

Géophysique de la planète Terre

Centrale MP 2018 – physique chimie 2

I. Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

- 1) Les forces électrostatique et de gravitation s'écrivent respectivement $\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{M_1 M_2^3}$ et $\vec{F}_{grav} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{M_1 M_2^3}$, d'où

$$\text{l'analogie } q_i \leftrightarrow m_i, \epsilon_0 \leftrightarrow -4\pi G, \vec{E} = \vec{G}$$

Enoncé du théorème de Gauss gravitationnel : le flux du champ gravitationnel à travers toute surface fermée est égal à la masse intérieure à la surface multipliée par $-4\pi G$.

$$\oint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

- 2) Par symétrie et invariances $\vec{G}_T = f(r)\vec{e}_r$. L'application du théorème de Gauss à une sphère de centre C et de rayon $R > R_T$ conduit à $\vec{G}_T = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{e}_r$.

- 3) Avec $r = R_T + z$, on a l'intensité du champ qui vaut $G(z) = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right)$ avec $\frac{z}{R_T} \ll 1$.

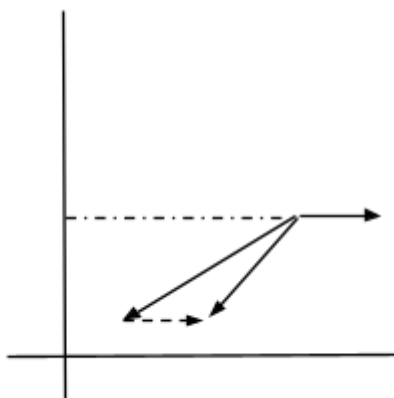
- 4) En notant z_0 l'altitude recherchée, on veut $\frac{G(0)-G(z_0)}{G(0)} = 0,01$ soit $z_0 = \frac{1}{2}0,01R_T$. On trouve numériquement $z_0 = 31,9 \text{ km}$.

- 5) En utilisant la formule approchée, on a $\vec{grad} G(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right) \right) \vec{e}_z = -2\frac{GM_T}{R_T^3} \vec{e}_z$. Le vecteur $\vec{grad} G(z)$ indique la direction et le sens du déplacement associé à la plus grande augmentation de $G(z)$. On retrouve qu'il faut se déplacer vers le centre de la sphère pour voir $G(z)$ augmenter le plus ...

- 6) On a $2\frac{GM_T}{R_T^3} = 3,08 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$. Or $1 \text{ gal.cm}^{-1} = 1,00 \text{ s}^{-2}$, donc $1 \mu\text{gal.cm}^{-1} = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$. On en déduit $2\frac{GM_T}{R_T^3} = 3,08 \mu\text{gal.cm}^{-1}$. Les valeurs de z_0 et de $2\frac{GM_T}{R_T^3}$ montrent qu'une variation de l'altitude z influe très peu sur la valeur du champ gravitationnel.

- 7) Dans ce modèle, le référentiel terrestre est en rotation uniforme autour de l'axe fixe Δ par rapport à un référentiel galiléen, et on a $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM}$, où H est le projeté de M sur Δ . On a $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 R_T \cos \phi \vec{u}$.

- 8) $\vec{P} = m(\vec{G}_T + \omega^2 \vec{HM}) = m\vec{g}$, d'où $\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{e}_r + \omega^2 R_T \cos \phi \vec{u}$.



On voit que $\vec{g}$ ne pointe pas vers le centre de la sphère.

- 9) On peut calculer en $\phi = 0$, le rapport des deux termes apparaissant dans $\vec{g}$: $\varepsilon = \frac{\omega^2 R_T}{GM_T} = \frac{\omega^2 R_T^3}{GM_T^2}$. Pour estimer ω , on peut utiliser que la Terre effectue une rotation propre en approximativement 24 heures (en ne tenant pas compte de la distinction entre jour solaire et jour sidéral), d'où $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, d'où $\varepsilon = 3,4 \cdot 10^{-3}$. L'influence de la latitude sur la valeur de g n'est pas négligeable. Une variation du même ordre pour g nécessiterait, à ϕ constant, une variation d'altitude de $3z_0/10 \approx 10 \text{ km}$.

II. Méthodes de mesure du champ de pesanteur à l'aide de pendules

- 10) Pour un pendule simple, l'application du TMC conduit à $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$. Aux petits angles, on a $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. La mesure de la période $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ permet en théorie de déterminer g si l est connu.
- 11) Cayenne étant plus proche de l'équateur que Paris, on a $g_c < g_p$ (on a vu que l'altitude influait bien moins que la latitude). On a donc $T_c > T_p$. La pendule, juste à Paris, retarde à Cayenne. La variation relative de période est de $\Delta t/T_j$ avec $\Delta t = 2 \text{ min } 28 \text{ s} = 148 \text{ s}$ et $T_j = 24 \times 3600 \text{ s}$. Cette variation relative s'écrit aussi $\frac{T_c - T_p}{T_p} = \sqrt{\frac{g_p}{g_c}} - 1$. On a donc $g_c = \frac{g_p}{\left(1 + \frac{\Delta t}{T_j}\right)^2}$. On trouve numériquement $g_c = 9,78 \text{ m.s}^{-2}$.
- 12) On a pour le pendule simple $g = \frac{l}{4\pi T^2}$. La seule cause d'incertitude étant T , on a de manière relative $\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta T}{T}$. On veut $\Delta g < 1 \mu\text{gal}$, et on peut prendre $T \approx 1 \text{ s}$ en ordre de grandeur, d'où $\Delta T < 5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$. La résolution temporelle devrait être extrêmement précise, ce qui rend le dispositif peu réaliste en pratique (résolution de l'ordre de la taille atomique, pour un système macroscopique).
- 13) Pour un système masse-ressort vertical, on a $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$. On a donc pour une variation Δg , $\Delta l_{eq} = \frac{m\Delta g}{k}$. Par ailleurs, on a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, d'où $\Delta l_{eq} = \Delta g/\omega_0^2$. Pour un système masse-ressort usuel, on peut prendre $T_0 = 2\pi/\omega_0 \approx 1 \text{ s}$, d'où $\Delta l_{eq} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Pour ce dispositif également, la précision nécessaire paraît difficilement atteignable.
- 14) Dans ce dispositif, Δl_{eq} est indépendant de l_0 . Prendre $l_0 = 0$ n'apporte rien.

III. Gravimètre à fléau de LaCoste et Romberg

- 15) Il vaut mieux avoir fait les questions suivantes pour répondre à cette question. Qualitativement, on peut dire que le système mécanique va avoir un mouvement régi par g et les caractéristiques du ressort (k, s, s_0) et du système lui-même (a, b, m, y). Une modification de g entraînera donc une modification du mouvement du système (période propre et/ou position d'équilibre) ce qui pourrait permettre de remonter à g .
- 16) On a $E_p = E_{pp} + E_{elas}$ avec $E_{pp} = mgy_M = -mga \sin \theta$, et $E_{pp} = \frac{1}{2}k(s - s_0)^2$, avec $s = AB$.
- 17) $AB = \left(\vec{AO} + \vec{OB}\right)^{1/2} = \left(\vec{AO} + \vec{OB}\right)^2^{1/2} = \sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta} = s$
- 18) $E_p = -mga \sin \theta + \frac{1}{2}k(s - s_0)^2$, avec $s = s(\theta)$. On a $\Gamma = -\frac{dE_p}{d\theta} = mga \cos \theta - k(s - s_0)\frac{ds}{d\theta}$, et $\frac{ds}{d\theta} = \frac{by \cos \theta}{s}$. On a donc
- $$\Gamma = \cos \theta \left(mga - kby + \frac{ks_0 by}{\sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}} \right)$$
- 19) Pour $s_0 = 0$, on a $\Gamma = \cos \theta (mga - kby)$. On a $\Gamma = 0 \Leftrightarrow g = \frac{kby}{ma}$. Pour $s_0 \neq 0$, l'annulation de Γ conduit à $g = \frac{kby}{ma} \left(1 - \frac{s_0}{s} \right)$. Il est possible de déterminer g , mais il faut mesurer deux grandeurs supplémentaires.
- 20) La nouvelle expression de s s'obtient de même par $s = \left(\vec{AO} + \vec{OB}\right)^2^{1/2}$. On obtient après calcul $s = \sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin(\theta - \phi)}$. On en déduit
- $$E_p = -mga \sin \theta + \frac{1}{2}k \left(\sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin(\theta - \phi)} - s_0 \right)^2$$
- 21) Pour $\phi \neq 0$, la courbe de $E_p'(\phi)$ présente un minimum, il existe donc dans ce cas une position d'équilibre stable, ce qui

n'était pas le cas pour $\phi = 0$.

22) On a $\Gamma' = -\frac{dE_p'}{d\theta} = mga \cos \cos \theta - k(s - s_0) \frac{ds}{d\theta} = mga \cos \cos \theta - k(s - s_0) \frac{yb}{s} \cos \cos (\theta - \phi)$. En prenant $s_0 = 0$, on trouve bien $\Gamma' = \cos \cos \theta (mga - kyb \cos \cos \phi) - kyb \sin \sin \phi \sin \sin \theta$.

23) Pour $\theta \ll 1$, on obtient à l'ordre 1 en θ : $\Gamma' = (mga - kyb \cos \cos \phi) - \theta kyb \sin \sin \phi$. Le TMC appliqué au système conduit à :

$$J \ddot{\theta} + \theta kyb \sin \sin \phi = (mga - kyb \cos \cos \phi)$$

24) L'équation se met sous la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{kyb \sin \sin \phi}{J}}$ et $\theta_0 = \frac{mga - kyb \cos \cos \phi}{kyb \sin \sin \phi}$.

25) $\theta_0 = 0$ pour $g = g_0$ induit $mg_0 a = kyb \cos \cos \phi$. On a alors $\omega_0 = \sqrt{\frac{kyb \sin \sin \phi}{J}} = \sqrt{\frac{g_0}{a} \tan \tan \phi}$. On a $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, d'où

$$\phi = \left(\frac{a}{g_0} \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \right)$$

On a numériquement $\phi = 9,9 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$.

26) On a $\theta_0 = \frac{mga - kyb \cos \cos \phi}{kyb \sin \sin \phi} = \frac{g - g_0}{g_0 \tan \tan \phi}$, pour une variation Δg de g , on a donc $\Delta \theta_0 = \frac{\Delta g}{g_0 \tan \tan \phi}$.

27) Pour $\Delta g = 10 \mu\text{gal} = 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$, on trouve $\Delta \theta_0 = 10^{-4} \text{ rad}$. Cet angle est faible mais tout à fait mesurable. Le dispositif est bien plus sensible que les précédents.

IV. Application à la gravimétrie

28) Pour la sphère seule, on obtient par symétries et invariances $\vec{G}_S = G_S(r) \vec{e}_r$. Le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon $r > R$ donne

$$\vec{G}_S = -\frac{4\pi G R^3 \mu'}{3r^2} \vec{e}_r$$

29) La distribution de masse peut être vue comme la superposition d'une zone homogène de masse volumique μ'_m , d'une sphère de profondeur h , de rayon R , de masse volumique $-\mu'_m$, et d'une sphère de même géométrie de masse volumique μ' . On obtient donc :

$$\vec{G}_B = g_0 \vec{e}_z - \frac{4\pi G R^3 (\mu' - \mu'_m)}{3r^2} \vec{e}_r = g_0 \vec{e}_z - \frac{4\pi G R^3 \Delta \mu}{3r^2} \vec{e}_r$$

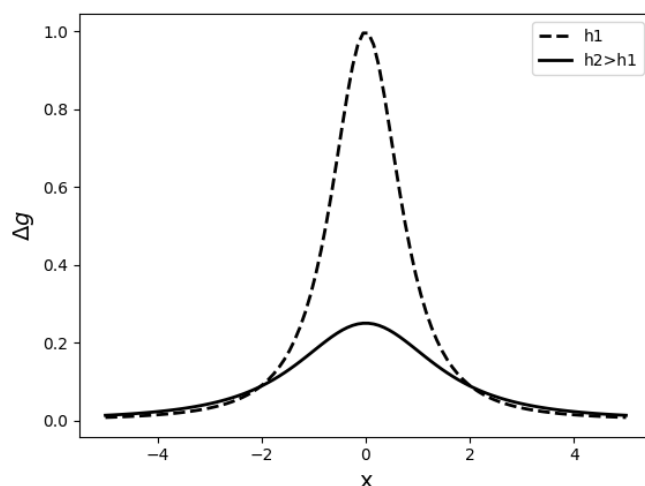
On a donc $g_{Bz} = \vec{G}_B \cdot \vec{e}_z = g_0 + \frac{4\pi G R^3 \Delta \mu}{3r^2} \cos \cos \theta$. On a $\cos \cos \theta = h/r$ et $r = \sqrt{h^2 + x^2}$, d'où

$$g_{Bz} = g_0 + \frac{4\pi G R^3 \Delta \mu}{3} \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

30) D'après le théorème de superposition, $g_{Bz} - g_0$ correspond au champ créé par la sphère de rayon R et de masse volumique $\Delta \mu = \mu' - \mu'_m$.

31) D'après ce qui précède, on a $\Delta g = g_{Bz} - g_0 = \frac{4\pi G R^3 \Delta \mu}{3} \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$.

32) $\Delta g(x)$ est paire, maximale en $x = 0$ et tend vers 0 à l'infini. Sans faire de calcul, on peut dire que pour $h_2 > h_1$, l'anomalie 2 étant plus profonde, $\Delta g_2 < \Delta g_1$. On a le tracé suivant :



33) On pose $f(x) = \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$. On a $f_{max} = f(0) = 1/h^2$, d'où $\Delta g_{max} = \frac{4\pi G R^3 \Delta \mu}{3h^2}$. Pour déterminer la largeur à mi-hauteur, on cherche $x_{1/2}$ tel que $f(x_{1/2}) = f_{max}/2$. On a après calcul $x_{1/2} = h(2^{2/3} - 1)$. La largeur à mi hauteur vaut donc $\Delta x_{1/2} = 2h(2^{2/3} - 1)$. Plus la sphère est profonde et plus sont influence est « diluée » spatialement.

34) Sur le graphique, on lit $x_{1/2} = 60 \text{ cm}$ et $\Delta g_{max} = 0,28 \text{ mgal} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$. On en déduit $h = 78 \text{ m}$ et

$$R = \left(\frac{3\Delta g_{max} h^2}{4\pi G \Delta \mu} \right)^{1/3} = 3,5 \text{ km}.$$

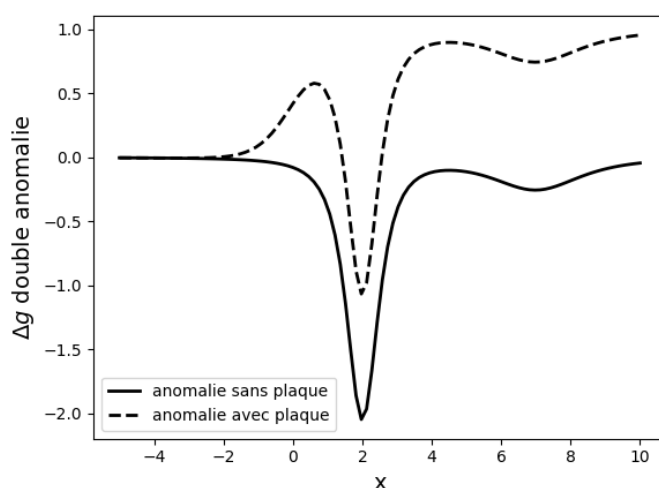
35) On peut stocker l'or si il a une forme sphérique, de rayon R' , centrée sur le centre de la grotte, à condition que la masse de roche correspondant à la grotte soit égale à la masse d'or stockée. En effet, la symétrie sphérique étant respectée, l'application du théorème de Gauss conduit au même champ pour la sphère d'or et la sphère de roche. Il faut donc respecter la relation suivante :

$$R^3 \mu_m = R'^3 \rho_{or}$$

36) La masse d'or vaut donc $m_{or} = \frac{4}{3}\pi R'^3 \rho_{or} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu_m$. On peut prendre $\mu \approx 2000 \text{ kg.m}^{-3}$ en utilisant la figure 9, d'où $m_{or} \approx 8,37 \cdot 10^3 \text{ kg}$. La donnée de ρ_{or} permet de déterminer R' (non demandé explicitement). $R' = 0,47 \text{ m}$.

37) Les données de la figure 10 ne sont pas clairement reliables au problème schématisé en figure 9. Il n'est dit nulle part que le milieu est semi infini, et n'y a que deux couches horizontales dans la figure 9 au lieu de 3 dans la figure 10.

Dans une couche uniforme, les deux grottes placées en x_1 et $x_2 > x_1$ provoqueraient deux anomalies successives. Comme $h_1 < h_2$, la première est plus intense et plus piquée. Enfin, comme il s'agit de grottes, $\Delta \mu = 0 - \mu_m = -\mu_m < 0$. Si en plus on tient compte du caractère semi infini d'une plaque, on aurait une superposition des effets, d'où le graphe :



V. Prospection électrique des sols

38) En considérant le champ électrique $\vec{E} = E \vec{e}_x$ uniforme dans le parallélépipède, on a $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, avec $j = I/A$. On a par ailleurs $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$, d'où $\frac{dV}{dx} = -\frac{I}{A\sigma}$. Par intégration entre x_1 et x_2 , on a $V_2 - V_1 = -I \frac{l}{A\sigma}$. Comme $R = \frac{V_1 - V_2}{I}$, on obtient le résultat classique $R = l/A\sigma$.

39) On utilise un courant alternatif pour éviter l'accumulation de charges au niveau des électrodes. La relation $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ est valable à basse fréquence dans les conducteurs.

40) En supposant que le courant se répartit uniformément sur une demi-sphère, on a $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$. On a $I = \iint_{1/2 \text{ sphère}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 j(r)$, d'où $j = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r$.

41) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$ et $\vec{E} = \vec{j}/\sigma = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \vec{e}_r$. On a donc par intégration $V = \frac{I}{2\pi\sigma r} + C$, et $C = 0$ par choix de l'origine des potentiels.

42) On a deux électrodes A et B, donc en appliquant le théorème de superposition, le potentiel en un point P quelconque vaut :

$$V(P) = V_A(P) + V_B(P) = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

avec $r_A = AP$ et $r_B = BP$.

L'équipotentielle $V = V_0$ vérifie $\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} = \frac{2\pi\sigma}{I} V_0$

43) En M, $r_A = AM$ et $r_B = BM$, $V(M) = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right)$. En N, $r_A = AN$, $r_B = BN$, $V(N) = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right)$. On a donc $\Delta V = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} \right)$

On donne $f = \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM}$.

44) On a ici $AM = BN = l$, $AN = BM = 2l$, d'où $f = 1/l$.

45) On a $3l = 10 \text{ m}$, $f = \frac{3}{10} \text{ m}^{-1}$. En se plaçant en $y = 0$, on lit les potentiels pour deux points symétriques : $x_M = -l/2 = -1,67 \text{ m}$, $V(M) = 1,25 \text{ V}$, $x_N = l/2 = 1,67 \text{ m}$, $V(N) = -1,25 \text{ V}$.

On peut calculer $\rho = \frac{2\pi\Delta V}{If} = \frac{2\pi \times 2,5}{0,5 \times 3/10} = 105 \Omega \cdot \text{m}$. Cette valeur est cohérente avec la valeur $\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$ utilisée pour la simulation.

46) Les lignes de courant sont des lignes de champ $\vec{E}$ car $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Elles sont donc orthogonales aux équipotentielles, et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

47) Pour AB faible, la quasi-totalité des lignes de courant traversent uniquement le milieu 1. On a donc $\rho_a \rightarrow \rho_1$.

Pour AB grand au contraire, le courant traverse une distance bien plus importante dans le milieu 2 que dans le milieu 1 et $\rho_a \rightarrow \rho_2$.

48) Pour $AB \rightarrow 0$, on lit $\rho_a \rightarrow 400 \Omega \cdot \text{m}$ donc $\rho_1 = 400 \Omega \cdot \text{m}$. Pour AB « grand », on obtient de même $\rho_2 = 50 \Omega \cdot \text{m}$. On est donc dans le cas où $\rho_2/\rho_1 = 50/400 = 0,125$. On peut donc suivre cette courbe particulière dans l'abaque CH1 fournie (par extrapolation entre les courbes $\rho_2/\rho_1 = 0,1$ et $\rho_2/\rho_1 = 0,15$). En prenant un point particulier dans une zone de forte variation de ρ_a/ρ_1 , on obtient par lecture $\rho_a/\rho_1 = 2 \cdot 10^{-1}$ pour $\frac{AB}{2h_1} = 3$. On sur la figure 18, on lit que $\rho_a = 2 \cdot 10^{-1} \rho_1 = 80 \Omega \cdot \text{m}$ pour $AB/2 = 15 \text{ m}$. On en déduit $h_1 = AB/6 = 5 \text{ m}$.

Benoit Malet