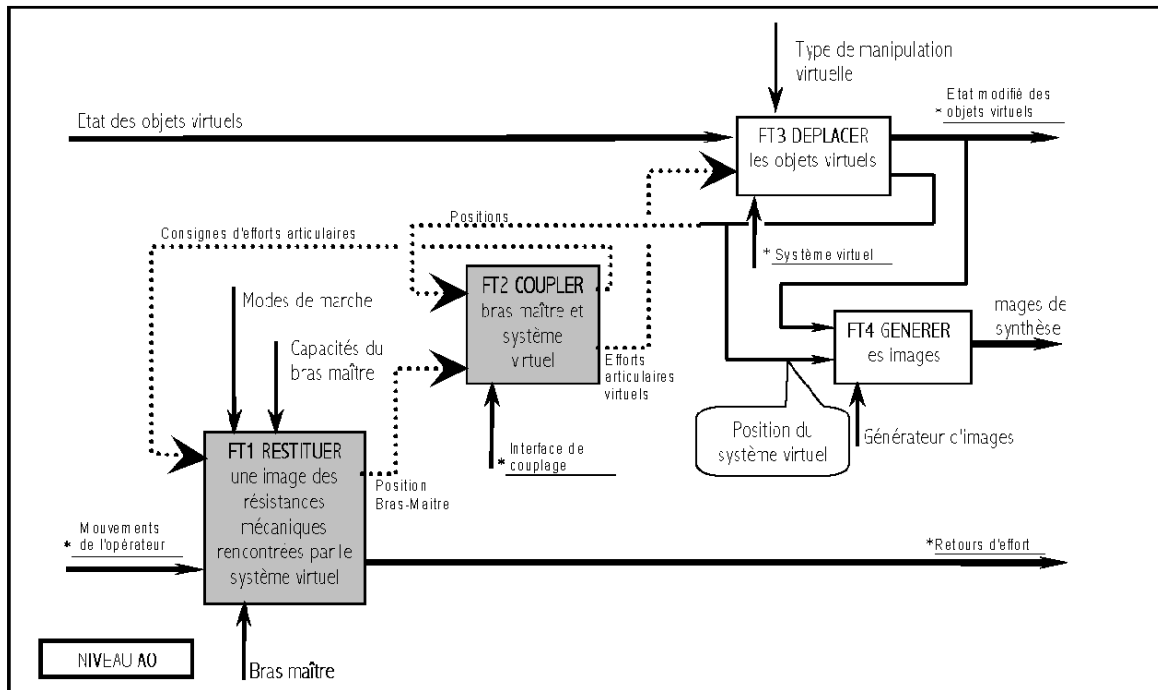


Corrigé UPSTI 2007 Mines-Ponts MP

Question 1

Remarque sur l'énoncé : inverser A0 et A-0.

A partir des figures 1.1 et 1.2 :



Question 2

a. Les poulies étant de même diamètre :

- le système constitué des poulies 1 et 4 impose $\omega_{4/2} = \omega_{1/2}$ et donc $\vec{\Omega}(4/1) = \vec{0}$,
- le système constitué des poulies 4 et 5 impose $\omega_{5/3} = \omega_{4/3}$ et donc $\vec{\Omega}(5/4) = \vec{0}$.

Le dispositif impose bien $\vec{\Omega}(5/1) = \vec{0}$, c'est-à-dire un mouvement de translation dans le plan $(\vec{k}_{01}, \vec{i}_1)$ (le point D du solide 5 est astreint à rester dans le plan $(B, \vec{k}_{01}, \vec{i}_1)$).

b. Le torseur cinématique de la liaison équivalente est de la forme :

$$\mathbf{V}(5/1)_D = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u\vec{i}_1 + w\vec{k}_{01} \end{Bmatrix}$$

Dans l'hypothèse de liaison parfaite, la puissance des actions mutuelles entre 5 et 1 est nulle quels que soient les mouvements autorisés par la liaison.

$$\mathbf{F}(1 \rightarrow 5)_D = \begin{Bmatrix} X\vec{i}_1 + Y\vec{j}_{123} + Z\vec{k}_{01} \\ Li_1 + Mj_{123} + Nk_{01} \end{Bmatrix}$$

Le torseur d'action mécanique de 1 sur 5 est noté :

$$P(1 \leftrightarrow 5) = \mathbf{F}(1 \rightarrow 5) \otimes \mathbf{V}(5/1) = u.X + w.Z = 0 \quad \forall u, w$$

Donc $X=Z=0$

$$\mathbf{F}(1 \rightarrow 5)_D = \begin{Bmatrix} Y\vec{j}_{123} \\ Li_1 + Mj_{123} + Nk_{01} \end{Bmatrix}$$

Le torseur d'action mécanique de 1 sur 5 est de la forme :

La fonction FT122 est respectée dans la mesure où la relation établie à la question 2a reste licite (pas de glissement du câble sur la poulie, câbles inextensibles ...).

Question 3

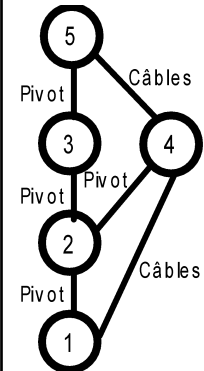
Remarque préliminaire :

La résultante de l'action de 4 sur 5 (lié par deux câbles) a la direction de la droite (CD).

$$\text{Donc} \quad \vec{M}_C(4 \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} = \vec{M}_D(4 \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} \quad (1)$$

$$\text{De même} \quad \vec{M}_B(1 \rightarrow 4) \cdot \vec{j}_{123} = \vec{M}_C(1 \rightarrow 4) \cdot \vec{j}_{123} \quad (2)$$

Graphe de liaisons



PFS appliqué à 4 (Moment en C en projection sur $\vec{j}_{123}$)

$$\vec{M}_C(2 \rightarrow 4) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_C(1 \rightarrow 4) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_C(5 \rightarrow 4) \cdot \vec{j}_{123} = 0$$

Le premier terme est nul, car la liaison pivot d'axe $(C, \vec{j}_{123})$ entre 2 et 4 est parfaite.
Avec les équations (1) et (2) :

$$\vec{M}_B(1 \rightarrow 4) \cdot \vec{j}_{123} = \vec{M}_D(4 \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} \quad (3)$$

PFS appliqué à 5 (Moment en D en projection sur $\vec{j}_{123}$)

$$\vec{M}_D(3 \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_D(4 \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_D(\text{pesanteur} \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} = 0$$

Le premier terme est nul, car la liaison pivot d'axe $(D, \vec{j}_{123})$ entre 3 et 5 est parfaite.
Avec l'équation (1) :

$$\vec{M}_C(4 \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_D(\text{pes} \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} = 0 \quad (4)$$

PFS appliqué à {3,5} (Moment en C en projection sur $\vec{j}_{123}$)

$$\vec{M}_C(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_C(4 \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_C(\text{pes} \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_C(\text{pes} \rightarrow 3) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_C(\text{equ} \rightarrow 3) \cdot \vec{j}_{123} = 0$$

Le premier terme est nul, car la liaison pivot d'axe $(C, \vec{j}_{123})$ entre 2 et 3 est parfaite.
Avec l'équation (4) :

$$C_{equ3} = -[\overrightarrow{CD} \wedge \vec{R}(\text{pes} \rightarrow 5)] \cdot \vec{j}_{123} - \vec{M}_C(\text{pes} \rightarrow 3) \cdot \vec{j}_{123} \quad (5)$$

PFS appliqué à {2,3,4,5} (Moment en B en projection sur $\vec{j}_{123}$)

$$\vec{M}_B(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_B(1 \rightarrow 4) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_B(\text{pes} \rightarrow 5) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_B(\text{pes} \rightarrow 3) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_B(\text{pes} \rightarrow 2) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_B(\text{equ} \rightarrow 3) \cdot \vec{j}_{123} + \vec{M}_B(\text{equ} \rightarrow 2) \cdot \vec{j}_{123} = 0$$

Le premier terme est nul, car la liaison pivot d'axe $(B, \vec{j}_{123})$ entre 1 et 2 est parfaite.

Avec les équations (3), (4) :

$$\begin{aligned} & [\overrightarrow{BD} \wedge \vec{R}(pes \rightarrow 5)]_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(pes \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(pes \rightarrow 2)_{\vec{j}_{123}} \\ & + \vec{M}_B(equ \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(equ \rightarrow 2)_{\vec{j}_{123}} = 0 \end{aligned}$$

Avec l'équation (5)

$$Céqu2 = -[\overrightarrow{BC} \wedge \vec{R}(pes \rightarrow 5)]_{\vec{j}_{123}} - [\overrightarrow{BC} \wedge \vec{R}(pes \rightarrow 3)]_{\vec{j}_{123}} - \vec{M}_B(pes \rightarrow 2)_{\vec{j}_{123}} \quad (6)$$

Question 4

Remarque sur l'énoncé : l'hypothèse concernant l'équilibrage statique a une formulation incorrecte, je l'ai ignoré dans ce corrigé.

En prenant en compte les actions de l'opérateur et des réducteurs :

- Les équations (1), (2) et (3) restent inchangées.
- L'équation (4) devient :

$$\vec{M}_C(4 \rightarrow 5)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_D(pes \rightarrow 5)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_D(Op \rightarrow 5)_{\vec{j}_{123}} = 0 \quad (7)$$

PFS appliqué à {3,5} (Moment en C en projection sur $\vec{j}_{123}$)

$$\begin{aligned} & \vec{M}_C(2 \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_C(4 \rightarrow 5)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_C(pes \rightarrow 5)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_C(pes \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} \\ & + \vec{M}_C(equ \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_C(Op \rightarrow 5)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_C(Réd_3 \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} = 0 \end{aligned}$$

Le premier terme est nul, car la liaison pivot d'axe $(C, \vec{j}_{123})$ entre 2 et 3 est parfaite.

Avec l'équation (7) :

$$[\overrightarrow{CD} \wedge \vec{R}(pes \rightarrow 5)]_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_C(pes \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} + Céqu3 + [\overrightarrow{CD} \wedge \vec{R}(Op \rightarrow 5)]_{\vec{j}_{123}} + Cq3 = 0$$

Avec l'équation (5) :

$$\begin{aligned} Cq3 &= -[\overrightarrow{CD} \wedge \vec{R}(Op \rightarrow 5)]_{\vec{j}_{123}} \\ Cq3 &= (L_3 \sin q_{23} \cos q_1)F_x + (L_3 \sin q_{23} \sin q_1)F_y + (L_3 \cos q_{23})F_z \end{aligned} \quad (8)$$

PFS appliqué à {2,3,4,5} (Moment en B en projection sur $\vec{j}_{123}$)

$$\begin{aligned} & \vec{M}_B(1 \rightarrow 2)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(1 \rightarrow 4)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(pes \rightarrow 5)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(pes \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} \\ & + \vec{M}_B(pes \rightarrow 2)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(equ \rightarrow 2)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(equ \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} \\ & + \vec{M}_B(Op \rightarrow 5)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(Réd_2 \rightarrow 2)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(Réd_3 \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} = 0 \end{aligned}$$

Le premier terme est nul, car la liaison pivot d'axe $(B, \vec{j}_{123})$ entre 1 et 2 est parfaite.

Avec les équations (3) et (7) :

$$\begin{aligned} & [\overrightarrow{BD} \wedge \vec{R}(pes \rightarrow 5)]_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(pes \rightarrow 3)_{\vec{j}_{123}} + \vec{M}_B(pes \rightarrow 2)_{\vec{j}_{123}} \\ & + Céqu2 + Céqu3 + [\overrightarrow{BD} \wedge \vec{R}(Op \rightarrow 5)]_{\vec{j}_{123}} + Cq2 + Cq3 = 0 \end{aligned}$$

Avec les équations (5), (6) et (8) :

$$\begin{aligned} Cq2 &= -[\overrightarrow{BC} \wedge \vec{R}(Op \rightarrow 5)]_{\vec{j}_{123}} \\ Cq2 &= (L_2 \sin q_2 \cos q_1)F_x + (L_2 \sin q_2 \sin q_1)F_y + (L_2 \cos q_2)F_z \end{aligned} \quad (9)$$

PFS appliqué à {1,2,3,4,5} (Moment en B en projection sur $\vec{k}_{01}$)

$$Cq1 = -\left[\vec{BO} \wedge \vec{R}(Op \rightarrow 5)\right]_{\vec{k}_{01}}$$

$$Cq1 = (L_3 \cos q_{23} + L_2 \cos q_2 + L_5)(\sin q_1 F_x - \cos q_1 F_y) \quad (10)$$

Il est déduit la matrice :

$$[J_{art}] = \begin{bmatrix} (L_3 \cos q_{23} + L_2 \cos q_2 + L_5) \sin q_1 & -(L_3 \cos q_{23} + L_2 \cos q_2 + L_5) \cos q_1 & 0 \\ L_2 \sin q_2 \cos q_1 & L_2 \sin q_2 \sin q_1 & L_2 \cos q_2 \\ L_3 \sin q_{23} \cos q_1 & L_3 \sin q_{23} \sin q_1 & L_3 \cos q_{23} \end{bmatrix}$$

Question 5

Le réducteur (Réd1) a un rapport r_{01} (négatif) (donc $\omega_{1/0} = r_{01}\omega_{m1/0}$) et si les effets d'inertie et les frottements sont négligés : $C_{m1} = -r_{01}C_{q1}$

$$[J_{red}] = \begin{bmatrix} -r_{01} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -r_{23} \end{bmatrix}$$

Avec des équations similaires associées aux autres réducteurs :

Question 6

La matrice $[J] = [J_{red}][J_{art}]$

Question 7

L'effort sur la main de l'opérateur est $[F] = [J^{-1}][C_m]$:

$$F_x = \frac{2,215}{r_{12}}C_{m2} - \frac{3,378}{r_{23}}C_{m3}$$

$$F_y = \frac{1,852}{r_{01}}C_{m1}$$

$$F_z = -\frac{1,852}{r_{12}}C_{m2}$$

Les valeurs absolues de F_x , F_y et F_z sont supérieures à 40N (avec $C_{m1}=C_{m2}=C_{m3}=0,955\text{Nm}$) si :

$$r_{01} > -4,4 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad r_{12} = r_{23} > -2,8 \cdot 10^{-2}$$

Ou plus naturellement :

$$|r_{01}| < 4,4 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad |r_{12}| = |r_{23}| < 2,8 \cdot 10^{-2}$$

Question 8

Remarque sur l'énoncé : Le niveau 2 de la fonction FT1.2.6 n'est pas très compréhensible dans la mesure où l'on impose tous les couples moteurs égaux à 1 Nm. Peut-être fallait-il

interpréter cet ellipsoïde comme la quadrique d'équation $\| [F] \|^2 = {}^t[C_m][MF][C_m]$ (les C_{mi}

étant les coordonnées des points de l'ellipsoïde et $\| [F] \|^2$ étant constant). Un ellipsoïde le plus proche possible d'une sphère montre la capacité du mécanisme à appliquer un effort dans n'importe quelle direction sans solliciter excessivement un moteur pour une direction particulière.

a. $\| [F] \|^2 = {}^t[F][F] = {}^t([J^{-1}][C_m])([J^{-1}][C_m]) = {}^t[C_m]({}^t[J^{-1}][J^{-1}])[C_m]$

donc $[MF] = {}^t[J^{-1}][J^{-1}] = ({}^t[J])^{-1} \cdot [J^{-1}] = ({}^t[J][J])^{-1}$

b. Les demi-axes de l'ellipsoïde sont notés a_i et les termes diagonaux de la matrice I_i .

$$I_i = \frac{1}{a_i^2}$$

donc $a_1=0,24 \text{ m}$ $a_2=0,54 \text{ m}$ $a_3=0,67 \text{ m}$

Le niveau d'exigence de la fonction FT1.2.6 serait donc respecté.

Question 9

A partir du schéma bloc (Figure 4.2), sont déduites les équations :

$$\begin{cases} Q_1(p) = G_1(p).C_{op}(p) - G_2(p).(b_m.p + k_m).\Delta Q(p) \\ Q_v(p) = H_v(p).(b_v.p + k_v).\Delta Q(p) \\ \Delta Q(p) = Q_1(p) - Q_v(p) \end{cases}$$

D'où la fonction de transfert :

$$H_m(p) = \frac{Q_v(p)}{C_{op}(p)} = \frac{H_v(p).(b_v.p + k_v).G_1(p)}{1 + H_v(p).(b_v.p + k_v) + G_2(p).(b_m.p + k_m)}$$

Remarque sur l'énoncé (questions 9b, 9c et 9d): La forme à retour unitaire proposée à la figure 4.3 n'a pas une sortie et une entrée homogènes. La fonction H_0 ne peut pas être déterminée, à moins d'introduire un bloc dans la chaîne de retour de gain $K=1 \text{ N.m.rad}^{-1}$.

Question 10

L'opérateur délivre un échelon de couple $C_{op}(t) = C_0.u(t)$ avec $C_0=1 \text{ Nm}$.

En régime permanent la sortie est :

$$q_{v0} = \lim_{t \rightarrow \infty} (q_v(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p.Q_v(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p.H_m(p). \frac{C_0}{p} \right) = K_v \frac{k_v}{k_m} C_0$$

Avec K_v : gain statique de la fonction de transfert $H_v(p)$ $K_v=4 \text{ rad.N}^{-1}.\text{m}^{-1}$

La raideur est donc :

$$R = \frac{C_0}{q_{v0}} = \frac{k_m}{K_v.k_v}$$

Pour satisfaire la fonction FT2 ($R > 20 \text{ N.m.rad}^{-1}$) :

$$\frac{k_m}{k_v} > 80$$

Question 11

- La fonction $H_m(p)$ est d'ordre 3 (le développement de la fonction $H_m(p)$ fait apparaître un dénominateur de degré 3). Ce résultat est confirmé par les diagrammes de Bode de la fonction $H_m(j\omega)$ (asymptote du diagramme de gain à haute fréquence de pente -60 dB/dec, asymptote du diagramme de phase à haute fréquence à -270 degrés). Cependant la fonction de transfert $H_m(p)$ étant un modèle simplifié (d'après l'énoncé), la réponse harmonique du système réel pourrait être très différente pour les hautes fréquences.
Un système d'ordre 3 peut être instable.
- Si tel est le cas, la position de l'objet virtuel divergerait. En pratique plusieurs comportements peuvent apparaître : arrivée en « butée » du système (mécanique ou logiciel), ou oscillations avec saturation de certains composants ...
- A partir des graphes fournis, il est possible de conclure que le système est stable :
 - Critère du revers vérifié sur le diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte,
 - Réponse indicielle convergente.

Question 12

La pulsation de coupure à -3dB est lue sur le « zoom » des diagrammes de Bode de la fonction $H_m(j\omega)$.

$$\omega_c = 180 \text{ rad/s} \text{ et donc } f_c = 28,6 \text{ Hz}$$

Le critère de bande passante est vérifié.