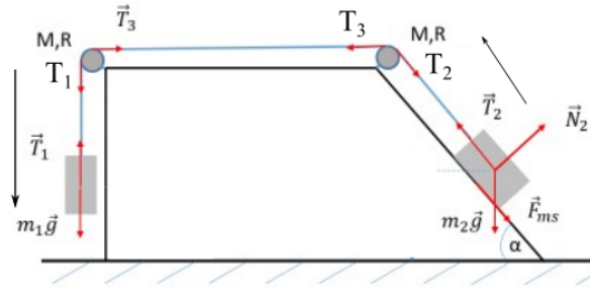
$$W = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + M)v^2 = 35,75 \text{ J} \quad (1 \text{ điểm})$$

Homework 4: Two objects with masses $m_1 = 7 \text{ kg}$ and $m_2 = 3 \text{ kg}$ are connected by a massless, inextensible string that passes over two pulleys (solid disks) with mass $M = 1 \text{ kg}$ and radius R . The object m_2 slides on an inclined plane with an angle $\alpha = \pi/3$ relative to the horizontal surface, with a coefficient of friction $k = 0,5$. The system moves under the influence of Earth's gravitational field, where $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. The motion is assumed to be such that m_1 moves downward. Given that the system starts from rest, determine:

- The acceleration of m_1 and m_2 .
- The tension forces in the string.
- The kinetic energy of the system after 2 seconds from the start of motion.



Answer



a) Writing the equations of motion (1,2,3,4):

$$\vec{T}_1 + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\Rightarrow -T_1 + m_1 g = m_1 a \quad (1)$$

$$\vec{T}_2 + m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{friction}} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\Rightarrow T_2 - m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha = m_2 a \quad (2)$$

$$-T_3 + T_1 = \frac{Ma}{2} \quad (3)$$

$$T_3 - T_2 = \frac{Ma}{2} \quad (4)$$

Solving the system of four equations (1), (2), (3), and (4), we obtain:

$$a = \frac{m_1 - m_2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + M} g = 3.25 \text{ m/s}^2$$

b) Calculating the tensions in the string:

$$\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow T_1 = m_1(g - a) \\
\Rightarrow T_1 &= \left(\frac{m_2(1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha) + M}{m_1 + m_2 + M} \right) m_1 g = 45.73 N \\
(2) &\Rightarrow T_2 = m_2(a + g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha) \\
&\Rightarrow T_2 = 42.5 N \\
(3) &\Rightarrow T_3 = T_1 - \frac{Ma}{2} \\
&\Rightarrow T_3 = 44.1 N
\end{aligned}$$

c) Kinetic energy of the system after 2 seconds of motion:

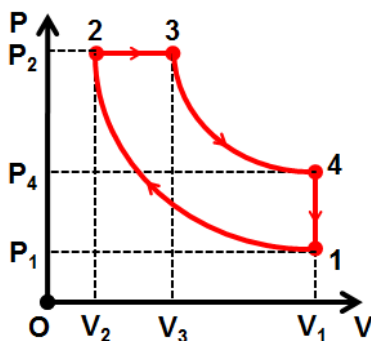
$$\text{Velocity after 2 s: } v = at = 6.5 \text{ m/s}$$

$$W = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + M)v^2 = 35.75 \text{ J}$$

Bài tập 5: Một khối khí lý tưởng ($i = 3$) dùng làm tác nhân của động cơ nhiệt thực hiện chu trình như hình, trong đó, quá trình (1-2), (3-4) là các quá trình đoạn nhiệt, quá trình (2-3) là quá trình đẳng áp, quá trình (4-1) là quá trình đẳng tích. Khối khí ở trạng thái (1) có nhiệt độ $t_1 = 27^\circ\text{C}$, thể tích V_1 , ở trạng thái (2) có thể tích V_2 , ở trạng thái (3) thể tích V_3 . Biết $V_1 = 4\sqrt{2}V_2$ và $V_3 = 1,5V_2$.

a) Tìm các nhiệt độ T_2, T_3, T_4 của tác nhân ở các trạng thái (2), (3), (4) tương ứng.

b) Tính hiệu suất nhiệt của động cơ này.



Đáp án

$$\text{a) } \gamma = \frac{2}{i} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

Quá trình (1) – (2) đoạn nhiệt: $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow T_2 = 300(4\sqrt{2})^{\frac{5}{3}-1} = 952,44 \text{ (K)}$$

Quá trình (2) – (3) đẳng áp:

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = 1,5 T_2 = 1,5 \cdot 952,44 = 1428,66 \text{ (K)}$$

Quá trình (3) – (4) đoạn nhiệt: $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} = T_3 \left(\frac{1,5V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = T_3 \left(\frac{1,5}{4\sqrt{2}} \right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow T_4 = 589,66 \text{ (K)}$$

b) Quá trình (1) – (2) và (3) – (4) đoạn nhiệt: $Q_{12} = Q_{34} = 0$

Quá trình (2) – (3) đẳng áp: $Q_{23} = \left(\frac{i}{2} + 1 \right) \frac{m}{\mu} R (T_3 - T_2)$

$$Q_{23} = \left(\frac{i}{2} + 1 \right) P_2 (V_3 - V_2) = \frac{5}{4} P_2 V_2$$

Quá trình (4) – (1) đẳng tích:

$$Q_{41} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (T_4 - T_1) = \frac{i}{2} V_1 (P_4 - P_1)$$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow P_1 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = 0,0557 P_2$$

$$P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma \Rightarrow P_4 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma = 0,1094 P_2$$

$$\Rightarrow Q_{41} = -0,455 P_2 V_2$$

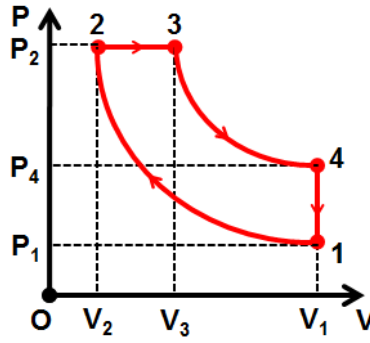
$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{-Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{0,455}{\frac{5}{4}} = 63,6 \text{ (\%)}$$

Homework 5: An ideal gas ($i = 3$) is used as the working substance in a heat engine cycle, as shown in the figure. In this cycle:

- Processes (1-2) and (3-4) are adiabatic processes
- Process (2-3) is an isobaric expansion
- Process (4-1) is an isochoric (constant volume) compression
- The gas in state (1) has a temperature of $t_1 = 27^\circ\text{C}$ and volume V_1 . In state (2), the volume is V_2 . In state (3), the volume is V_3 . Given $V_1 = 4\sqrt{2}V_2$ and $V_3 = 1,5V_2$.

a) Determine the temperatures T_2 , T_3 , T_4 at the respective states.

b) Calculate the thermal efficiency of this heat engine.



Answer

$$a) \gamma = \frac{2}{i} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

Process (1 → 2) adiabatic process: $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow T_2 = 300 (4\sqrt{2})^{\frac{5}{3}-1} = 952,44 \text{ (K)}$$

Process (2 → 3) isobaric process:

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = 1,5 T_2 = 1,5 \cdot 952,44 = 1428,66 \text{ (K)}$$

Process (3 → 4) adiabatic process: $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} = T_3 \left(\frac{1,5 V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = T_3 \left(\frac{1,5}{4\sqrt{2}} \right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow T_4 = 589,66 \text{ (K)}$$

b) Process (1 → 2) and (3 → 4) adiabatic process: $Q_{12} = Q_{34} = 0$

Process (2 → 3) isobaric process: $Q_{23} = \left(\frac{i}{2} + 1 \right) \frac{m}{\mu} R (T_3 - T_2)$

$$Q_{23} = \left(\frac{i}{2} + 1\right)P_2(V_3 - V_2) = \frac{5}{4}P_2V_2$$

Process (4 → 1) isochoric process:

$$Q_{41} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R(T_4 - T_1) = \frac{i}{2} V_1(P_4 - P_1)$$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow P_1 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = 0,0557 P_2$$

$$P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma \Rightarrow P_4 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma = 0,1094 P_2$$

$$\Rightarrow Q_{41} = -0,455 P_2 V_2$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{-Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{0,455}{\frac{5}{4}} = 63,6 \text{ (\%)}$$