

Concours Centrale-Supélec PC 2018

Epreuve écrite PHYSIQUE 1

Corrigé proposé par Gwénaél RAILLET : raillet.gwenael@neuf.fr

Avec l'aide précieuse de Delphine PALACIO

Océans, atmosphère et communications

I – Particules chargées dans l'atmosphère

I.A – Particule chargée en mouvement dans un champ magnétique

Q.1) * On applique la 2^{ème} loi de Newton à une particule de charge q soumise à la force de Lorentz magnétique seule (le poids est négligé) dans un référentiel supposé galiléen lié à l'atmosphère.

$m\vec{v} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ qui donne en projection dans la base cartésienne :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{v}_x - \frac{qB_0}{m}v_y &= 0 & (a) \quad \dot{v}_y + \frac{qB_0}{m}v_x &= 0 & (b) \quad \dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

* La troisième équation permet d'affirmer que v_z est une constante du mouvement.

* Multiplions scalairement la 2^{ème} loi de Newton par $\vec{v}$: $m\vec{v}\vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}_0)\vec{v} \quad \square \quad \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = 0$ donc v^2 est une constante du mouvement.

Q.2) $\vec{\omega} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y \quad \square \quad \vec{v} = \vec{\omega} + v_z \vec{e}_z \quad \square \quad \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}}$ puisque $v_z = \text{Cte}$. Et $v_z \vec{e}_z \wedge \vec{B}_0 = \vec{0}$

On réécrit donc l'équation vectorielle précédente : $m\dot{\vec{\omega}} = q\vec{\omega} \wedge \vec{B}_0 \quad \square \quad d\vec{\omega} = \frac{q}{m} \vec{\omega} \wedge \vec{B}_0 dt$

Q.3) La preuve de la trajectoire circulaire est hors programme : « Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire » (Extrait du programme de 1^{ère} année)

On s'intéresse ici à la projection de la trajectoire dans le plan (Oxy).

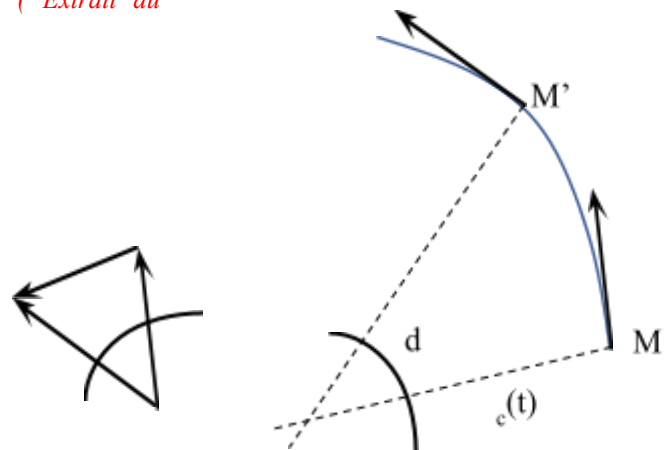
$\|\vec{\omega}\| = \text{Cte}$. En effet, $\vec{v}^2 = \vec{\omega}^2 + v_z^2 = \text{Cte}$ et $v_z = \text{Cte} \quad \square \quad \vec{\omega}^2 = \text{Cte}$

D'où $d\vec{\omega}^2 = 2\vec{\omega} \cdot d\vec{\omega} = 0$

Géométriquement : $d\alpha = \frac{MM'}{\rho_c(t)} = \frac{d\omega}{\omega}$

$$\square d\alpha = \frac{dt}{\rho_c(t)} = \frac{qB_0 dt}{m} \text{ d'après Q2.}$$

D'où $\rho_c = \frac{\omega}{c} = \text{Cte}$ en posant $c = \frac{qB_0}{m}$



On remarque que $\rho_c = \text{Cte}$ donc la projection du mouvement de la particule dans le plan (Oxy) est circulaire parcouru à la vitesse ω et à la vitesse angulaire Ω_c .

Q.4) L'ordre de grandeur du champ géomagnétique au voisinage de la surface terrestre est 10^{-5} T.

On en déduit : $\Omega_c \approx 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ pour un électron et $\Omega_c \approx 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ pour un proton.

I.B – Particule chargée en mouvement dans les champs électrique et magnétique croisés

Q.5) On ajoute au bilan des forces de la question **Q.1** le terme électrique de la force de Lorentz : $q\vec{E}_1$.

Le système d'équation différentielles devient : $\left\{ \begin{aligned} \dot{v}_x - \frac{qE_1}{c}v_y &= \frac{qE_1}{m} & (a) \quad \dot{v}_y + \frac{qE_1}{c}v_x &= 0 & (b) \quad \dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \right.$

Q.6) La solution constante dans le plan (Oxy) correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dans ce plan donc $\ddot{v}_x = \ddot{v}_y = 0$.

On en déduit à l'aide de **Q.5** : $\{v_y = -\frac{E_1}{B_0} \quad v_x = 0 \quad \square \vec{V}_d = -\frac{E_1}{B_0} \vec{e}_y$

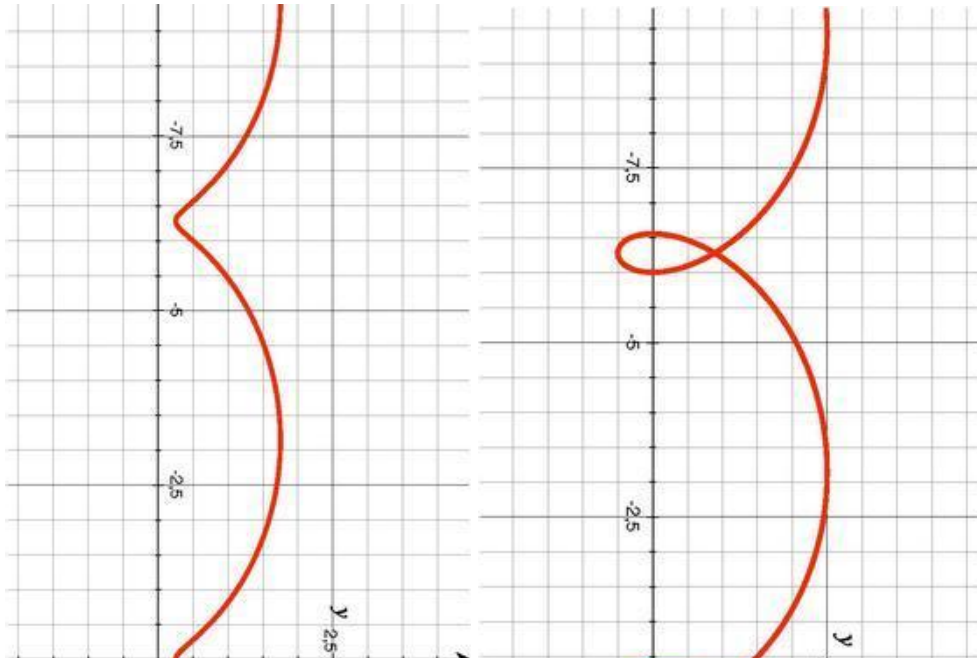
Q.7) $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}_d = \vec{u} - \frac{E_1}{B_0} \vec{e}_y$ que l'on injecte dans l'équation vectorielle du mouvement en remarquant

que $m\vec{u} = q(\vec{u} + \vec{V}_d) \wedge \vec{B}_0 + q\vec{E}_1 = q\vec{u} \wedge \vec{B}_0$

On retrouve l'équation du mouvement de **Q.1** donc on obtient $\{\dot{u}_x - \frac{1}{c} u_y = 0 \quad (a) \quad \dot{u}_y + \frac{1}{c} u_x = 0 \quad (b) \quad \dot{u}_z = 0$

La vitesse $\vec{u}$ représente la vitesse de la particule dans le référentiel R_d en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V}_d$ par rapport au référentiel du laboratoire R_L .

On a montré dans **Q.3** que les équations différentielles vérifiées par $\vec{u}$ conduisent à un mouvement circulaire uniforme, ici dans le référentiel R_d . Dans le référentiel R_L il est donc la composition de ce mouvement circulaire uniforme et du mouvement d'entraînement de R_d . La trajectoire a donc la forme d'une trochoïde (« cycloïde allongée » ou « cycloïde raccourcie » selon la valeur de E_1)



I.C – Les siffleurs atmosphériques

Q.8) On se place à une échelle très supérieure à ρ_c , le courant de particules chargées se limite au terme de dérive à la vitesse $\vec{V}_d$, le terme dû au mouvement circulaire générant un courant nul en moyenne.

Ainsi $\vec{j} = -n^* e \vec{V}_d$

D'après **Q.7**, $\vec{V}_d \wedge \vec{B}_0 + \vec{E}_1 = \vec{0} \quad \square \quad \vec{V}_d \wedge \vec{e}_z = -\frac{\vec{E}_1}{B_0} \quad \square \quad \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_1}{B_0} = -\vec{V}_d \quad \square \quad \vec{j} = n^* e \cdot \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_1}{B_0}$ Posons $\gamma = \frac{n^* e}{B_0}$

Soit $\gamma = -\frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{c}$

Q.9) Seul l'ordre de grandeur de n^* est fourni, on se contentera pour répondre à la question des ordres de grandeurs des valeurs demandées : $\left| \frac{\gamma}{c} \right| \approx 10^7 \text{ rad.s}^{-1} ; \quad \omega_p \approx 10^7 \text{ rad.s}^{-1} ; \quad \frac{\omega_p^2}{c} \approx 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$.

Pour les VLF, $\omega \approx 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ est très inférieure aux valeurs précédentes.

Q.10) Par définition : $I_0 = \langle \vec{e} \cdot \vec{e} \rangle = \langle \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} \cdot \vec{e} \rangle$

Or dans le vide, $(\vec{e}, \vec{E}_1, \vec{B}_1)$ forment un trièdre direct et $B_1 = \frac{E_1}{c}$, d'où $I_0 = \frac{E_1^2}{2\mu_0 c}$

$$\square E_1 = \sqrt{2\mu_0 c I_0} \text{ et } B_1 = \sqrt{\frac{2\mu_0 I_0}{c}}$$

$$B_1 \ll B_0 \text{ si } I_0 \ll \frac{c}{2\mu_0} B_0^2. \text{ Application numérique : } I_0 \ll 3,0.10^5 \text{ W.m}^{-2}$$

Un laser utilisé en TP, de puissance 1 mW et de section 1 mm² délivre une intensité de 10³ W.m⁻² qui vérifie aussi la condition précédente. Cependant, les ondes concernées ici sont dans la bande VLF, et générées par la foudre. On peut penser qu'à proximité de celle-ci l'onde ne vérifie pas cette condition.

Q.11) Equation de Maxwell-Gauss : $i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Equation de Maxwell-Thomson : $i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

Equation de Maxwell-Faraday : $i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$

Equation de Maxwell-Ampère : $i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} - i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\omega_p^2}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E} - i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}$

Multiplions scalairement par $\vec{k}$ cette dernière équation : $0 = 0 - i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{k} \cdot \vec{E} \quad \square \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

Donc d'après l'équation de Maxwell-Gauss complexe, le milieu est électriquement neutre. Avec l'équation de Maxwell-Thomson, on en déduit que l'onde est transverse.

Q.12) Cherchons à établir la relation de dispersion de l'onde dans l'ionosphère ainsi décrite :

$$i\vec{k} \wedge (i\vec{k} \wedge \vec{E}) = i\omega (i\vec{k} \wedge \vec{B}) \quad \square \quad i\vec{k} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{E}) - \vec{E} (i\vec{k} \cdot \vec{k}) = i\omega \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\omega_p^2}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E} - i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \right)$$

$$\square k^2 \vec{E} = i\omega \epsilon_0 \mu_0 \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{e}_z \wedge \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \quad \square \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} = i\omega \epsilon_0 \mu_0 \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{e}_z \wedge \vec{E}$$

Projetons cette relation dans la base cartésienne :

$$\left\{ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_x = -i\omega \frac{\omega_p^2}{c^2} E_y \quad (X) \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_y = i\omega \frac{\omega_p^2}{c^2} E_x \quad (Y) \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z = 0 \right.$$

Or $E_z = 0$ car l'onde est transverse.

Si l'onde est polarisée rectilignement, les composantes E_x et E_y sont en phase. Or les deux premières relations précédentes ne le permettent pas à cause du facteur i . On en déduit que l'onde ne peut être polarisée rectilignement dans une ionosphère dont la relation constitutive est $\vec{j} = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}$.

Découplons ces deux relations pour en déduire la relation de dispersion.

D'après (Y) : $E_y = \frac{i\omega \frac{\omega_p^2}{c}}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)} E_x$ que l'on injecte dans (X) : $\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^2 E_x = \left(\omega \frac{\omega_p^2}{c^2} \right)^2 E_x$

$$\square k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \pm \omega \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

Or $\omega \ll \frac{\omega_p^2}{c}$ d'où $k^2 \approx \pm \omega \frac{\omega_p^2}{c^2}$ où on gardera la solution (+) afin d'obtenir une onde progressive et non pas

une onde évanescence (les siffleurs se propagent sur des milliers de kilomètres) : $k^2 \approx \omega \frac{\omega_p^2}{c^2}$

* Le milieu est transparent car k^2 est un réel positif.

* Par définition, la vitesse de phase est $v_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = \frac{c}{\omega_p} \sqrt{\omega}$. Elle est fonction de ω donc le milieu est dispersif.

Q13) On raisonne sur la vitesse de phase, vitesse de propagation des composantes monochromatiques d'un paquet d'onde. On remarque ici que les ondes haute fréquence (donnant des sons aigus) voyagent plus rapidement que les ondes basses fréquences (donnant des sons graves). Un paquet d'onde généré par la source (foudre) parviendra dispersé au récepteur. Les sons produits évoqueront un sifflement de tonalité descendante.

Exploitions le spectrogramme en annexe.

* L'onde de fréquence $f_1 = 5 \text{ kHz}$ parvient au récepteur à la date : $t_1 = t_0 + 31 \text{ s}$

* L'onde de fréquence $f_2 = 1 \text{ kHz}$ parvient au récepteur à la date : $t_2 = t_0 + 32 \text{ s}$

L'intervalle de temps séparant la réception de ces deux composantes d'un paquet d'onde dépend de la distance d parcourue de la source au récepteur : $t_1 - t_2 = d \cdot \left(\frac{1}{v_\phi(\omega_2)} - \frac{1}{v_\phi(\omega_1)} \right)$ □

$$d = (t_1 - t_2) \cdot \left(\frac{v_\phi(\omega_1) v_\phi(\omega_2)}{v_\phi(\omega_1) - v_\phi(\omega_2)} \right)$$

$$\square d = (t_1 - t_2) \cdot \frac{c}{\omega_p} \frac{\sqrt{2\pi} f_1 f_2}{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}} \quad \text{Application numérique : } d \approx 2.10^4 \text{ km}$$

Nota bene : On a fait ici l'hypothèse que l'onde se propageait sur une distance d dans l'ionosphère, or le récepteur est probablement au niveau du sol et donc hors ionosphère. L'atmosphère en deçà de l'ionosphère est très peu dispersive et ne modifie donc pas $t_1 - t_2$. A cette distance d il faut ajouter la distance parcourue dans l'atmosphère non ionosphérique.

Q14) Equation de conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

Q15) A partir de l'équation de Navier-Stokes :

* L'écoulement est dit supposé parfait, on néglige donc le terme de viscosité.

* L'accélération convective est un terme du 2^{ème} ordre en v . On le néglige donc dans cette linéarisation.

* $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left(\rho_0 + \rho_a(\vec{r}, t) \right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ au 1^{er} ordre.

* $\vec{\text{grad}} P(\vec{r}, t) = \vec{\text{grad}} \left(P_s(z) + p_a(\vec{r}, t) \right)$ En l'absence d'onde, la loi de l'hydrostatique donne :
 $-\vec{\text{grad}}(P_s(z)) + \rho_0 \vec{g} = \vec{0}$

L'équation de Navier-Stokes devient à ce stade : $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}(p_a) + \rho_0 p_a \vec{g}$

* $\frac{\|\vec{\text{grad}}(p_a)\|}{\|\rho_0 p_a \vec{g}\|} \approx \frac{\frac{p_a}{a}}{\rho_0 p_a g} = \frac{1}{\rho_0 a g} = \frac{c_a^2}{a g} \gg 1$ d'après l'énoncé.

Finalement : $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}(p_a)$ (*)

A partir de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \vec{v}) = 0 \text{ au 1^{er} ordre } \square \frac{\partial \rho_0 p_a}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \vec{v}) = 0 \square \frac{\partial p_a}{\partial t} = -\text{div}(\vec{v}) \quad (**)$$

Q16) La démonstration en 3D est HORS PROGRAMME

$$\text{div}(\vec{v}) : \text{div}(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}) = -\text{div}(\vec{\text{grad}}(p_a))$$

Les variables spatiales et temporelles étant ici indépendantes, on peut inverser dans le premier membre l'ordre des dérivations. De plus, l'énoncé rappelle que $\text{div}(\vec{\text{grad}}(p_a)) = p_a$ □ $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\vec{v}) = -\Delta p_a$

$$\frac{\partial(**)}{\partial t} : \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{div}(\vec{v}))$$

Donc en éliminant $\text{div}(\vec{v})$ entre ces deux équations, on obtient l'équation de propagation :

$$\Delta p_a - \rho_0 \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0$$

On en extrait la célérité des ondes acoustiques dans le fluide : $c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}$

Q17) Pour une onde sinusoïdale, posons une solution $p_a = f(\vec{r}) \cdot \cos(\omega t + \phi(\vec{r}))$ que nous injectons dans l'équation de propagation $\square \Delta p_a = -\frac{\omega^2}{c_a^2} p_a$

Q18) Dans le cas d'une onde plane (homogène !) progressive harmonique : $p_a = Cte \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{c_a}\right)$

Les équations liant p_a et $\vec{v}$ on peut également écrire : $\vec{v} = Cte \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{c_a} + \phi\right)$

On injecte cette solution dans (*) en remarquant que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c_a \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$ et $\vec{\text{grad}}(p_a) = \frac{\partial p_a}{\partial x} \vec{e}_x$

$\square -\rho_0 c_a \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = -\frac{\partial p_a}{\partial x} \vec{e}_x$, que l'on intègre en omettant les constantes d'intégration ne décrivant pas une onde progressive : $p_a \vec{e}_x = \rho_0 c_a \vec{v}$ où on pose $Z_a = \rho_0 c_a$

La définition de Z_a dans l'énoncé est erronée.

Q19) Reprenons la relation (*) en coordonnées sphériques.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_a = \frac{\partial p_a}{\partial r} \vec{e}_r = \left[-\frac{A}{r^2} \cos(kr - \omega t) - \frac{A}{r} k \sin(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r$$

On intègre pour exhiber $\vec{v}$ en oubliant la constante d'intégration qui ne décrit pas une onde progressive.

$\rho_0 \vec{v} = \left[-\frac{A}{\omega r^2} \sin(kr - \omega t) + \frac{A}{\omega r} k \cos(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r$. Or $k = \frac{\omega}{c_a}$ que l'on obtient en injectant la solution harmonique à symétrie sphérique de p_a dans l'équation de propagation de **Q16**.

$$\square \rho_0 \vec{v} = \frac{A}{r} \left[-\frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) + \cos(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r$$

$\square \rho_0 c_a \vec{v} = \frac{A}{r} \left[-\frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) + \cos(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r$. On reconnaît $p_a \vec{e}_r = \rho_0 c_a \vec{v}$ si $kr \gg 1$ soit $r \gg \lambda$ où l'onde est dite en « champ lointain ».

Q20) Par définition $\frac{dP}{dS} = \langle p_a \vec{v} \cdot \vec{n} \rangle = \langle \frac{p_a^2}{\rho_0 c_a} \rangle \vec{n} \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{2\rho_0 c_a} \text{Re} \left(\underline{p_a} \underline{p_a}^* \right) \vec{n} \cdot \vec{e}_r = \frac{|p_a|^2}{2\rho_0 c_a} \vec{n} \cdot \vec{e}_r$

Posons $I_a = \frac{|p_a|^2}{2\rho_0 c_a}$

$$\text{Q21)} \underline{p_a} = \frac{A}{r} e^{i((k+ik'')r - \omega t)} = \frac{A}{r} e^{-k''r} e^{i(k'r - \omega t)} \quad \square \quad I_a = \frac{1}{2\rho_0 c_a} \left(\frac{A}{r} \right)^2 e^{-2k''r}$$

On en déduit que $P = 10 \log \left(\frac{I_a(r_0)}{I_a(r)} \right) = 20 \log \left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{20k''}{\ln 10} (r - r_0)$ D'où $\alpha = \frac{20k''}{\ln 10}$

Q22) Compte tenu de la définition du terme de phase en $(kr - \omega t)$, l'atténuation se traduirait plutôt par $k'' > 0$ donc $k'' = \frac{k'^2}{2\rho_0 c_a}$

Les données numériques sont fournies en fin d'énoncé :

f (kHz)	3	30
λ (m)	0,5	5
k' (m⁻¹)	12,6	12,6.10 ³
k'' (m⁻¹)	7,81.10 ⁻⁸	7,81.10 ⁻²

Distance d'atténuation de I_a : $\frac{1}{2k''}$ (m)	$6,41 \cdot 10^6$	6,41
--	-------------------	------

* La communication par ondes sonores sous-marines se fait à plus grande distance si elle se fait à « basse fréquence ».

* Cependant, le choix de la fréquence, et donc de la longueur d'onde doit tenir compte de la diffraction par la cible.

- Si $\lambda \ll$ taille cible (gros bâtiment par exemple), l'écho se fait surtout par réflexion spéculaire donc de façon peu probable dans la direction de l'émetteur.

- Si $\lambda \approx$ taille cible (entre dauphins, entre baleines), l'écho est essentiellement dû à la diffraction dans toutes les directions, donc aussi celle de l'émetteur.

L'émission d'un signal impulsionnel (cas des sous-marins), donc à spectre large, ou d'un signal modulé en fréquence (cas des baleines), permet d'obtenir un écho de la part de cibles de tailles différentes. L'analyse notamment spectrale de l'écho est l'art de « l'oreille » du sous-marinier ou de l'animal pour discriminer les cibles.

* Enfin, la taille des antennes émettrice/réceptrice croît avec λ ce qui constitue une contrainte technologique.

Q23) Par construction du terme de phase, le chemin acoustique a la dimension d'une longueur.

Q24) Nota bene : On obtient l'équation vérifiée $L(\vec{r})$ fournie en injectant la solution en onde plane de $\underline{p}_a(\vec{r}, t)$ dans l'équation de d'Alembert généralisée fournie en préambule.

Comparons les ordres de grandeurs des deux termes du membre de gauche :

$$\frac{(\vec{grad} L)^2}{i \frac{\Delta L}{k_0}} \approx \frac{\left(\frac{L}{d}\right)^2}{\frac{L}{d^2}} \approx \frac{L}{d}$$

Donc, si $\lambda \ll L$, l'équation en L devient : $(\vec{grad} L)^2 = n^2(\vec{r}) \square \vec{grad} L = n(\vec{r}) \vec{u}$ où on a gardé ici des signes + afin de garder une définition de L similaire à celle de l'optique : $L = \int n ds$.

Cette approximation revient à négliger la diffraction.

Q25) Considérons $d\vec{r}$: un déplacement élémentaire sur une surface iso chemin acoustique L

Par définition du gradient : $dL = \vec{grad} L \cdot d\vec{r}$ et $dL = 0$ sur une telle surface donc $\vec{grad} L$ est perpendiculaire à $d\vec{r}$. Or, d'après **Q24**, $\vec{grad} L = n(\vec{r}) \vec{u}$ donc les rayons acoustiques, dirigés par $\vec{u}$ sont orthogonaux aux surfaces iso chemin acoustique. Ce résultat est similaire au *théorème de Malus* de l'optique.

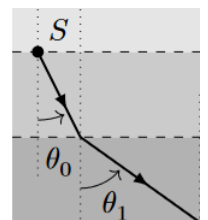
Q26) Par définition de l'indice : $c_a = \frac{c_{a0}}{n(\vec{r})} = c_{a0}(1+z) \square n(\vec{r}) = (1+z)^{-1}$.

Dans la situation présentée dans le sujet, $\theta_1 > \theta_0$ donc d'après la loi de Descartes

$$n(z=0) \sin \theta_0 = n(dz > 0) \sin \theta_1$$

donc $n(dz > 0) < n(z=0)$. $n(z)$ est donc une fonction décroissante de z donc $\Omega > 0$.

La remontée finale du rayon acoustique est due à la réflexion totale sur la couche de fluide la plus profonde atteinte. C'est le phénomène de *mirage acoustique* similaire à celui de *mirage optique*.



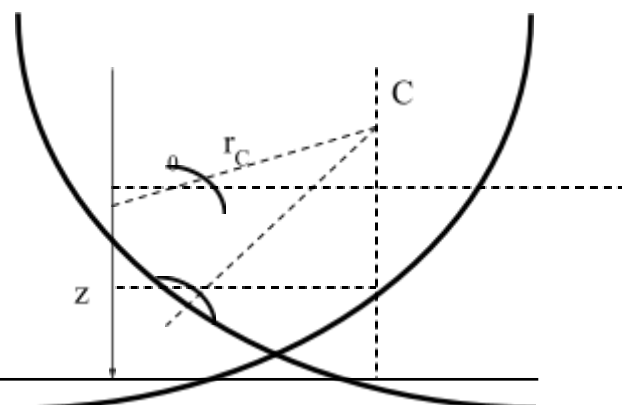
Q27) Montrons que le rayon $r_c = \frac{|z_c| + z}{\sin \theta} = Cte$

Or la loi de Descartes s'écrit ici :

$$(1+z) \sin \theta_0 = \sin \theta$$

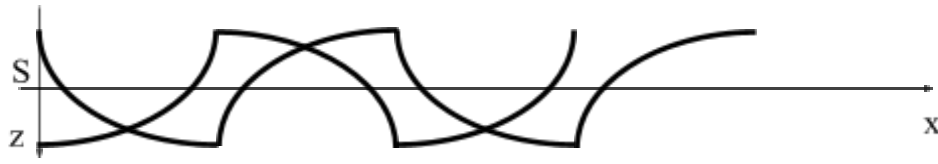
$$\square r_c = \frac{|z_c| + z}{(1+z) \sin \theta_0}$$

$$\text{Or } r_c = \frac{|z_c|}{\sin \theta_0} \square r_c = \frac{r_c \sin \theta_0 + z}{(1+z) \sin \theta_0}$$



$$\square r_c z \sin \theta_0 = z \square r_c \sin \theta_0 = 1$$

Q28) On a montré en **Q26)** que le rayon acoustique est dévié vers les zones d'indice acoustique « fort », et donc de célérité « faible ». Le rayon fera donc des slaloms de part et d'autre de la surface $z = 0$.



On retrouve ce phénomène de guidage des ondes par gradient d'indice dans les *fibres optiques à gradient d'indice*.

Q29) Par définition $\delta t_0 = \int_{\hat{S}H} \frac{ds}{c_a(z)}$ où s est l'abscisse curviligne du rayon acoustique : $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$

Géométriquement : $\frac{dx}{dz} = \tan \theta \quad \square \quad ds = dz \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \frac{dz}{\cos \theta}$ où l'on s'affranchit du changement de signe de $\cos \theta$ lors de la réflexion totale du rayon acoustique en exploitant la symétrie circulaire : on remarque que la durée de propagation de S à H est le double de celle de S au point de profondeur maximale. Par ailleurs, la loi de Descartes donne $n(z) \cdot \sin \theta = n_0 \sin \theta_0 = Cte$, que l'on différencie :

$$-\frac{0}{(1 + \sin^2 \theta)^2} \sin \theta \cdot dz + \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} \cos \theta \cdot d\theta = 0 \quad \square \quad dz = \frac{\cos \theta \cdot d\theta}{\sin^3 \theta} = 0$$

$$\square \delta t_0 = 2 \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{c_a(z)}$$

$$\square \delta t_0 = \frac{2}{\theta_0} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{c_a(z) n_0 \sin \theta_0} = \frac{2}{\theta_0} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{n(z) \cdot d\theta}{c_{a0} n_0 \sin \theta_0} = \frac{2}{c_{a0} \theta_0} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta} \quad \square \quad \delta t_0 = -\frac{2}{c_{a0}} \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)$$

Q30) Exprimons Δx .

$$\Delta x = \int_{\hat{S}H} dx = \int_{\hat{S}H} \sin \theta ds = \int_{\hat{S}H} \sin \theta \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \theta} dz = 2 \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{n_0 \sin \theta_0} = \frac{2 \cos \theta_0}{n_0 \sin \theta_0}$$

où $n_0 = 1$ par définition. D'où $\frac{2}{\theta_0} = x \cdot \tan \theta_0$

$$\text{On en déduit l'expression demandée : } \delta t_0 = -\frac{x}{c_{a0}} \tan \theta_0 \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)$$

On généralise ce résultat lorsque le rayon acoustique parcourt plusieurs « arches » de part et d'autre de l'axe (Ox), le traversant à chaque fois avec l'angle θ_0 .

Q31) Dans le cas où $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, le rayon acoustique reste à la cote $z = 0$ et ne subit que l'indice n_0 . Il se propage donc à la vitesse constante c_{a0} . La durée de propagation sur la distance Δx s'écrit donc simplement par définition $\Delta t = \frac{\Delta x}{c_{a0}}$.

Q32) $f(\theta_0) - 1 < 0$ donc $f(\theta_0) < 1$. Cela implique que le rayon acoustique se propagera de S à H plus vite qu'en ligne droite du fait de la diminution de l'indice avec la cote z .

Q33) D'après **Q30)** $\Delta x = \frac{2}{\tan \theta_0}$. Considérons la baleine émettrice en S et la baleine réceptrice en H.

Supposons que S émet en direction de H selon un cône d'ouverture 60° , alors $60^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ d'où

$$\frac{2}{\sqrt{3}} < \Delta x < \infty.$$

Déterminons la valeur numérique de Ω_0 à partir du graphe de la figure 3.

La pente de la partie rectiligne de $c_a(z)$ est $c_{a0}\Omega_0 = \frac{50}{3000} = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad \square \quad \Omega_0 = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$.

D'où $100 \text{ km} < \Delta x < \infty$.

La distance infinie est à limiter par l'atténuation de l'onde acoustique (cf Q22) en fonction de la fréquence.

