
CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade Convocatoria extraordinaria 2023

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos), de los que puede realizar un MÁXIMO DE 3 combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, sólo se corregirán los tres primeros realizados.

EXERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz $A = (2\ a\ a\ 0\ 2\ -1\ 1\ 1\ 0)$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

Resolución

det A = –a – 2a + 2 = 2 – 3a = 0 ⇔ $a = \frac{2}{3}$. Luego, A tiene inversa para $a \neq \frac{2}{3}$

b) Para a = 1, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A.

Resolución

Para a = 1, $A = (2\ 1\ 1\ 0\ 2\ -1\ 1\ 1\ 0)$ y sabemos por a) que A tiene inversa. Además, det A = 2 – 3.1 = –1

$A^{-1} = \frac{1}{\det det\ A}(adj\ A)^t = \frac{1}{-1}(1\ -1\ -2\ 1\ -1\ -1\ -3\ 2\ 4)^t = -(1\ 1\ -3\ -1\ -1\ 2\ -2\ -1\ 4) = (-1\ -1\ 3\ 1\ 1\ -2\ 2\ 1\ -4)$

c) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo:
$\{2x + y + z = 2\ 2y - z = -1\ x + y = 1$

Resolución

Llamamos $A = (2\ 1\ 1\ 0\ 2\ -1\ 1\ 1\ 0)$, $X = (x\ y\ z)$ y $b = (2\ -1\ 1)$. Queda el sistema AX = b

det A = –1 – 2 +2 = –1 ≠ 0, ∃ A^{-1}. Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, $A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}b$.

$X = A^{-1}b = (-1\ -1\ 3\ 1\ 1\ -2\ 2\ 1\ -4)(2\ -1\ 1) = (2\ -1\ -1)$. Por tanto, la solución es x = 2, y = z = –1

EXERCICIO 2. Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm. Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg

a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas.

b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?

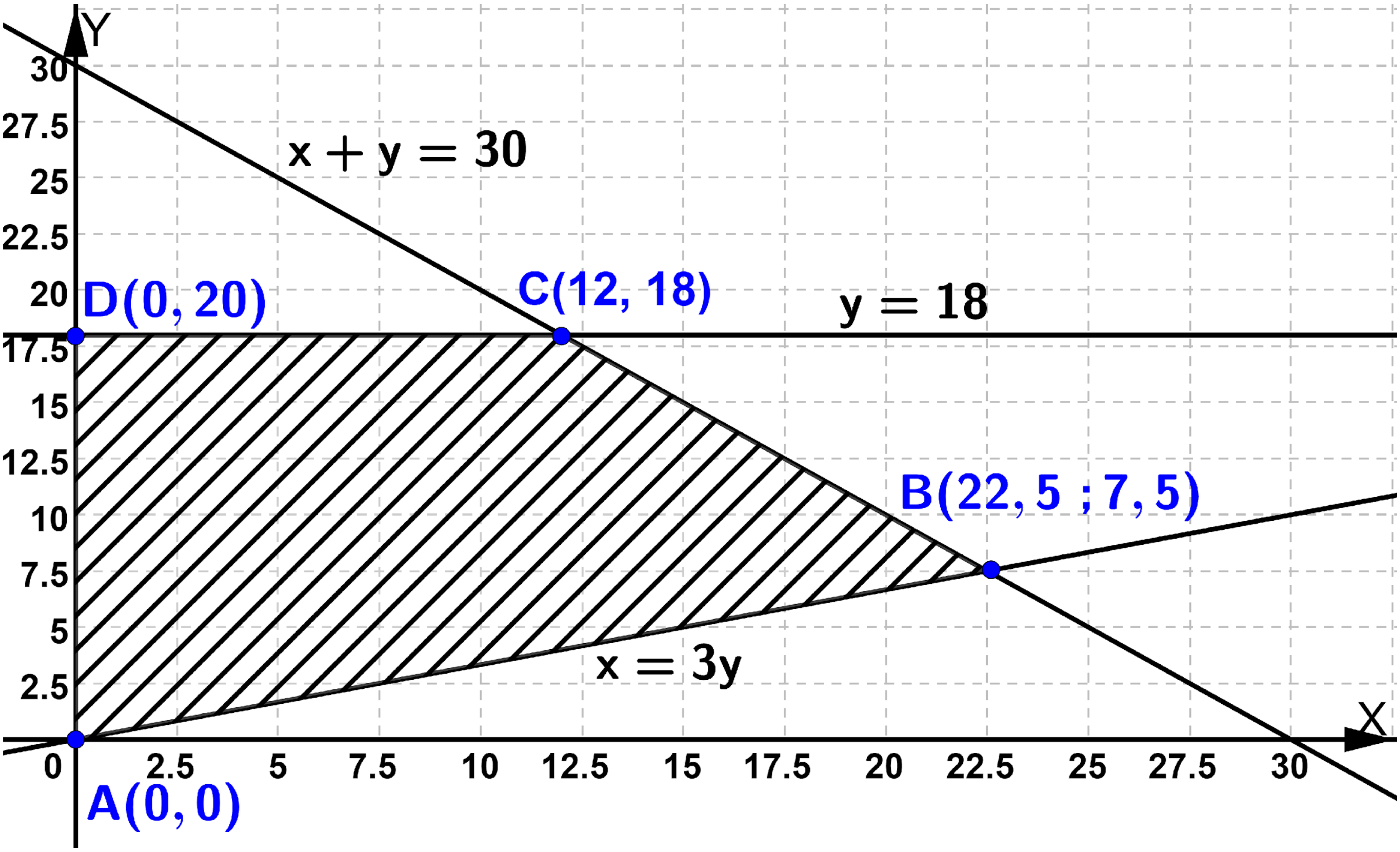
Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de Tm	ingresos (en €)
jureles	x	5000x
caballas	y	6000y
total	x + y	5000x + 6000y

Función a optimizar (maximizar): beneficio, f(x, y) = 5000x + 6000y. Restricciones:
$\begin{cases} x + y \leq 30 \\ x \leq 3y \\ y \leq 18 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

La región factible (solución del sistema de inecuaciones) es



Veamos en qué vértice alcanza el valor máximo el beneficio f(x, y) = 5000x + 6000y

f(A) = f(0, 0) = 5000.0 + 6000.0 = 0 f(B) = f(22,5 ; 7,5) = 5000.22,5 + 6000.7,5 = 157 500

f(C) = f(12, 18) = 5000.12 + 6000.18 = 168 000 f(D) = f(0, 20) = 5000.0 + 6000.20 = 120 000

Luego, el beneficio máximo es 168 000 € y se obtiene pescando 12 Tm de jurel y 18 Tm de caballa

c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

Resolución

Las normas (restricciones) son $\begin{cases} x + y \leq 30 \\ x \leq 3y \\ y \leq 18 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$. Veamos si el punto (20, 6) las cumple:

$\begin{cases} 20 + 6 = 26 \leq 30 \ \ (\textit{la cumple}) \\ 20 \leq 3.6 \ \ (\textit{NO la cumple}) \\ 6 \leq 18 \ \ (\textit{la cumple}) \\ 20 \geq 0 \ ,\ \ 6 \geq 0 \ \ (\textit{las cumple}) \end{cases}$.

Luego, no cumple todas las normas, porque no cumple la 2ª restricción.

EXERCICIO 3. Análisis. El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función
$N(t) = \{ 8 - t(t - 2),\ si\ 0 \le t \le 3\ 2t - 1,\ si\ 3 < t \le 5$, donde t es el tiempo transcurrido en meses
a) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden.

Resolución

Para t ≠ 3, la función N(t) es continua y derivable (por ser polinómica) ,
$N'(t) = \{ 2 - 2t,\ si\ 0 \le t < 3\ 2,\ si\ 3 < t \le 5$

$N(t) = N(3) = 8 - 3(3 - 2) = 5 = N(t) = 2.3 - 1 = 5$ ⇒ N(t) es continua en t = 3.

$N'(t) = 2 - 2.3 = -4 \ne N'(t) = 2$ ⇒ N(t) NO es derivable en t = 3.

N´(t) = 0 ⇔ 0 ≤ t < 3 y 2 – 2t = 0. O sea, para t = 1. Hagamos una tabla de signos de N´(t):

	(0, 1)	1	(1, 3)	3	(3 , 5)
N´(t)	+	0	–	∄	+
N(t)	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

N(t) es creciente en (0, 1) ∪ (3, 5) y decreciente en (1, 3)

Es decir, el número de ejemplares vendidos crece el primer mes luego decrece hasta el tercer mes y luego crece otra vez hasta al 5º mes

Máximo relativo: $t = 1,\ N(1) = 8 - 1(1 - 2) = 9$, punto (1, 9)

Mínimo relativo: $t = 3,\ N(3) = 5$, punto (3, 5)

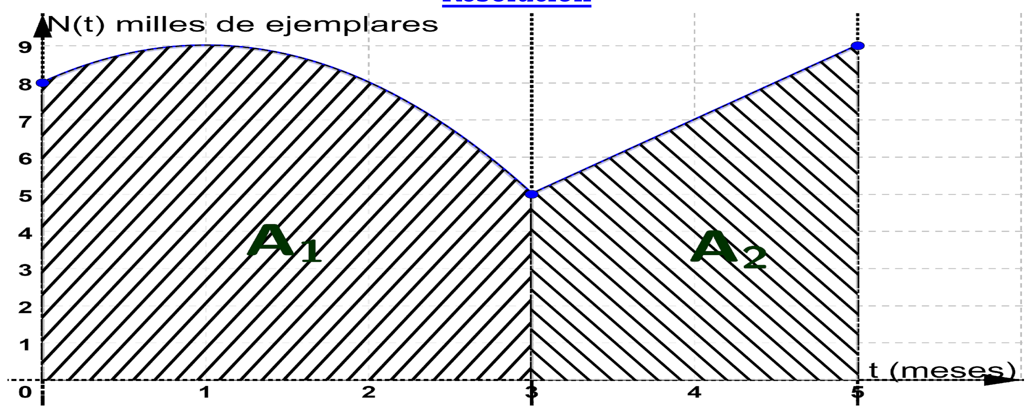
Además, $N(0) = 8 - 0(0 - 2) = 8$ y $N(5) = 2.5 - 1 = 9$

El máximo número de ventas es de 9000 ejemplares y se da en los meses 1 y 5

El mínimo número de ventas es de 5000 ejemplares y se da en el mes 3.

b) Represente gráficamente la función N(t). Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función N(t), el eje de abscisas y las rectas t = 0 y t = 5.

Resolución



El área que se pide es $A = A_1 + A_2 = \int_0^3 (8 - t^2 + 2t)dt + \int_3^5 (2t - 1)dt$. Una primitiva de $(8 - t^2 + 2t)$ es $p(t) = 8t - \frac{t^3}{3} + t^2 = \frac{24t - t^3 + 3t^2}{3}$ y de $(2t - 1)$, $q(t) = t^2 - t$. Por Barrow,

$$A = p(3) - p(0) + q(5) - q(3) = \frac{24.3 - 3^3 + 3.3^2}{3} - \frac{24.0 - 0^3 + 3.0^2}{3} + 5^2 - 5 - \left(3^2 - 3\right) = \frac{72}{3}$$

EXERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$

a) Calcule los valores del parámetro "a" para que f(x) tenga un punto crítico en $x_0 = 3$

Resolución

$f'(x) = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a^2}{ax^2}$. Por tener un punto crítico en $x_0 = 3$, $0 = f'(3) = \frac{3^2 - a^2}{a3^2} = \frac{9 - a^2}{9a}$

Por tanto, $9 - a^2 = 0$ y, entonces, $a = \pm 3$

b) Para a = 3, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

Resolución

Para a = 3, $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$; $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{3x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Hagamos una tabla de signos de f´(x):

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f´(x)	+	0	–	∄	–	0	+
f(x)	creciente	máximo	decreciente	∄	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(-3, 3) - \{0\}$.

Máximo relativo: $x = -3$, $y = f(-3) = \frac{-3}{3} + \frac{3}{-3} = -2$, punto (–3, –2)

Mínimo relativo: $x = 3$, $y = f(3) = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = 2$, punto (3, 2)

$f''(x) = \frac{2x\left(3x^2\right) - \left(x^2 - 9\right)6x}{9x^4} = \frac{6}{x^3} \neq 0$. Hagamos una tabla de signos de f´´(x):

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f´´(x)	–	∄	+
f(x)	cóncava	∄	convexa

f es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, +\infty)$. No hay inflexión porque ∄ f(0)

EXERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna B hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna B. Se extrae una bola al azar,

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

b) Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna A?

Resolución

A = salir un nº < 3 = sacar bola de la urna A B = salir un nº ≥ 3 = sacar bola de la urna B

R = sacar bola roja   V = sacar bola verde

a) Se pide p(R). Usamos el teorema de probabilidad total

$$p(R) = p(A).\ p(R/A) + p(B).\ p(R/B) = \frac{2}{6}\ \frac{6}{14} + \frac{4}{6}\ \frac{5}{9} = \frac{97}{189} \cong 0,5132 = 51,32\%$$

b) Se pide $p\left(\frac{A}{V}\right)$. Usamos el teorema de Bayes.

$$p\left(\frac{A}{V}\right) = \frac{p(A\cap V)}{p(V)} = \frac{p(A).\ p(V/A)}{p(A).\ p(V/A) + p(B).\ p(V/B)} = \frac{\frac{2}{6}\ \frac{8}{14}}{\frac{2}{6}\ \frac{8}{14} + \frac{4}{6}\ \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{92}{189}} = \frac{9}{23} \cong 0,3913 = 39,13\%$$

c) ¿Son independientes los sucesos "extraer bola roja" y "la bola procede de la urna A"?

Resolución Como $p(R/A) = \frac{6}{14} \neq p(R) = \frac{97}{189}$, entonces R y A son dependientes

EXERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica σ = 300 €. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552 € e 1748 €
a) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior?

Resolución

X = salario (en €), $X \rightarrow N(\mu, 300)$, σ = 300. El intervalo de confianza a nivel de confianza n_c para estimar el salario medio, μ, es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (1552,\ \ 1748)$, siendo $\overline{x}$ la media de la muestra de tamaño n = 36, $E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

El error es la mitad de la amplitud del intervalo ⇒

$$E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2}.\frac{300}{\sqrt{36}} = 50\ z_{\alpha/2} = \frac{1748 - 1552}{2} = 98$$

Despejando, $z_{\alpha/2} = \frac{98}{50} = 1,96$. Sabemos que $p\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = \frac{1+n_c}{2} \Rightarrow p(Z < 1,96) = 0,975 = \frac{1+n_c}{2}$

Luego, el nivel de confianza es $n_c = 2\ .\ 0,975 - 1 = 0,95 = 95\%$

b) Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es μ = 1650 €, ¿cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 €?

Resolución

Sabemos, por el teorema central del límite que si $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$ y $\overline{X}$= media de las muestras de tamaño n, entonces $\overline{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. En este caso $\mu = 1650$; $n = 36$ y $\sigma = 300$.

Sustituyendo, $\overline{X} \rightarrow N\left(1650 \,;\, \frac{300}{\sqrt{36}}\right) = N(1650,\ 50)$. Luego, la variable $Z = \frac{\overline{X} - 1650}{50} \rightarrow N(0,\ 1)$

Nos piden
$p(\overline{X} > 1590) = p\left(\frac{\overline{X} - 1650}{50} > \frac{1590 - 1650}{50}\right) = p(Z > -1,2) = p(Z < 1,2) = 0,8849 = 88,49\%$