

UNIDAD EDUCATIVA  
INSTITUTO “CECILIO ACOSTA”  
MATEMÁTICA  
1º de Cs.

## **FUNCIÓN EXPONENCIAL**

La función exponencial es una función Real de variable Real definida por:  $f(x) = a^x$ , en donde  $a$  la base “a” es un número real positivo ( $a > 0$ ) diferente de la unidad y el exponente “x” un número real ( $x \in \mathbb{R}$ ), es decir,

**1.- Representar gráficamente la función exponencial en el Plano Cartesiano: .**

**Y**

**0**

**X**

**2.- Representar gráficamente la función exponencial en el Plano Cartesiano: .**

Y

0

X

## PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL CUANDO $a > 1$

De la primera representación gráfica (cuando la base “a”  $> 1$ ), podemos obtener las siguientes propiedades:

- 1.- Si  $x = 0$ , la curva de la función exponencial es igual a la unidad; por lo tanto pasa por el punto  $(0, 1)$ , ya que: .
- 2.- Si  $x = 1$ , la curva de la función exponencial, es igual a la base dos  $(2)$ , por ende pasa por el punto  $(1, 2)$ , ya que: .
- 3.- Si los valores del exponente “x” son mayores que la unidad ( $x > 1$ ), la curva de la función exponencial, es estrictamente creciente.

4.- Si el exponente “x” toma valores menores que la unidad ( $x < 1$ ), la curva de dicha función exponencial es estrictamente decreciente.

5.- La función exponencial es inyectiva; ya que para cada par de elementos distintos del conjunto de partida, le corresponden imágenes diferentes en el conjunto de llegada

6.- La función exponencial es sobreyectiva, porque el Rango y el conjunto de llegada son iguales.

7.- El Dominio de la función exponencial es el conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ), porque está definida para todo los números reales.

8.- El Rango de la función es el conjunto de los números reales positivos sin el cero ya que la curva se ubica en el semi-plano superior con respecto al eje de las abscisas ( $X$ ).

9.- La función exponencial es biyectiva; ya que es inyectiva y sobreyectiva a la vez, por tanto, dicha función posee una función inversa llamada **función logarítmica**

## PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL CUANDO $a < 1$

De la segunda representación gráfica de la función exponencial, se obtienen las siguientes propiedades:

1.- Si  $x = 0$ , la curva de la función exponencial, es igual a la unidad; por tanto pasa por el punto de coordenadas  $(0, 1)$ , ya que:

2.- Si  $x = 1$ , la curva de la función exponencial es igual a la base, por tanto dicha curva pasa por el punto de coordenadas  $(1, a)$  ya que:

3.- Cuando el exponente “x” toma valores mayores que la unidad ( $x > 1$ ), la curva de la función exponencial: la curva de dicha función exponencial es estrictamente decreciente.

4.- Para valores del exponente “x” positivos pero menores que la unidad ( $0 < x < 1$ ), la curva de la función exponencial la curva es estrictamente creciente.

5.- La función exponencial es una función inyectiva; ya que para cada par de elementos diferentes del conjunto de partida poseen imágenes distintas en el conjunto de llegada.

6.- La función exponencial es una función sobreyectiva; ya que el Rango y el conjunto de llegada son iguales.

7.- El Dominio de la función exponencial es conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ), ya que está definida para cualesquier valor de la variable independiente “x”.

8.- El Rango de la función exponencial es el conjunto de los números reales positivos sin el cero ),

9.- La función exponencial es biyectiva, por se inyectiva y también sobreyectiva. Por tanto dicha función posee una función inversa que recibe el nombre de **función logarítmica**.

## **PROPIEDADES COMUNES DE SEGÚN AMBAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL**

### **ECUACIONES EXPONENCIALES**

Las ecuaciones exponenciales son aquellas ecuaciones cuya incógnita es un exponente.

Para resolver una ecuación exponencial se pueden aplicar las **LEYES O PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN CON LA MISMA BASE**.

Resolver una ecuación exponencial consiste en calcular el valor de la incógnita que al sustituirla

en la ecuación dada, la transforma en una igualdad numérica.

Existen tres tipos de ecuaciones exponenciales:

- a. Ecuaciones exponenciales binómicas ( dos términos ) los cuales pueden estar ubicados a ambos lados de la igualdad o en uno sólo de los miembros de la ecuación

Se resuelven mediante la aplicación de las **LEYES O PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN CON LA MISMA BASE.**

- b. Ecuaciones exponenciales binómicas (dos términos) los cuales **no pueden ser expresados como potencias de la misma base.** Al igual que las anteriores, sus términos pueden estar a ambos lados o de un mismo lado de la ecuación.

Estas ecuaciones se resuelven aplicando las **PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS LAS CUALES SE ESTUDIARÁN** más tarde.

- c. Ecuaciones trinomias (tres términos ) cuyos términos exponenciales pueden expresarse como potencias de la misma base.

Estas ecuaciones trinomias se efectúan mediante un cambio de variable para así transformarlas en una ecuación de segundo grado para luego aplicar **LA RESOLVENTE.**

### **EJEMPLOS:**

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones exponenciales:

1.-

2.-

1

3.-

4.-

5.-

1

6.-

7.-

1

8.-

9.-

10.-

11.-

1

12.-

13.-

14.-

1

15.-

16.-

1

17.-

18.-

19.-

1

20.-

21.-

22.-

1

23.-

24.-

1

25.-

26.-

## FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Por ser la función exponencial una función definida por: tal que **Biyectiva**, tiene inversa; la cual se define como:

y recibe el nombre de **función logarítmica**

La función logarítmica, es la inversa de la función exponencial.

, la cual se lee: “logaritmo de treinta y dos en base dos es igual a cinco

y se lee: “logaritmo de un veinticinco avos en base cinco es menos tres  
: “ el logaritmo de cuatro en base sesenta y cuatro es un tercio”

: “el logaritmo de la unidad en base siete es cero”

: “el logaritmo de tres en base tres es la unidad (el logaritmo de la base, es la unidad).

La función Logarítmica es la inversa de la función Exponencial, es decir,

De las expresiones anteriores, se puede deducir que:

**El logaritmo de un número respecto a cualquier base es, igual el exponente al cual hay que elevar dicha base para obtener dicho número (la potencia).**

Hallar la expresión logarítmica de cada una de las siguientes expresiones:

**En los logaritmos, la base es siempre un número real positivo**

Resuelve cada una de las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuál es el logaritmo de treinta y dos en base ocho?

b) ¿Cuál es el logaritmo de una centésima en base diez?

b. ¿Cuál es el logaritmo de nueve en base nueve?

c. ¿Cuál es el logaritmo de un quinto en base veinticinco?

1.- Efectúa cada una de las siguientes expresiones:

1

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

i)

2.- Determinar el valor de “x” en cada una de las siguientes expresiones:

a)

b)

c)

d)

e)

f)

Determina el valor de “x” según

a)

b)

c)

d)

e)

f)

## **REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL**

**a) Cuando el valor de la base “a” es mayor que la unidad (  $a > 1$  )**

Representar gráficamente la función logarítmica para la expresión exponencial: , en el intervalo

## **CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA PARA $a > 1$**

En la representación gráfica anterior de la función logarítmica, se puede observar las siguientes características:

- 1.- Los números negativos (  $x < 0$  ) no poseen logaritmos.
- 2.- El logaritmo de los números positivos menores que la unidad (  $0 < x < 1$  ) poseen logaritmo negativo.
- 3.- La curva pasa por el punto (  $1, 0$  ); es decir el logaritmo de la unidad es cero.

4.- La curva pasa por el punto  $(a, 1)$ ; por tanto, el logaritmo de la base es la unidad.

5.- El logaritmo de los números mayores que la unidad, son positivos.

6.- La función logarítmica es estrictamente creciente si la base es mayor que la unidad .

7.- La función logarítmica definida por: , es biyectiva.

## PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1.- El logaritmo de un producto respecto a cualquier base, es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

2.- El logaritmo de un cociente respecto a base cualquiera, es igual a la diferencia de los logaritmos de los factores.

3.- El logaritmo de una potencia con respecto a una base cualquiera, es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia.

4.- El logaritmo de una raíz respecto a cualquier base, es igual al logaritmo de la cantidad sub-radical entre el índice de la raíz.

## TIPOS DE LOGARITMOS

La base de los logaritmos puede ser cualquier número positivo diferente de la unidad, pero generalmente las más usadas son dos las cuales son:

1.- **Logaritmos decimales:** Los logaritmos decimales también llamados de Brigs o vulgares son

aquellos cuya base es el número diez ( 10 ).

**La base de los logaritmos decimales no se escriben ya que se sobreentienden.**

**2.- Logaritmos neperianos: Los logaritmos neperianos también llamados vulgares son aquellos cuya base es el número “e”**

e =

**El anti-logaritmo, es el número al cual pertenece el logaritmo de un número.**

El anti-logaritmo es el resultado que se obtiene al aplicar las propiedades de los logaritmos a una expresión **numérica**.

**El logaritmo decimal de los números que son potencias de diez ( 10 ), es un número entero; pero aquellos que no son, el logaritmo es un número decimal. La parte entera (la que está antes de la coma decimal) recibe el nombre de CARACTERÍSTICA y la parte decimal propiamente dicha ( la que está después de la coma decimal se llama MANTISA, la cual siempre es positiva.**

- 1.-La característica de un número mayor que la unidad y menor que diez (  $1 < n < 10$  ), es cero.
- 2.-La Característica es positiva si el número es mayor que diez (  $n > 10$  ).
- 3.- La Característica de un número positivo y menor que la unidad (  $10 < n < 10$  ) es negativa.

## **REGLA PARA CALCULAR LA CARACTERÍSTICA DE UN NÚMERO**

Esta Reglas hoy en día con el uso de las Calculadoras y de la Computadoras sólo tienen un valor **histórico**

### **1.- SI EL NÚMERO ES MAYOR QUE LA UNIDAD:**

Si el número dado es mayor que la unidad, la Característica es positiva y es igual al número cifras enteras menos la unidad

### **EJEMPLOS**

Determinar la Característica en cada uno de los siguientes casos:

- a. La característica del logaritmo de: 845, 36 es dos ( 2 ), ya que posee tres ( 3 ) cifras enteras menos una es dos (  $3 - 1 = 2$  ).
- b) La característica del logaritmo 56709, es cuatro ya que posee 5 cifras enteras menos una es cuatro (  $5 - 1 = 4$  ).
- c) La característica del logaritmo de 8, 93145 es cero; ya que por tener una cifra entera menos una

es cero (  $1 - 1 = 0$  ):

## 2.- SI EL NÚMERO ES POSITIVO Y MENOR QUE LA UNIDAD ( $0 < n < 1$ )

Cuando el número dado es positivo y menor que la unidad (  $0 < n < 1$  ), la Característica es negativa y es igual al número de ceros que tenga dicho número antes de la primera cifra significativa.

### EJEMPLOS

a) La característica del logaritmo de: 0, 00409 es menos tres ( - 3 ), ya que tiene tres ceros antes de la primera cifra significativa ( 4 ).

b) La característica del logaritmo de: 0, 8005 es menos uno ( . 1 ), ya que tiene un cero antes de la primera cifra significativa ( 8 ).

### EJERCICIOS

Resuelve cada uno de las siguientes expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos.

1.-  $\log ( 8 \cdot 3 \cdot 4 ) =$

2.-

3.-

4.-

5.-

**EJERCICIOS LITERALES**

Efectúa cada una de las siguientes expresiones literales aplicando las propiedades de los logaritmos con respecto a la base "a"

1.-  $X = a \cdot b \cdot c$

2.-  $X =$

3.-  $X$

4.-  $X =$

## **EJERCICIOS NUMÉRICOS COMBINADOS**

Resuelve las siguientes expresiones aplicando la Propiedades de los logaritmos:

1.-

2.-

3.-

1

4.-

5.-

## ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son aquellas cuya(s) incógnita(s) aparece acompañada del símbolo de los logaritmos.

Para resolver una ecuación logarítmica, no existe una **REGLA FIJA**, sólo se recomienda buscar el anti-logaritmo de la expresión dada a través de las **PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS** ya estudiadas según las siguientes expresiones:

**LA SUMA, SE TRANSFORMA EN PRODUCTO,  
LA DIFERENCIA (RESTA), SE TRANSFORMA EN DIVISIÓN,  
EL PRODUCTO, SE TRANSFORMA EN POTENCIA,  
LA DIVISIÓN, SE TRANSFORMA EN RAÍZ.**

Todos los términos de la ecuación de la ecuación logarítmica deben presentar el símbolo de los logaritmos, en caso de que haya alguno o algunos, ese o esos números se expresarán acompañados de dicho símbolo según la base presente en el ejercicio como una expresión exponencial.

Una vez resuelta la ecuación, debes comprobar los resultados obtenidos, reemplazando en cada ecuación dada el valor o valores de la incógnita para constatar si son admisibles ó si sólo alguno de ellos es válido.

### EJEMPLOS:

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1.-

La suma del primer miembro de la ecuación dada, se transforma en el producto de los sumandos:

Se eliminan los símbolos del logaritmo, en ambos lados de la ecuación:

Se aplica la propiedad DISTRIBUTIVA

Se agrupan los términos semejantes y también igualamos a cero por ser una ecuación de 2º Grado.

Se resuelve la ecuación de 2º grado obtenida mediante la resolvente:

Obteniéndose los resultados:

La segunda solución **no es válida por ser negativa en este caso.**

2.-

Se traspa el término 3 (tres) al segundo miembro de la ecuación dada.

El término **uno** se transforma en una potencia de la base **cinco** por ser la base de la ecuación

Una vez que todos los términos de la ecuación aparezcan con el símbolo de los logaritmos, se procede a buscar el anti-logaritmo.

Se suprimen los símbolos del logaritmo en ambos lados de la ecuación

3.-

Se expresa el término **1** que no aparece con el símbolo del logaritmo, como una potencia de la base **10** la ecuación dada.

Se efectúa la potencia

La suma del primer miembro de la ecuación se transforma en producto.

Se suprime el símbolo de los logaritmos en ambos lados de la ecuación.

Se aplica la propiedad DISTRIBUTIVA

$$2x - 6 = 10$$

$$2x = 10 + 6$$

### **EJERCICIOS:**

Efectúa cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1.-

2.-

3.-

4.-

5.-

6.-

7.-

8.-

9.-

10.-

### **SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS**

Para resolver un sistema de ecuaciones logarítmica se calcula el valor o valores de cada una de las incógnitas que conforman las ecuaciones del sistema, y para ello se aplica cualesquiera de los métodos

estudiados en noveno grado ó tercer año, de los cuales el más sencillo es el de **reducción o suma y resta**, el cual consiste en igualar los coeficientes de la incógnita elegida para eliminar intercambiando **sus coeficientes** y si los signos son iguales **cambiar el signo** de uno ellos.

Para determinar la solución de cada sistema, las soluciones de las variables deben ser expresadas en forma exponencial según la base expresada en los términos del sistema.

### **EJERCICIOS:**

Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

1.-

2.-

3.-

4.-

5.-

6.-

7.-

8.-