تعريف: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b = ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a .

نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b

خاصية1: a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a/b و b/c فإن a/c

خاصية2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a/b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a/mb

خاصية3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a/b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma/mb

تمرين محلول1: عين الأعداد الصحيحة n حيث :

$n+5$ يقسم 11

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العدد الصحيح a يقسم عبارة $f(n)$ نستعمل تعريف قابلية القسمة

الحل:

$n+5$ يقسم 11 إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $n+5=11k$. و منه $n=11k-5$.

الحلول هي الأعداد الصحيحة من الشكل $11k-5$ مع k عدد صحيح وهي قيم n المطلوبة .

تمرين محلول2:

عين الأعداد الصحيحة n حيث : $3n+5$ يقسم 8

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العبارة $f(n)$ تقسم العدد الصحيح a نساوي بين $f(n)$ و قواسم a .

الحل:

مجموعة قواسم 8 هي $\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$.

$3n+5$ يقسم 8 معناه $3n+5=-8$ أو $3n+5=-4$ أو $3n+5=-2$ أو $3n+5=-1$ أو $3n+5=1$ أو $3n+5=2$ أو $3n+5=4$ أو $3n+5=8$.

أي $3n=-13$ أو $3n=-9$ أو $3n=-7$ أو $3n=-6$ أو $3n=-4$ أو $3n=-3$ أو $3n=-1$ أو $3n=3$.

المعادلات $3n=-13$ ، $3n=-7$ ، $3n=-4$ و $3n=-1$ ليس لها حلول .

الحلول هي الأعداد الصحيحة -3 ، -2 ، -1 ، 1 .

تمرين محلول3:

عين الأعداد الصحيحة n حيث : $3n+8$ يقسم $n+6$

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العبارة $f(n)$ تقسم العبارة $g(n)$ نرجع المسألة إلى أن عبارة $h(n)$ تقسم عددا صحيحا a .

الحل:

ليكن n عدد صحيح حيث $3n+8$ يقسم $n+6$.ومنه $3n+8$ يقسم $3n+18$. و بالتالي $3n+8$ يقسم $(3n+18)-(3n+8)$ أي $3n+8$ يقسم 10 . مجموعة قواسم 10 هي $\{-10;-5;-2;-1;1;2;5;10\}$.

$3n+8$ يقسم 10 معناه $3n+8=-10$ أو $3n+8=-5$ أو $3n+8=-2$ أو $3n+8=1$ أو $3n+8=2$ أو $3n+8=5$ أو $3n+8=10$.

أي $3n=-18$ أو $3n=-13$ أو $3n=-10$ أو $3n=-9$ أو $3n=-7$ أو $3n=-3$ أو $3n=2$.

و منه $n=-6$ أو $n=-3$ أو $n=-1$

عكسيا هذه الأعداد حلولا (يكفي التعويض في $3n+8$ و $n+6$ والتأكد في كل مرة من أن $3n+8$ يقسم $n+6$).

الحلول هي الأعداد الصحيحة -6 ، -3 ، -1 .

خاصية4: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.

إذا كان a/b و a/c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n ، a يقسم $mb+nc$

القسمة الإقليدية في ℤ

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0 \leq r < b$