

II ЕТАП
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З ФІЗИКИ
7 КЛАС
2018-2019 навчальний рік

Задача 1. Мед продається в коробках, що мають форму куба. У маленькій коробці міститься 2 кілограми меду. Скільки меду в другій коробці, якщо її сторона вдвічі більша, ніж сторона маленької коробки?

Розв'язок.

Об'єм першої коробки: $V_1 = a \cdot b \cdot c = a^3$

Об'єм другої (більшої) коробки: $V_2 = (2a)^3 = 8a^3$

Напишемо формули густини меду для першої коробки:

$$\rho = \frac{m_1}{V_1} \quad (1)$$

$$\text{для другої: } \rho = \frac{m_2}{V_2} \quad (2)$$

Порівнявши формули (1) та (2) запишемо: $\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2}$

$$m_2 = V_2 \frac{m_1}{V_1}$$

$$m_2 = 8a^3 \frac{2 \text{ кг}}{a^3} = 16 \text{ кг}$$

Отже, у другій коробці 16 кг меду.

Задача 2. Вартовий, який охороняє секретний об'єкт, весь час рухається, щоб не замерзнути. Графік залежності його швидкості v (в км/год) від координати X (в км) наведено на рис. 1. Який час потрібно вартівому, щоб від точки А ($x_1 = 2$ км) дійти до точки В ($x_2 = 8$ км)?

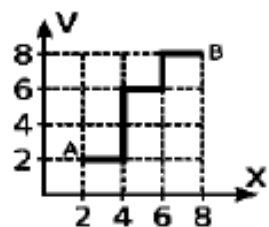
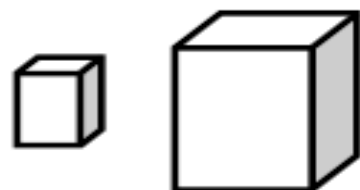


рис. 1.

Розв'язок.

Час руху вартового складається з часу, який він витрачає на проходження трьох проміжків: t_1 : від 2 км до 4 км; t_2 : від 4 км до 6 км; t_3 від 6 км до 8 км.

На кожному з цих проміжків швидкість вартового постійна. Отже, можна обчислити час його руху на кожній з цих ділянок:

$$t_1 = \frac{4 \text{ км} - 2 \text{ км}}{2 \text{ км/год}} = 1 \text{ год};$$

$$t_2 = \frac{6 \text{ км} - 4 \text{ км}}{6 \text{ км/год}} = \frac{1}{3} \text{ год} = 20 \text{ хв};$$

$$t_3 = \frac{8 \text{ км} - 6 \text{ км}}{8 \text{ км/год}} = \frac{1}{4} \text{ год} = 15 \text{ хв};$$

Таким чином, додаючи отримані результати, отримаємо: $t = t_1 + t_2 + t_3$

$$t = 1 \text{ год} + 20 \text{ хв} + 15 \text{ хв} = 1 \text{ год } 35 \text{ хв}.$$

Задача 3. Маса пробірки, заповненої до країв водою, становить 50 г. Маса цієї ж пробірки, заповненої водою, з шматком металу в ній масою 12 г становить 60,5 г. Визначте густину металу, поміщеного в пробірку. Густина води 1 г/см^3 . Відповідь виразіть в одиницях системи СІ.

Розв'язок.

Якби частина води з пробірки не вилилася, то загальна маса пробірки, води і шматка металу в ній дорівнювала: $50 \text{ г} + 12 \text{ г} = 62 \text{ г}$.

За умовою задачі маса води в пробірці з шматком металу в ній дорівнює 60,5 г. Отже, маса води, витісненої металом:

$$m_B = 62 \text{ г} - 60,5 \text{ г} = 1,5 \text{ г}.$$

Також об'єм води, витіснений металом: $V_B = \frac{m_B}{\rho_B}$;

$$V_B = \frac{1,5 \text{ г}}{1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}} = 1,5 \text{ см}^3$$

Остаточно розрахуємо густину металу $\rho_M = \frac{m_M}{V_M}$.

Враховавши, що $V_B = V_M$, остаточно маємо: $\rho_M = \frac{m_M}{V_B}$

$$\rho_M = \frac{12 \text{ г}}{1,5 \text{ см}^3} = 8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Отже, $\rho_m = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Задача 4. У Великобританії і Сполучених Штатах Америки для вимірювання об'ємів іноді використовують рідку унцію (позначають fl. Oz., 1 fl. Oz. = 29,6 мл). На підприємстві з виробництва парфумів одну тонну сировини використовують для виробництва 80 м³ одеколону, який потім розливають у флакони об'ємом 2,0 fl. oz. Розрахуйте, скільки тонн сировини потрібно закупити для виробництва партії одеколону в 5 мільйонів флаконів.

Розв'язок.

Знайдемо об'єм партії одеколону в 5 мільйонів флаконів:

$$2,0 \text{ fl. oz.} \cdot 5000000 \cdot 29,6 \frac{\text{мл}}{\text{fl.oz.}} = 296000 \text{ л} = 296 \text{ м}^3$$

Тепер знайдемо масу сировини, необхідної для виробництва зазначеної вище партії одеколону: $m_c = \frac{296 \text{ м}^3}{80 \frac{\text{м}^3}{\text{т}}} = 3,7 \text{ тонни}$.

Отже, $m_c = 3,7 \text{ тонни}$.

Задача 5. За григоріанським календарем високосними (тривалістю 366 діб) вважаються роки, номери яких кратні 4, за винятком років, номери яких діляться на 100, але не діляться на 400. Скільки діб становить середня тривалість року за григоріанським календарем?

Розв'язок.

Розглянемо 400 років (800, 1200 і т.д.)

Всі роки без урахування високосних: $T_1 = 400 \cdot 365 = 146000 \text{ (діб)}$.

Врахуємо звичайні високосні роки: $T_2 = 400 \cdot \frac{1}{4} = 100 \text{ (діб)}$.

Поправка на роки, номери яких діляться на 100, але не діляться на 400:

$$T_3 = -3 \text{ (добы)}$$

Розрахуємо середню тривалість року за григоріанським календарем:

$$T = \frac{(T_1 + T_2 + T_3)}{400} = 365,2425 \text{ (діб)}$$

Отже, 365, 2425 діб – середня тривалість року за григоріанським календарем.

7 КЛАС

2019-2020 навчальний рік

Задача 1. Моторний човен розвиває швидкість 10 км/год. З пункту А в пункт В можна добратися або озером, або річкою, обидва шляхи однакової довжини 120 км. Який спосіб швидше річкою чи озером, якщо човняр має проїхати туди і повернутися назад, швидкість течії річки 2 км/год?

Розв'язок.

Шлях туди і назад озером буде тривати:

$$t_{\text{оз}} = \frac{120 \text{ км}}{10 \frac{\text{км}}{\text{год}}} + \frac{120 \text{ км}}{10 \frac{\text{км}}{\text{год}}} = 24 \text{ години};$$

Шлях туди і назад річкою буде тривати:

$$t_{\text{р}} = \frac{120 \text{ км}}{12 \frac{\text{км}}{\text{год}}} + \frac{120 \text{ км}}{8 \frac{\text{км}}{\text{год}}} = 25 \text{ годин}.$$

Отже, швидше добиратися озером.

Задача 2. Китайському селянину потрібно побудувати пліт. Селянин знає, що хороший пліт можна спорудити з 40 цільних стовбурів бамбуку довжиною 100 чи (чи – давньокитайська міра довжини, 1 чи – 30,12 см). Але увесь бамбук навкруги вчора зрубали. Скільки часу доведеться чекати, доки він не виросте знову, якщо бамбук за добу виростає на 75,3 см, а навкруги є 60 бамбукових рослин?

Розв'язок.

Оскільки стовбури мають бути цільними, слід почекати поки кожне дерево виросте до висоти 100 чи, а потім зрубати 40 з них.

$$\text{Чекати доведеться: } \frac{100 \cdot 30,12 \text{ см}}{75,3 \frac{\text{см}}{\text{добу}}} = 40 \text{ діб}.$$

Задача 3. Бігуни Назар та Андрій змагаються з бігу. Андрій біжить зі швидкістю

6 м/с, а Назар – зі швидкістю 4 м/с. Їх змагання тривало 10 хвилин, в результаті Назар програв Андрію одне коло. Знайдіть довжину кола.

Розв'язок.

За час 10 хв. = 600 с Андрій пробіг відстань: $l_A = 6 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 600 \text{ с} = 3600 \text{ м}$;

За цей час 10 хв = 600 с Назар пробіг відстань: $l_H = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 600 \text{ с} = 2400 \text{ м}$

Андрій пробіг більше за Назара на: $l = l_A - l_H$;

$$l = 3600 \text{ м} - 2400 \text{ м} = 1200 \text{ м}.$$

$l = 1200 \text{ м}$, це і є шукана довжина кола.

Задача 4. Тупу – сільськогосподарська одиниця вимірювання земельної площі, яку використовували в деяких районах Перу і Болівії. Вона становить 60 кроків в довжину і 50 кроків в ширину, тобто близько 0,164 гектара. Визначте, скільки тисяч квадратних кроків міститься в одній квадратній милі, якщо в одній квадратній милі –

640 акрів, а в одному гектарі – 40,5 акрів.

Розв’язок.

З умови задачі отримаємо, що $0,164 \text{ га} = 60 \cdot 50 \text{ кроків}^2 = 3000 \text{ кроків}^2$

$$\Rightarrow 1 \text{ га} = \frac{3000 \text{ кроків}^2}{0,164} \approx 18292,68 \text{ кроки}^2.$$

Крім того, $1 \text{ га} = 40,5 \text{ акрів}$, $\Rightarrow 40,5 \text{ акрів} = 18292,68 \text{ кроки}^2$

$$\Rightarrow 1 \text{ акр} = \frac{18292,68 \text{ кроки}^2}{40,5} \approx 451,67 \text{ кроки}^2$$

Остаточного отримаємо $1 \text{ миля}^2 = 640 \text{ акрів} = 640 \cdot 451,67 \text{ кроки}^2 \approx 289069,6 \text{ кроків}^2$.

Задача 5. На рис. 1 показана лінійка, що має сантиметрову (cm) і дюймову (INCH) шкалу. Користуючись тільки цим малюнком, визначте з найбільшою можливою точністю, чому дорівнює 1 дюйм в сантиметрах.

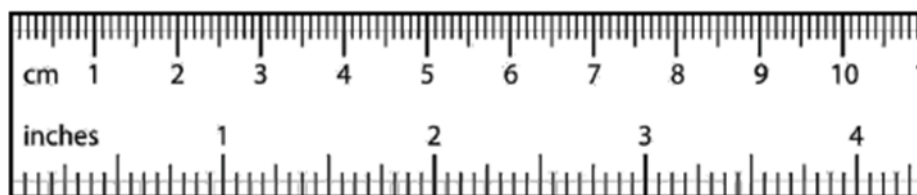


рис. 1

Розв'язок.

Необхідно одну і ту ж довжину виміряти в сантиметрах і дюймах, а потім перший результат розділити на другий. Чим більше вимірювана довжина, тим точнішу отримаємо відповідь. Найбільша довжина, яку можна виміряти, – це довжина самої лінійки. При вимірюванні потрібно звернути увагу на те, що ціна поділки дюймової шкали $1/16$ дюйма.

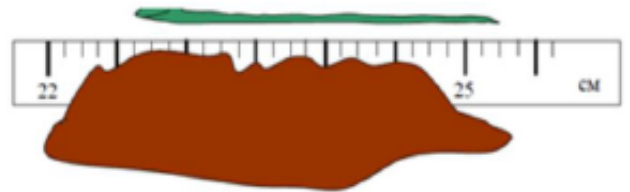
Довжина лінійки: 10,9 см або $4\frac{5}{16}$ дюйма.

Отже, 1 дюйм = $\frac{10,9 \text{ см} \cdot 16}{4 \cdot 16 + 5} \approx 2,527$ см, що достатньо близько до точного значення 2,54 см.

7 КЛАС

2021-2022 навчальний рік

Задача 1. На малюнку частина поділок шкали лінійки закрита. Визначте ціну поділки шкали лінійки, описавши послідовно свої дії. Знайдіть довжину травинки, розташованої на малюнку над лінійкою, з урахуванням похибки вимірювання, що становить ціну поділки.



Розв'язок.

Візьмемо на шкалі лінійки дві найближчі риски з числовими позначеннями. Між рисками зі значеннями 22 см і 25 см знаходиться 24 поділки.

Тому ціна поділки шкали лінійки дорівнює: $\frac{25 \text{ см} - 22 \text{ см}}{24} = 0,125 \text{ см}$.

Довжина травинки відповідає 21 поділці: $l = 0,125 \text{ см} \cdot 21 = 2,625 \text{ см}$, а з урахуванням похибки вимірювання: $l = (2,625 \pm 0,125) \text{ см}$.

Задача 2. З глини гончар Федір Лавренюк-Полив'яний виліпив виріб кубічної форми. Товщина стінок виробу виявилась рівною 2 см, а довжина його ребра – 20 см. Що більше: об'єм порожнини виробу чи об'єм витраченої глини і на скільки?

Розв'язок.

Об'єм куба $V_{\text{куб}} = (20 \text{ см})^3 = 8000 \text{ см}^3$.

Довжина ребра порожнини дорівнює: $20 \text{ см} - 2 \text{ см} - 2 \text{ см} = 16 \text{ см}$

Об'єм порожнини $V_{\text{пор}} = (16 \text{ см})^3 = 4096 \text{ см}^3$

Об'єм глини $V_{\text{гл}} = V_{\text{куб}} - V_{\text{пор}} = 8000 \text{ см}^3 - 4096 \text{ см}^3 = 3904 \text{ см}^3$

$V_{\text{пор}} - V_{\text{гл}} = 4096 \text{ см}^3 - 3904 \text{ см}^3 = 192 \text{ см}^3$

Об'єм порожнини виробу більше об'єму витраченої глини на 192 см^3 .

Задача 3. Запишіть назви тварин в порядку спадання значень швидкості їх руху.

Заєць (50 км/год)	Акула (20 м/с)	Слон (0,1 км/хв)
Муха (300 м/хв)	Черепаша (60 см/хв)	Метелик (8000 м/год)

Розв'язок.

1. Акула: 20 м/с (72 км/год)
2. Заєць: $\approx 16,67 \text{ м/с}$ (50 км/год)
3. Муха: $300 \text{ м/хв} = 5 \text{ м/с}$ (18 км/год)
4. Метелик: $8000 \text{ м/год} \approx 2,22 \text{ м/с}$ (8 км/год)
5. Слон: $0,1 \text{ км/хв} \approx 1,67 \text{ м/с}$ (6 км/год)
6. Черепаша: $60 \text{ см/хв} = 0,1 \text{ м/с}$ (0,36 км/год)

Відповідь: Акула, заєць, муха, метелик, слон, черепаха

Задача 4. «Протистояння Землі і Марса». У момент протистояння Сонце, Земля і Марс знаходяться на одній прямій (Земля між Сонцем і Марсом). Вважаючи, що планети обертаються навколо Сонця по кругових орбітах, що лежать в одній площині, визначте, через який проміжок часу протистояння Землі та Марса повторюються. Планети рухаються в одну сторону. Марс обертається навколо Сонця за 687 земних діб, а Земля – за 365 діб.

Розв'язок.

За проміжок часу t від одного протистояння до іншого Марс здійснює n обертів, а Земля $(n + 1)$ оберт (n не обов'язково ціле!). Цей проміжок

часу виражається через періоди обертання Землі і Марса навколо Сонця:

$$t = nT_M,$$

$$t = (n + 1)T_3.$$

Прирівнюючи, знайдемо

$$n = \frac{T_3}{T_M - T_3} \approx 1,13$$

Отже,

$$t = \frac{T_3 T_M}{T_M - T_3} \approx 779 \text{ діб}$$

Задача 5. Мандрівник котить валізу на двох коліщатах зі швидкістю $v = 3,6$ км/год по доріжці, що укладена квадратною тротуарною плиткою, в напрямку перпендикулярному до стиків між плитками. Розмір тротуарної плитки дорівнює $a = 80$ см. Скільки разів за секунду колеса стукають, потрапляючи в стик між плитками?

Розв'язок.

Частота стуку коліс $n = \frac{1}{T}$ визначається величиною, оберненою часу проходження однієї плитки: $T = \frac{a}{v}$.

Тоді шукана частота стуку коліс: $n = \frac{v}{a}$

$$n = \frac{1 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{0,8 \text{ м}} = 1,25 \text{ разів за секунду}$$

7 КЛАС

2022-2023 навчальний рік

Задача 1. За добу молодий бамбук може вирости на 86,4 см. На скільки він виросте за одну секунду?

Розв'язок. 0,01 мм.

Задача 2. Студент Андрій виміряв масу та об'єм цеглини. Вони, відповідно, дорівнюють: $m = 5400$ (...), $V = 1800$ (...). Потім він обчислив густину цеглини: $\rho = 0,003$ (...). Але Андрій забув вказати, в яких одиницях записані ці величини. Враховуючи міркування, які ґрунтуються на Вашому життєвому досвіді, відновіть одиниці, в яких виражена маса, об'єм та густина цеглини. Відомо, що маса

вимірюється в грамах, кілограмах або тоннах, об'єм – мм³, см³, дм³ або м³.

Розв'язок.

Враховуючи життєвий досвід з впевненістю можна стверджувати, що маса цеглини не перевищує кількох кілограм, тому:

$$m = 5,4 \text{ кг} = 5400 \text{ г.}$$

Об'єм цеглини не перевищує кількох дм³, тому: $V = 1,8 \text{ дм}^3 = 1800 \text{ см}^3$.

За означенням густини: $\rho = \frac{m}{V}$;

$$\text{Густина цеглини: } \rho = \frac{5400 \text{ г}}{1800 \text{ см}^3} = 3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 0,003 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}$$

Задача 3. На першій ділянці дороги автомобіль їхав зі швидкістю $v_1 = 12,5 \text{ м/с}$, на другій – зі швидкістю $v_2 = 60 \text{ км/год}$. Середня швидкість руху на всьому шляху дорівнювала $v_{\text{ср}} = 50 \text{ км/год}$. Яка з ділянок дороги довша і у скільки разів?

Розв'язок.

$$v_1 = 12,5 \text{ м/с} = 45 \text{ км/год.}$$

Нехай час руху автомобіля на першій ділянці дороги дорівнює t_1 , а на другій ділянці – t_2 .

$$\text{Довжина всього шляху } l = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = v_{\text{ср}} \cdot (t_1 + t_2) \quad (1)$$

Після відповідних перетворень рівняння (1) отримаємо співвідношення:

$$v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = v_{\text{ср}} \cdot t_1 + v_{\text{ср}} \cdot t_2$$

$$v_1 \cdot t_1 - v_{\text{ср}} \cdot t_1 = v_{\text{ср}} \cdot t_2 - v_2 \cdot t_2$$

$$t_1 (v_1 - v_{\text{ср}}) = t_2 (v_{\text{ср}} - v_2)$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2 - v_{\text{ср}}}{v_{\text{ср}} - v_1},$$

$$\text{Звідки слідує: } \frac{l_1}{l_2} = \frac{t_1 v_1}{t_2 v_2} = \frac{v_2 - v_{\text{ср}}}{v_{\text{ср}} - v_1} \cdot \frac{v_1}{v_2} = 1,5$$

Задача 4. Дерев'яний куб із довжиною ребра $l_0 = 10 \text{ см}$ обліпили з усіх боків пластиліном так, що вийшов куб із довжиною ребра $l_1 = 12 \text{ см}$. Скільки кілограмів пластиліну використали, якщо його густина $\rho = 1370 \text{ кг/м}^3$?

Розв'язок.

Об'єм дерев'яного куба: $V_0 = l_0^3 = (10 \text{ см})^3 = 1000 \text{ см}^3$.

Об'єм нового куба: $V_1 = l_1^3 = (12 \text{ см})^3 = 1728 \text{ см}^3$.

Об'єм пластиліну, який було використано:

$$V = V_1 - V_0 = 1728 \text{ см}^3 - 1000 \text{ см}^3 = 728 \text{ см}^3 = 0,000728 \text{ м}^3.$$

За означенням густини: $\rho = \frac{m}{V}$; $\Rightarrow m = \rho \cdot V$;

$$\text{Отже, } m = 1370 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 0,000728 \text{ м}^3 = 0,99736 \text{ кг} \approx 1 \text{ кг}.$$

7 КЛАС**2023-2024 навчальний рік**

Задача 1. Софійка спекла 15 пиріжків, склала їх у кошик та вирушила через ліс до бабусі. Коли до бабусі залишалося пройти 3 км, з хашів вискочив голодний вовк. Дівчинка, побачивши його, кинула йому один пиріжок та побігла зі швидкістю 2,5 м/с. Вовк з'їв пиріжок за одну хвилину та побіг за Софійкою зі швидкістю 5 м/с. Тоді дівчинка почала кидати пиріжки, як тільки вовк наздоганяв її. Так вона добігла до бабусинового будинку. Скільки пиріжків дісталось бабусі?

Розв'язок.

Поки вовк буде їсти пиріжок, Софійка пробіжить відстань:

$$l_1 = 2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 60 \text{ с} = 150 \text{ м}$$

$$\text{Вовк дожене її за час: } t_1 = \frac{150 \text{ м}}{5 \frac{\text{м}}{\text{с}} - 2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 60 \text{ с}$$

$$\text{Вовк буде їсти пиріжок та доганяти: } t_2 = 60 \text{ с} + 60 \text{ с} = 120 \text{ с}$$

$$\text{Софійка пробіжить 3 км за час: } t_3 = \frac{3000 \text{ м}}{5 \frac{\text{м}}{\text{с}} - 2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 1200 \text{ с}$$

$$\text{Вовк дожене її: } n = \frac{1200 \text{ с}}{120 \text{ с}} = 10 \text{ разів, тобто Софійка кине вовкові}$$

10 пиріжків, бабусі дістанеться 5 пиріжків (врахуємо, що коли вовк дожене Софійку 10 раз, вона буде у бабусі і кидати пиріжка не буде).

Задача 2. Визначте в одиницях СІ площу поверхні тіла (рис. 1).

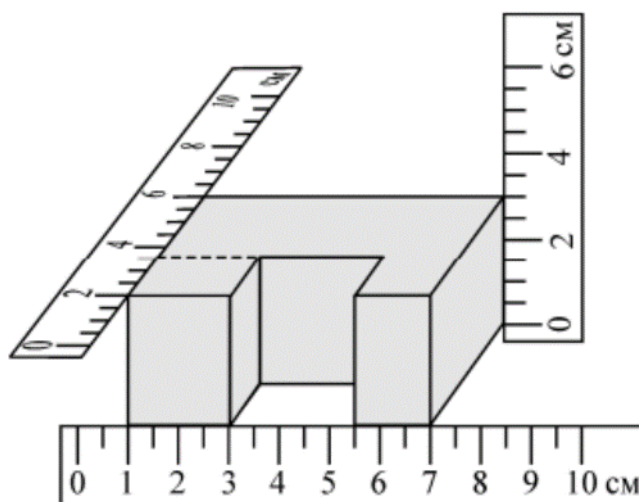


рис. 1

Розв'язок. $S = 0,01095 \text{ м}^2$

Задача 3. У спиртовому термометрі Реомюра інтервал між температурами танення снігу $0^\circ\text{C} = 0^\circ\text{R}$ та кипіння води $100^\circ\text{C} = 80^\circ\text{R}$ поділено не на 100 частин, як у термометрі Цельсія, а на 80 частин. Якою є температура зафіксованого 16 липня 2023 році в Китаї температурного рекорду $52,2^\circ\text{C}$ за шкалою Реомюра?

Розв'язок.

$$100^\circ\text{C} = 80^\circ\text{R}, \Rightarrow 1^\circ\text{C} = 0,8^\circ\text{R} \Rightarrow 52,2^\circ\text{C} = 41,76^\circ\text{R}$$

Задача 4. Відпочивальник проїхав велосипедом за один день 40 км. При цьому з 08:00 до 09:20 він їхав зі швидкістю 2,5 м/с, а з 09:20 до 10:40 – зі швидкістю 12 км/год. Потім він займався спортом та розважався в аквапарку. На шлях, що залишився, він витратив час з 19:00 до 19:45. Визначте середню швидкість руху відпочивальника на вечірній ділянці подорожі.

Розв'язок.

1. $08:00 - 09:20 - 1 \text{ год } 20 \text{ хв} = \frac{4}{3} \text{ год} = 80 \text{ хв}; 2,5 \text{ м/с} \cdot 3,6 = 9 \text{ км/год}$
2. $09:20 - 10:40 1 \text{ год } 20 \text{ хв} = \frac{4}{3} \text{ год} = 80 \text{ хв};$
3. $19:00 - 19:45 \frac{3}{4} \text{ год} = 45 \text{ хв}$

З 08:00 до 09:20 відпочивальник проїхав шлях: $l_1 = v_1 \cdot t_1$

$$l_1 = 9 \frac{\text{км}}{\text{год}} \cdot \frac{4}{3} \text{ год} = 12 \text{ км}$$

З 09:20 до 10:40 відпочивальник проїхав шлях: $l_2 = v_2 \cdot t_2$

$$l_2 = 12 \frac{\text{км}}{\text{год}} \cdot \frac{4}{3} \text{ год} = 16 \text{ км}$$

З 19:00 до 19:45 відпочивальник витратив час на шлях:

$$l_3 = 40 \text{ км} - 12 \text{ км} - 16 \text{ км} = 12 \text{ км}$$

Середня швидкість руху відпочивальника на вечірній ділянці

подорожі: $v_3 = \frac{l_3}{t_3}$

$$v_3 = \frac{12 \text{ км}}{\frac{3}{4} \text{ год}} = 16 \text{ км/год}$$

7 КЛАС

2024-2025 навчальний рік

Задача 1. Визначте кут (у градусах), на який повертається годинникова стрілка настінного годинника за 3 години 24 хвилини.

Розв'язок.

Повний оберт (360°) годинникова стрілка настінного годинника робить за 12 годин, тобто за $12 \cdot 60$ хвилин = 720 хвилин.

3 години 24 хвилини = $3 \cdot 60$ хвилин + 24 хвилини = 204 хвилини.

Шуканий кут можна знайти з пропорції:

$$720 \text{ хвилин} - 360^\circ$$

$$204 \text{ хвилини} - x \text{ градусів}$$

$$\text{Звідки } x = 102 \text{ градуси.}$$

Задача 2. Хлопчик піднімається схилом пагорба зі швидкістю $1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Коли до вершини залишається 200 м, він відпускає собаку, який починає бігати між хлопчиком і вершиною гори. Собака біжить до вершини зі швидкістю $3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а повертається до хлопчика зі швидкістю

$5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Який шлях пройде собака до моменту, коли хлопчик досягне вершини? Розміри хлопчика і собаки не беріть до уваги; вважайте, що собака змінює напрямок руху миттєво.

Розв'язок.

$$v = \frac{l}{t}; \quad t = \frac{l}{v}; \quad t = \frac{200 \text{ м}}{1 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 200 \text{ с.}$$

Хлопчик дістанеться вершини за 200 с.

Розглянемо рух собаки в системі відліку, пов'язаній із хлопчиком. Рухаючись до вершини, собака віддаляється від хлопчика зі швидкістю $2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а на зворотному шляху наближається до хлопчика зі швидкістю

$6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, тобто втричі швидше. Це означає, що на кожне повернення собака витрачає втричі менше часу. Можемо зробити висновок, що собака рухається вгору по пагорбу $\frac{3}{4}$ всього часу руху:

$$\frac{3}{4} \cdot 200 \text{ с} = 150 \text{ с, а вниз} - \frac{1}{4} \text{ всього часу руху } \frac{1}{4} \cdot 200 \text{ с} = 50 \text{ с.}$$

Знайдемо пройдений собакою відносно Землі шлях:

$$s = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 150 \text{ с} + 5 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 50 \text{ с} = 450 \text{ м} + 250 \text{ м} = 700 \text{ м}$$

Задача 3. Водій купив у торгівельному центрі «Епіцентр» пляшку зимового концентрату омивача автомобільного об'ємом 1 літр. Для розведення розчину необхідно використовувати воду та концентрат у співвідношенні сім до трьох (7 частин води на 3 частини концентрату). На скільки днів вистачить літрової ємності концентрату, якщо відомо, що протягом тижня витрачається 750 мл розчину? Примітка: при змішуванні води та концентрату об'єм розчину дорівнює сумі об'ємів його складових.

Розв'язок.

Розрахуємо долю концентрату в розчині: $\frac{3}{(3+7)} = 0,3$

Визначимо об'єм розчину, який можна отримати з 1 літра концентрату:

$$\frac{1 \text{ л}}{0,3} = \frac{10}{3} \text{ л}$$

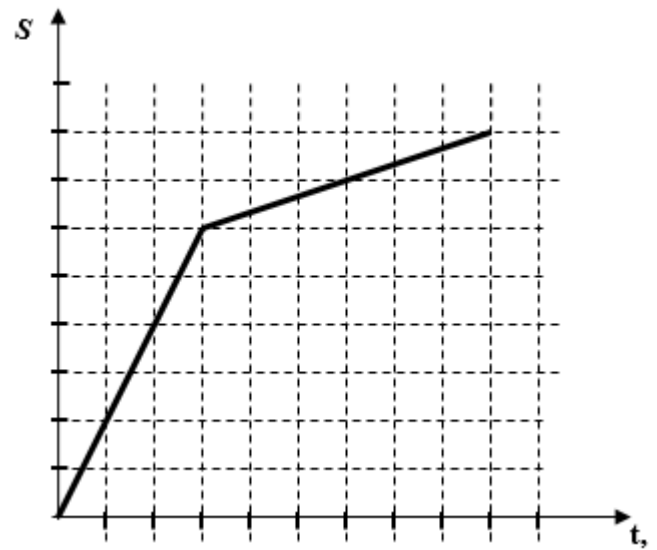
$$750 \text{ мл} = 0,75 \text{ л}$$

Розрахуємо на скільки тижнів вистачить приготовленого розчину:

$$\left(\frac{10}{3} \text{ л}\right) : \left(\frac{0,75 \text{ л}}{\text{тижд.}}\right) = \frac{40}{9} \text{ тижнів}$$

Знаходимо на скільки днів вистачить літрової ємності концентрату омивача автомобільного: $\frac{40}{9}$ тижнів $\frac{7 \text{ днів}}{\text{тиждень}} \approx 31 \text{ день}$

Задача 4. Відомо, що першу частину шляху автомобіль їхав зі швидкістю $108 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Визначте швидкість автомобіля на другій частині шляху і середню швидкість на всьому шляху, якщо графік залежності шляху від часу має вигляд двох прямолінійних відрізків.



Розв'язок.

З графіка:

- нехай одна поділка для часу – 1 год.;
- тоді одна поділка для шляху – 54 км.

Визначасмо швидкість автомобіля на другій частині шляху:

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2}; \quad v_2 = \frac{54 \frac{\text{км}}{\text{год}}}{3 \text{ год}} = 18 \frac{\text{км}}{\text{год}}$$

Розрахуємо середню швидкість автомобіля на всьому шляху:

$$v_{\text{сеп}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}; \quad v_{\text{сеп}} = \frac{324 \text{ км} + 108 \text{ км}}{3 \text{ год} + 6 \text{ год}}$$

$$v_{\text{сеп}} = 48 \frac{\text{км}}{\text{год}}$$

8 КЛАС

2018-2019 навчальний рік

Задача 1. Людина, стоячи на ескалаторі, спускається вниз до потягів метро за 6 хвилин. Якщо вона поспішає і біжить по ескалатору, то час її спуску зменшується до 2 хвилин. За якийсь час вона підніметься вгору по рухомому вниз ескалатору, якщо буде бігти по ньому з тією ж швидкістю?

Розв'язок.

Введемо позначення:

l – довжина шляху по ескалатору;

v_e – швидкість ескалатора;

$v_{\text{л}}$ – швидкість людини, що біжить відносно ескалатора;

$t = 6$ хв – час спуску вниз, коли людина стоїть нерухомо на ескалаторі;

$t_1 = 2$ хв – час спуску вниз, коли людина біжить вниз по ескалатору;

t_2 = час, який необхідно знайти, коли людина біжить вгору по ескалатору.

Запишемо, чому дорівнює пройдена відстань, коли людина спускається вниз, стоячи на ескалаторі: $l = v_e \cdot t$

Запишемо, чому дорівнює пройдена відстань, коли людина біжить вниз по ескалатору: $l = (v_e + v_{\text{л}}) t_1$ (1) $\Rightarrow v_e \cdot t = (v_e + v_{\text{л}}) t_1$

$$3 v_e = v_e + v_{\text{л}} \Rightarrow v_{\text{л}} = 2 v_e$$

Отже, швидкість людини щодо ескалатора буде в 2 рази більше, ніж швидкість самого ескалатора.

Випадок, коли людина біжить вгору по рухомому вниз ескалатору з тією ж швидкістю $v_{\text{л}}$: $l = (v_{\text{л}} - v_e) t_2$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{l}{v_{\text{л}} - v_e} \quad (2)$$

Підставимо формулу (1) у формулу (2) отримаємо:

$$t_2 = \frac{(v_e + v_{\text{л}}) t_1}{v_{\text{л}} - v_e}, \text{ врахуємо, що } v_{\text{л}} = 2 v_e \Rightarrow t_2 = \frac{(v_e + 2v_e) t_1}{2v_e - v_e}$$

$$t_2 = \frac{3v_e t_1}{v_e} = 3 t_1, \text{ остаточно: } t_2 = 3 \cdot 2 \text{ хв} = 6 \text{ хв}$$

Задача 2. З гармати, ствол якої встановлено горизонтально, здійснюють постріл по мішені. Розрив снаряду побачили через $t_1 = 0,6$ секунди, а звук від розриву снаряду почули через $t_2 = 2,1$ секунди після пострілу. На якій відстані від гармати знаходиться мішень? З якою горизонтальною швидкістю рухався снаряд? Швидкість звуку вважати рівною 340 м/с. Опором повітря знехтувати.

Розв'язок.

Швидкість світла набагато більша за швидкість звуку у повітрі. Тому час t_1 дорівнює часу польоту снаряда.

Час t_2 є сумою часу руху снаряду і часу розповсюдження звуку від мішені до гармати. Тоді час розповсюдження звуку: $t = t_2 - t_1$.

Дальність польоту снаряда: $S = v_{\text{зв}}(t_2 - t_1) = 510$ метрів.

$$\text{Швидкість снаряду: } v_{\text{сн}} = \frac{S}{t_1} = \frac{v_{\text{зв}}(t_2 - t_1)}{t_1}$$

$$v_{\text{сн}} = \frac{510 \text{ м}}{0,6 \text{ с}} = 850 \text{ м/с}$$

Задача 3. На рисунку зображений важіль масою 2 кг. До нього підвішені 2 вантажі. Перший масою 5 кг. Визначте масу другого вантажу.



Розв'язок.

Центр тяжіння важеля, якщо він однорідний, посередині. Це одна поділка справа.

Запишемо правило моментів сил:

$$m_1 \cdot g \cdot 2l = mg \cdot l + m_2 g \cdot 4l$$

$$m_2 = \frac{(2m_1 - m)}{4} = 2 \text{ кг}$$

l – довжина однієї поділки на важелі.

Задача 4. В одному з рекламних роликів по телевізору хлопчик побачив порівняння дорогої бензинові запальнички і звичайної газової. У цьому ролику брали дві однакові склянки з водою і нагрівали їх за допомогою запальничок до температури кипіння води. Дорога запальничка нагрівала за $t_1 = 2$ хвилини, а звичайна за $t_2 = 4$ хвилини. Хлопчик подумав «Цікаво, а скільки часу необхідно затратити на нагрів склянки води одночасно цими двома запальничками?» Допоможіть хлопчику отримати відповідь.

Можливий розв'язок.

У всіх трьох випадках необхідно надавати однакову кількість теплоти

$$Q = P_1 t_1$$

$$Q = P_2 t_2$$

$$Q = (P_1 + P_2) t_3,$$

де P_1 і P_2 потужності дорогої і звичайної запальничок відповідно.

Розв'язуємо систему рівнянь.

$$P_1 t_1 = P_2 t_2 \quad (1); \quad P_1 t_1 + P_2 t_2 = 2Q \quad (2); \quad 2Q = 2(P_1 + P_2) t_3 \quad (3)$$

З рівняння (2) і (3) отримаємо: $P_1 t_1 + P_2 t_2 = 2(P_1 + P_2) t_3$, врахувавши рівняння (1)

$$P_1 t_1 = P_2 t_2, \Rightarrow P_1 = \frac{P_2 t_2}{t_1}$$

$$P_2 t_2 + P_2 t_2 = 2\left(\frac{P_2 t_2}{t_1} + P_2\right) t_3$$

$$2P_2 t_2 = 2\left(\frac{P_2 t_2}{t_1} + P_2\right) t_3$$

$$t_3 = \frac{\frac{P_2 t_2}{t_1} + P_2}{\frac{P_2 t_2}{t_1} + P_2}$$

$$t_3 = \frac{t_2 t_1}{t_2 + t_1}$$

$$t_3 = \frac{2 \text{ хв} \cdot 4 \text{ хв}}{2 \text{ хв} + 4 \text{ хв}}$$

$$t_3 = \frac{4}{3} \text{ хв}$$

отримаємо $t_3 = \frac{4}{3} \text{ хв}$ (1 хвилина 20 секунд)

Задача 5. Пасажир, що сидить в поїзді, звернув увагу на те, що міст «проїхав» повз нього за час $t_1 = 20$ с. Поїзд рухався по мосту рівномірно протягом часу $t_2 = 70$ с (це час, який минув від моменту в'їзду на міст локомотива до моменту з'їзду з моста останнього вагона). У скільки разів довжина поїзда більше довжини моста? Отримайте відповідь у вигляді формули і потім знайдіть чисельну відповідь.

Розв'язок.

Нехай v – швидкість потягу. Тоді довжина моста дорівнює:

$$l = vt_1$$

Довжина потягу дорівнює:

$$L = vt_2 - l = vt_2 - vt_1 = v(t_2 - t_1)$$

Остаточно отримаємо:

$$\frac{L}{l} = \frac{t_2 - t_1}{t_1} = 2,5 \text{ рази.}$$

8 КЛАС**2019-2020 навчальний рік**

Задача 1. Короб – міра об'єму засипного деревного вугілля, заготовленого на гірських заводах. Згідно з указом 1847 року для казенних заводів нормальна форма коробу визначена як перевернута зрізана піраміда з прямокутною підставою (в чвертях аршини) довжиною 12 і шириною 3, вгорі довжиною 14 і шириною 6, при висоті 6, тобто рівна за обсягом 22 656 куб. вершків (або за масою 20 пудів вугілля). За текстом цього указу визначте, чому дорівнює середня густина засипаного в короб деревного вугілля, виражена в кг/м^3 . Відомо, що 1 пуд = 16,38 кг, 1 аршин складається з 16 вершків, 1 аршин = 0,711 метра.

Розв'язок.

1 пуд = 16,38 кг, отже 20 пудів = $20 \cdot 16,38 = 327,6$ кг
16 вершків = 0,711 м, отже 22656 куб вершків = $22656 \cdot \left(\frac{0,711}{16}\right)^3 \approx 1,988 \text{ м}^3$. Отже, густина деревного вугілля:

$$\rho = \frac{327,6 \text{ кг}}{1,988 \text{ м}^3} \approx 165 \text{ кг/м}^3$$

Задача 2. В посудині (рис. 1) знаходиться ртуть. Горизонтальні перерізи трубок однакові. У ліву трубку налили воду, висота стовпа якої $h = 80$ мм, а в праву – олію, що утворило стовп деякої висоти h_0 . Після цього у середній трубці



рівень ртуті піднявся на

$\Delta h = 5$ мм. Знайти висоту h_0 стовпа олії, наливої у праву трубку.

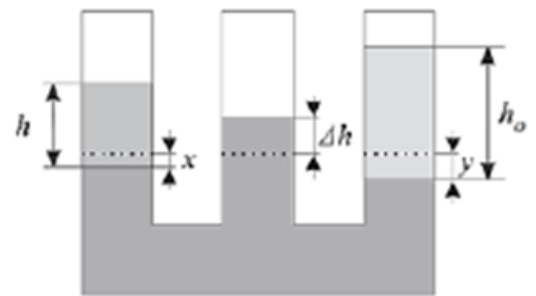
Густина води $\rho = 1000$ кг/м³, олії –

$\rho_0 = 800$ кг/м³, ртуті – $\rho_1 = 13600$ кг/м³.

рис. 1

Розв'язок.

Нехай після наливання води й олії рівень ртуті у лівій трубці понизився на x , а у правій на y . Тоді можна записати умову рівноваги стовпів рідин:



$$\rho g h = \rho_1 g (\Delta h + x)$$

$$\rho_0 g h_0 = \rho_1 g (\Delta h + y)$$

Оскільки рідини вважаються нестискуваними, то $x + y = \Delta h$.

Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$\rho g h + \rho_0 g h_0 = \rho_1 g (\Delta h + x) + \rho_1 g (\Delta h + y)$$

$$\rho h + \rho_0 h_0 = \rho_1 (\Delta h + x + \Delta h + y)$$

$$\rho h + \rho_0 h_0 = \rho_1 (\Delta h + \Delta h + \Delta h)$$

$$\rho h + \rho_0 h_0 = 3\rho_1 \Delta h$$

$$\text{Остаточно отримаємо: } h_0 = \frac{3\rho_1 \Delta h - \rho h}{\rho_0}; \quad h_0 = 155 \text{ мм}$$

Задача 3. Пробка плаває спочатку у воді, а потім в маслі. Знайдіть відношення $\frac{V_B}{V_M}$, де V_B - обсяг зануреної частини пробки при плаванні

у воді, а V_M - при плаванні в маслі. Густина води $\rho_B = 1,0$ г/см³, густина масла $\rho_M = 0,9$ г/см³. Відповідь дайте у вигляді десяткового числа, округливши його до десятих.

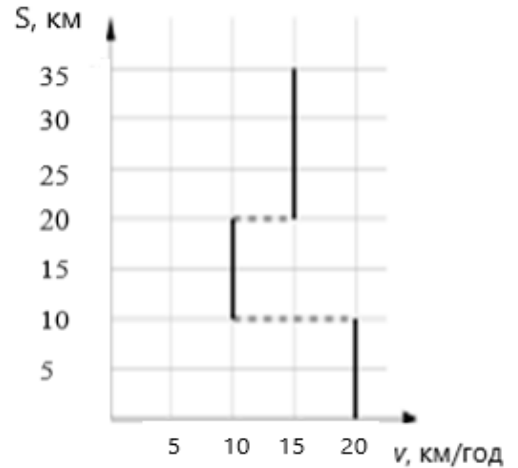
Розв'язок.

Діюча на плаваючу пробку сила Архімеда дорівнює за модулем силі тяжіння, що діє на пробку, а тому в обох випадках однакова.

$$\text{Отже } \frac{F_{\text{Арх В}}}{F_{\text{Арх М}}} = \frac{\rho_{\text{В}} g V_{\text{В}}}{\rho_{\text{М}} g V_{\text{М}}} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{В}} g V_{\text{В}}}{\rho_{\text{М}} g V_{\text{М}}} = 1 \Rightarrow \frac{V_{\text{В}}}{V_{\text{М}}} = \frac{\rho_{\text{М}}}{\rho_{\text{В}}}$$

$$\frac{V_{\text{В}}}{V_{\text{М}}} = \frac{0,9}{1}; \quad \frac{V_{\text{В}}}{V_{\text{М}}} = 0,9$$

Задача 4. Велосипедист здійснював подорож з міста Знам'янка до міста Кропивницький, між якими знаходиться село Суботці. Виїхавши зі Знам'янки, велосипедист спочатку їхав трасою, згодом пересік Суботці, а потім поїхав путівцем до Кропивницького. Графік пройденого велосипедистом шляху S в залежності від його швидкості v наведено на рисунку. Визначте середню швидкість велосипедиста у цій подорожі, а також час, який він затратив на кожній ділянці шляху.



Розв'язок.

Як видно із графіку, довжина першої ділянки шляху (траса) складає 10 км, другого (Суботці): 20 км – 10 км = 10 км, третього (путівець): 35 км – 20 км = 15 км. Розділивши ці величини на відповідні швидкості, знайдемо, скільки часу провів велосипедист на кожній ділянці:

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{10 \text{ км}}{20 \text{ км/год}} = 0,5 \text{ год}$$

$$t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{10 \text{ км}}{10 \text{ км/год}} = 1 \text{ год}$$

$$t_3 = \frac{S_3}{v_3} = \frac{15 \text{ км}}{15 \text{ км/год}} = 1 \text{ год}$$

Загальний час руху в дорозі складає 2,5 год, а загальний пройдений шлях – 35 км, отже за означенням середня швидкість:

$$v_{\text{сер}} = \frac{S}{t}; \quad v_{\text{сер}} = \frac{35 \text{ км}}{2,5 \text{ год}} = 14 \text{ км/год}$$

2021-2022 навчальний рік

Задача 1. На початку зими покази двох вуличних термометрів (один проградуйований у градусах Цельсія, а інший у градусах Фаренгейта) збігаючись по модулю мають різні знаки: $-11,5^{\circ}\text{C}$ і $11,5^{\circ}\text{F}$. Коли настали суворі морози, показання термометрів знову збіглися, але тепер вже і по знаку: -40°C і -40°F . Визначте, яку температуру показує термометр в градусах Цельсія, коли показання другого рівні $+40^{\circ}\text{F}$.

Розв'язок:

Оскільки обидві шкали лінійні, то лінійний і закон перетворення з градусів Фаренгейта у градуси Цельсія. Запишемо його:

$$T_C = aT_F + b, \text{ де } a \text{ і } b - \text{сталі коефіцієнти.}$$

$$T_{F_1} = 11,5^{\circ}\text{F}, \quad T_{C_1} = -11,5^{\circ}\text{C},$$

$$T_{F_2} = -40^{\circ}\text{F}, \quad T_{C_2} = -40^{\circ}\text{C},$$

$$T_{F_3} = 40^{\circ}\text{F}, \quad T_{C_3} - \text{необхідно знайти.}$$

$$\text{Розв'язуючи систему, отримуємо } a = \frac{T_{C_1} - T_{C_2}}{T_{F_1} - T_{F_2}} = 0,56^{\circ}\text{C}/^{\circ}\text{F}$$

$$b = \frac{T_{C_2} \cdot T_{F_1} - T_{C_1} \cdot T_{F_2}}{T_{F_1} - T_{F_2}} = -17,9^{\circ}\text{C}$$

Підставивши $T_{F_3} = 40^{\circ}\text{F}$ в отриманий закон переводу, отримаємо:

$$T_{C_3} = aT_{F_3} + b = 4,5^{\circ}\text{C}$$

Задача 2. Стрижень циліндричної форми довжиною l складається на половину своєї довжини зі свинцю, а на половину – із заліза. Його центр ваги (мас) розташований на відстані $x = 1,9$ см від середини стрижня в сторону свинцевою частини. Визначте довжину стрижня, якщо густина свинцю – 11340 кг/м^3 , а густина заліза – 7874 кг/м^3 .

Розв'язок.

Оскільки половинки стрижня (свинцева та залізна) однорідні та рівні за об'ємом, центри ваги (мас) половинок розміщені на відстані $l/4$ від середини стрижня; сили тяжіння, що діють на половинки, пропорційні їх масам, отже, густинам. Запишемо правило (умову) рівноваги важеля:

$$m_1 g \left(\frac{l}{4} - x \right) = m_2 g \left(\frac{l}{4} + x \right)$$

$$\rho_c \left(\frac{l}{4} - x \right) = \rho_z \left(\frac{l}{4} + x \right)$$

$$\frac{l}{4} \rho_c - \rho_c x = \frac{l}{4} \rho_z + \rho_z x$$

$$\frac{l}{4} \rho_c - \frac{l}{4} \rho_z = \rho_c x + \rho_z x$$

$$l(\rho_c - \rho_z) = 4x(\rho_c + \rho_z)$$

$$l = \frac{4x(\rho_c + \rho_z)}{\rho_c - \rho_z}$$

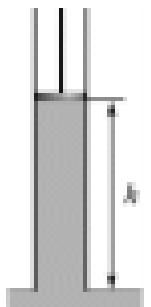
$$l = 42,13 \text{ см}$$

Задача 3. З якою силою потрібно тягнути вгору поршень насоса для того, щоб підняти воду на висоту $h = 5 \text{ м}$? Площа поперечного перерізу трубки насоса $S = 4 \text{ см}^2$, атмосферний тиск дорівнює 760 мм рт. ст., густина води $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, прискорення вільного падіння 10 Н/кг .

Розв'язок.

Тиск води під поршнем буде на $\Delta p = \rho g h$ менший за атмосферний, отже сила атмосферного тиску, яка діє на поршень та спрямована донизу, більша за силу тиску води на поршень на $\Delta F = \rho g h S$;

$\Delta F = 20 \text{ Н}$. Саме з такою силою необхідно тягнути поршень.



Задача 4. Вага зливка золота та срібла в повітрі дорівнює 240 Н, а у воді – 220 Н. Визначте вміст (масу) золота і срібла в зливку. Виштовхувальною силою в повітрі знехтувати. Густина срібла 10500 кг/м^3 , золота 19300 кг/м^3 , води 1000 кг/м^3 .

Розв'язок.

Введемо умовні позначення: величини з індексом 0 – в повітрі, з індексом 1 – у воді; нумерація тіл: 2 – вода, 3 – золото, 4 – срібло.

На підставі рівноваги сил зливка в повітрі

$$m_3 g + m_4 g = P_0$$

У воді з урахуванням сили Архімеда:

$$m_3 g + m_4 g - \rho_2 (V_3 + V_4) g = P_1$$

Об'єми золота і срібла виразимо через маси і густини:

$$V_3 = \frac{m_3}{\rho_3}$$

$$V_4 = \frac{m_4}{\rho_4}$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_3 g + m_4 g = P_0 \\ m_3 g + m_4 g - \rho_2 \left(\frac{m_3}{\rho_3} + \frac{m_4}{\rho_4} \right) g = P_1 \end{cases}$$

Використовуючи метод виключення невідомих, знаходимо m_3 та m_4 :

$$m_3 = \rho_3 \frac{P_0 \rho_2 - \rho_4 (P_0 - P_1)}{g \rho_2 (\rho_3 - \rho_4)} = 6,58 \text{ кг}$$

$$m_4 = \rho_4 \frac{(P_0 - P_1) \rho_3 - P_0 \rho_2}{g \rho_2 (\rho_3 - \rho_4)} = 17,42 \text{ кг}$$

Задача 5. Після того, як автобус проїхав першу половину шляху, він потрапив в дорожню пробку. В результаті його середня швидкість на другій половині шляху в 8 разів менша, ніж на першій. Середня швидкість автобуса на всьому шляху дорівнює 16 км/год. Визначте швидкість автобуса на другій половині шляху.

Розв'язок.

Нехай $v_{\text{сер}}$ – середня швидкість руху на всьому шляху s , а t_1 , t_2 , v_1 , v_2 – час та швидкості на першій та другій половинах шляху відповідно.

Весь час руху автобуса дорівнює $t = t_1 + t_2$.

За умовою задачі $t_1 = \frac{\frac{S}{2}}{8v_2} = \frac{S}{16v_2}$ та $t_2 = \frac{\frac{S}{2}}{v_2} = \frac{S}{2v_2}$

Використовуючи ці вирази, знаходимо час руху автобуса:

$$t = \frac{S}{16v_2} + \frac{S}{2v_2} = \frac{9S}{16v_2}.$$

З формули $v_{\text{сер}} = \frac{S}{t}$ визначаємо $t = \frac{S}{v_{\text{сер}}}$.

$$\text{Таким чином, } \frac{9S}{16v_2} = \frac{S}{v_{\text{сер}}} \Rightarrow v_2 = \frac{9v_{\text{сер}}}{16}$$

$$v_2 = 9 \text{ км/год}$$

8 КЛАС

2022-2023 навчальний рік

Задача 1. Богдан, водій мікроавтобуса, їхав із Кропивницького в Суботці з постійною швидкістю $v_1 = 80$ км/год. На зворотному шляху траса була завантаженою, тому він їхав зі швидкістю $v_2 = 30$ км/год стільки часу, скільки затратив на шлях від Кропивницького до Суботців. Ділянка дороги, що залишилась, була вільною, через те Богдан почав рухатись зі швидкістю $v_3 = 100$ км/год. Визначте середню швидкість мікроавтобуса на всьому шляху від Кропивницького до Суботців і назад.

Розв'язок.

Нехай l відстань від Кропивницького до Суботців. Тоді час, затрачений Богданом на першу половину шляху дорівнює: $t_1 = \frac{l}{v_1}$.

Відстань, яку водій мікроавтобуса їхав зі швидкістю $v_3 = 100$ км/год, дорівнює:

$$l_3 = l - v_2 \cdot t_1 = l - v_2 \cdot \frac{l}{v_1} = \frac{5}{8} l.$$

При цьому він затратив на подолання шляху l_3 час $t_3 = \frac{l_3}{v_3}$.

Середня швидкість мікроавтобуса на всьому шляху дорівнює:

$$v_{\text{сер}} = \frac{2l}{2t_1 + t_3} = \frac{2l}{2\frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_3}} = \frac{2l}{\frac{2l}{v_1} + \frac{\frac{5}{8}l}{v_3}} = \frac{2}{\frac{2}{v_1} + \frac{5}{8v_3}}$$

$$v_{\text{сер}} = \frac{2}{\frac{2}{80} + \frac{5}{8 \cdot 100}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{160}} = 64 \text{ км/год}$$

Відповідь: $v_{\text{сер}} = 64 \text{ км/год}$

Задача 2. У посудині з водою плаває шматок льоду масою $m = 0,5 \text{ кг}$. Система перебуває у тепловій рівновазі. Скільки теплої води при температурі $t = 30^\circ\text{C}$ потрібно долити в посудину, щоб об'єм частини льоду, що виступає з води, зменшився в $n = 2,4$ рази? Питома теплота плавлення льоду $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, питома теплоємність води $c_v = 4,2 \text{ кДж/кг}\cdot^\circ\text{C}$.

Розв'язок.

Нехай у воді плаває шматок льоду масою m , при цьому над водою перебуває частина його об'єму V . Тоді об'єми шматка льоду і її зануреної частини відповідно дорівнюють: $V_0 = \frac{m}{\rho_l}$, $V_{\text{занур}} = V_0 - V$.

В стані рівноваги сила Архімеда, що діє на занурену частину льоду, зрівноважує силу тяжіння: $\rho_v V_{\text{занур}} g = mg$, $\Rightarrow \rho_v (V_0 - V) = m$

$$\frac{\rho_v}{\rho_l} m - \rho_v V = m$$

Остаточно отримаємо: $V = \frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_v \rho_l} m$.

Як бачимо, зменшення в n разів об'єму виступаючої частини відповідає зменшенню маси льоду в стільки ж разів.

Припустимо, що m_v – шукана маса теплої води, яку потрібно долити в посудину. Зауважимо, що після встановлення теплової рівноваги в посудині ще залишається лід. Це означає, що долита тепла вода остигає до температури льоду $t_0 = 0^\circ\text{C}$. З умови теплового балансу:

$$(m_0 - \frac{m_0}{n}) \lambda = m_v c_v (t - t_0)$$

$$\text{Звідки } m_v = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{m_0 \lambda}{c_v (t - t_0)} \approx 0,76 \text{ кг}$$

Задача 3. Лінійка масою 50 г розташована на двох опорах, як показано на рис.1. На її краю лежить тягарець. Визначте, якою може

бути маса тягарця, щоб лінійка з тягарцем перебували в стані рівноваги.

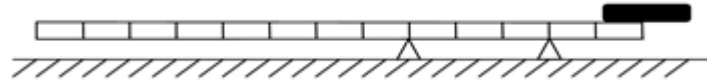


рис. 1

Розв'язок.

Якщо тягарець занадто легкий, то лінійка буде обертатися навколо лівої точки опори. Запишемо умову рівноваги важеля:

$$m_{\text{л}}g \cdot 1,5l = m_{\text{т}}g \cdot 5l \Rightarrow 1,5 \cdot m_{\text{л}} = 5 \cdot m_{\text{т}} \Rightarrow m_{\text{т}} = 15 \text{ г}$$

Якщо тягарець занадто важкий, то лінійка буде обертатися навколо правої точки опори. Запишемо умову рівноваги важеля:

$$m_{\text{л}}g \cdot 4,5l = m_{\text{т}}g \cdot 2l \Rightarrow 4,5 \cdot m_{\text{л}} = 2 \cdot m_{\text{т}} \Rightarrow m_{\text{т}} = 112,5 \text{ г.}$$

Отже, маса тягарця може бути від 15 г до 112,5 г, інакше лінійка перевернеться або в одну або в іншу сторону.

Задача 4. Паровий молот масою 4 кг падає на залізну болванку масою 6 кг, при цьому швидкість молота в момент удару дорівнює 5 м/с. На скільки градусів нагрівається болванка від удару, якщо на її нагрівання йде 80 % отриманої при ударі теплоти? Питома теплоємність заліза $c = 460 \text{ Дж/кг} \cdot ^\circ\text{С}$.

Розв'язок.

80 % кінетичної енергії молота $E = \frac{mv^2}{2}$ йде на нагрівання залізної болванки, при цьому поглинається кількість теплоти $Q = cm_1\Delta t$. Таким чином, рівняння теплового балансу має вигляд $0,8E = Q$. Звідки знаходимо зміну температури болванки:

$$0,8 \frac{mv^2}{2} = cm_1\Delta t; \quad \Delta t = 0,8 \frac{mv^2}{2cm_1}$$

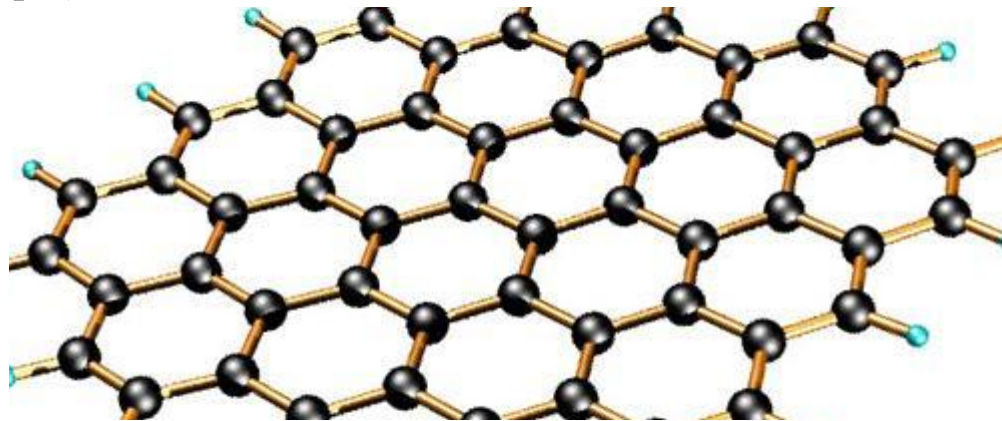
$$\Delta t = 0,4 \frac{mv^2}{cm_1}$$

$$\Delta t = 0,4 \frac{4 \cdot 25}{460 \cdot 6}$$

$$\Delta t \approx 0,0145 ^\circ\text{С}.$$

8 КЛАС
2023-2024 навчальний рік

Задача 1. Графен (англ. graphene) (мал. 1) – плоский одноатомний шар атомів вуглецю, розташованих у вершинах однакових шестикутників (на кожний шестикутник припадає 2 атома вуглецю). Площа одного такого шестикутника складає 0,00524 квадратних нанометра. Знайдіть кількість атомів вуглецю у квадратному зразку графену розміром 10 нанометрів на 10 нанометрів (в одному метрі – мільярд нанометрів).



мал. 1

Розв'язок.

Оскільки на кожний шестикутник графену припадає два атоми вуглецю, щоб знайти кількість атомів у квадратному зразку графену необхідно знайти загальну кількість шестикутників у цьому зразку.

Площа одного шестикутника дорівнює $0,00524 \text{ нм}^2$

Площа квадратного зразка графену дорівнює $10 \text{ нм} \cdot 10 \text{ нм} = 100 \text{ нм}^2$

Кількість шестикутників у цьому зразку:

$$\text{Кількість шестикутників} = \frac{\text{Площа зразка}}{\text{Площа одного шестикутника}}$$

$$\text{Кількість шестикутників} = \frac{100 \text{ нм}^2}{0,00524 \text{ нм}^2} \approx 19083,97$$

Оскільки на кожний шестикутник припадає два атоми вуглецю, загальна кількість атомів вуглецю у цьому зразку графену буде приблизно 38167 (враховуємо, що неможливо мати частинку атома

в дробовому числі, тому заокруглюємо кількість атомів до цілого числа).

Задача 2. Восьмикласник Максим після уроків зібрався зварити 15 вареників з картоплею. Включивши газову плиту потужністю 1500 Вт він вирішив пришвидшити процес – влив з чайника у каструлю гарячу воду ($t_1 = 90\text{ }^{\circ}\text{C}$) масою 1,19 кг та одразу ж закинув у воду один вареник. Наступні вареники Максим кидав по черзі з інтервалами

в 12 с. Вважайте, що вареники є абсолютно однаковими і при опусканні в каструлю мають температуру $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Маса одного вареника 25 г, питома теплоємність $c_{\text{вар}} = 3\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$, питома теплоємність води $c_{\text{в}} = 4200\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$. Теплоємністю каструлі та тепловими втратами можна знехтувати. Крім того Максим весь час помішував вміст каструлі, тому теплова рівновага встановлювалася дуже швидко.

- 1) Скільки разів закипала вода в каструлі у Максима до моменту опускання останнього вареника?
- 2) Скільки буде закипань, якщо він зменшить інтервал опускання вареників до 6 с?

Розв'язок.

- 1) Визначимо кількість теплоти, яку необхідно надати системі, щоб нагріти її до $t_{\text{к}} = 100^{\circ}\text{C}$.

На початку ця величина $Q_0 = c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t_{\text{к}} - t_1)$

$$Q_0 = 4200 \cdot 1,19 (100 - 90) = 49980\text{ Дж} = 49,98\text{ кДж}$$

Кожен вареник, який потрапляє в каструлю, теж треба нагріти до 100°C , на його нагрівання йде $Q_{\text{вар}} = c_{\text{вар}}m_{\text{вар}}(t_{\text{к}} - t_{\text{вар}})$

$$Q_{\text{вар}} = 3000 \cdot 0,025 \cdot (100 - 0) = 7500\text{ Дж} = 7,5\text{ кДж}$$

При цьому за проміжок часу 12 секунд (від кидання одного вареника до кидання наступного) від плити система отримує:

$$Q = P\tau = 1500 \cdot 12 = 18000\text{ Дж} = 18\text{ кДж}.$$

Визначимо перший момент, коли вода закипить. До кінця проміжку N (перед тим, як буде закинутий $(N+1)$ -й вареник) кількість теплоти, що надійшла, повинна бути більшою або дорівнювати кількості теплоти, яка необхідна для нагрівання всієї системи до 100°C .

$$N \cdot Q \geq Q_0 + N \cdot Q_{\text{вар}}, \text{ тоді } N \geq \frac{Q_0}{Q - Q_{\text{вар}}},$$

$$N \geq 4,76$$

Таким чином, вперше вода закипить після закидання 5-го вареника.

Якщо ж вода закипіла вперше, то за наступні 12 секунд плита надасть достатню кількість тепла, щоб вода закипіла знову ($18 \text{ кДж} > 7,5 \text{ кДж}$). Таким чином, вода кипітиме загалом 10 разів – вперше ми визначили вище, а також вода кипітиме в кожен наступний проміжок часу (тобто, після 6-го, 7-го, 8-го, 14-го) вареника).

2) Якщо проміжок часу зменшити до 6 секунд, то від плити в систему надходитиме $Q_1 = 1500 \cdot 6 = 9000 \text{ Дж} = 9 \text{ кДж}$

$$\text{Тоді } N_1 \geq \frac{Q_0}{Q_1 - Q_{\text{вар}}}, \quad N_1 \geq 33,3$$

Так що до моменту закидання 15-го вареника вода не встигне закипіти жодного разу.

Задача 3. На канікулах Дмитрик разом із батьками поїхав автомобілем до комп'ютерної академії IT STEP. Першу половину шляху вони їхали із швидкістю 1 км/хв, наступну ділянку шляху – зі швидкістю

15 км/год, а останню ділянку – із швидкістю 12,5 м/с. Знайдіть середню швидкість автомобіля на всьому шляху, якщо друга і третя ділянки пройдені за однаковий час.

Розв'язок.

$$v_1 = 1 \text{ км/хв} = 60 \text{ км/год}; \quad v_2 = 15 \text{ км/год}; \quad v_3 = 12,5 \text{ м/с} = 45 \text{ км/год}$$

За означенням: $v_c = \frac{l}{t} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{t_1 + t_2 + t_3}$ (1) де l – весь шлях, t – весь час затрачений на дорогу.

$l_1 = \frac{l}{2} = l_2 + l_3; \quad t_1 = \frac{l_1}{v_1} \Rightarrow t_1 = \frac{l}{2v_1}$ (2), де t_1 – час руху на першій половині шляху, t_2 – час руху на другій ділянці шляху, t_3 – час руху на третій ділянці шляху.

За умовою: $t_2 = t_3$, а також $\frac{l}{2} = l_2 + l_3 = v_2 t_2 + v_3 t_3 = t_2(v_2 + v_3) \Rightarrow$

$t_2 = \frac{l}{2(v_2 + v_3)}$ (3) Підставляючи рівняння (3) та (2) в (1) остаточно

отримаємо: $v_c = \frac{l}{t} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{t_1 + t_2 + t_3}$;

$$v_c = \frac{l}{\frac{l}{2v_1} + \frac{l}{2(v_2 + v_3)} + \frac{l}{2(v_2 + v_3)}}$$

$$v_c = \frac{l}{\frac{l}{2v_1} + \frac{l}{v_2 + v_3}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{v_2 + v_3 + 2v_1}$$

$$v_c = \frac{2 \cdot 60 \cdot 60}{15 + 45 + 120} = 40 \text{ км/год}$$

Задача 4. Маса золота і кварцу, знайдена на шахті гірничодобувної корпорації «Сонора» в Джеймстауні, згодом була визнана найбільшим шматком кристалічного золота (мал.2). Маса знахідки становила 16 кг, а її об'єм – 2360 см³. Скільки золота отримали після відокремлення кварцу, якщо густина золота 19300 кг/м³, а кварцу – 2600 кг/м³.



мал. 2

Розв'язок.

Маса знахідки є сумою мас золота та кварцу, які можуть бути визначені через їх густина та об'єм, при цьому сума об'ємів і є об'єм знахідки – 2360 см³; запишемо це у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} m = \rho_z V_z + \rho_k V_k \end{cases}$$

$$V = V_3 + V_K.$$

Зробивши певні перетворення отримаємо розв'язок даної системи

$$m - \rho_3 V_3 = \rho_K V_K; \quad V - V_3 = V_K \Rightarrow$$

$$m - \rho_3 V_3 = \rho_K (V - V_3)$$

$$m - \rho_3 V_3 + \rho_K V_3 = \rho_K V$$

$$m - V_3(\rho_3 - \rho_K) = \rho_K V$$

$$m - \frac{m_3}{\rho_3}(\rho_3 - \rho_K) = \rho_K V$$

$$m - \rho_K V = \frac{m_3}{\rho_3}(\rho_3 - \rho_K)$$

$$m_3 = \frac{(m - \rho_K V) \rho_3}{\rho_3 - \rho_K}$$

$$m_3 = \frac{(16 - 2600 \cdot 0,002360) \cdot 19300}{16700}$$

$$m_3 = 11,4 \text{ кг}$$

8 КЛАС

2024-2025 навчальний рік

Задача 1. Рухаючись вгору річкою, рибалка проплив на човні $S = 6$ км за $t_1 = 6$ год. Потім заснув і прокинувшись через $t_2 = 3$ год, виявив, що перебуває у тому самому місці, з якого почав рух. Якою була швидкість човна відносно води, коли рибалка працював веслами?

Розв'язок.

Нехай v – власна швидкість рибалки, u – швидкість течії річки. Тоді вгору річкою рибалка рухається зі швидкістю $v - u$, а поки він спить зі швидкістю $-u$.

Швидкість рибалки вгору річкою: $v - u = \frac{s}{t_1},$

а під час сну швидкість дорівнює: $u = \frac{s}{t_2}.$

Підставивши друге рівняння в перше, отримаємо: $v = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}$

$$v = 3 \frac{\text{км}}{\text{год}}$$

Задача 2. У посудині (див. мал.), міститься ртуть. Горизонтальні перерізи трубок однакові. У ліву трубку налили воду, висота стовпа якої $h = 80$ мм, а в праву – олію, що утворила стовп деякої висоти h_0 . Після цього у середній трубці рівень ртуті піднявся на $\Delta h = 5$ мм. Знайдіть висоту

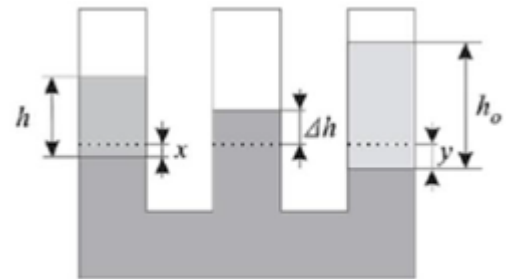


h_0 стовпа олії, наливої в праву трубку. Густина води $\rho_v = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,

олії – $\rho_o = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ртуті – $\rho_p = 13600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок.

Нехай після наливання води та олії рівень ртуті в лівій трубці знизився на x , а в правій на y (див. малюнок). Тоді можна записати такі умови рівноваги стовпів рідин:



$$\rho_v g h = \rho_p g (\Delta h + x) \text{ та } \rho_o g h_0 = \rho_p g (\Delta h + y).$$

Очевидно, що $x + y = \Delta h$ (рідини рідини не стискаються). Розв'язуючи отриману систему рівнянь, отримуємо:

$$\rho_v g h + \rho_o g h_0 = \rho_p g (\Delta h + x) + \rho_p g (\Delta h + y)$$

$$\rho_v h + \rho_o h_0 = 3 \rho_p \Delta h$$

$$h_0 = \frac{(3 \rho_p \Delta h - \rho_v h)}{\rho_o}$$

$$h_0 = 0,155 \text{ м} = 155 \text{ мм}$$

Задача 3. У циліндричну склянку налили воду до рівня $h_0 = 10$ см при температурі $t_0 = 0$ °С. У склянку кидають алюмінієву кульку, яку дістали з іншої ємності з водою, що кипить при температурі $t_k = 100$ °С. При цьому рівень води підвищився на $x = 1$ см. Якою буде температура, що встановилася в склянці? Питомі теплоємності води та алюмінію $c_v = 4200 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})}$ та $c_a = 920 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})}$, густини води та алюмінію $\rho_v = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ та $\rho_a = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок.

Запишемо рівняння теплового балансу

$$c_b m_b (t - t_0) = c_a m_a (t_k - t)$$

де m_b – маса води, m_a – маса алюмінію.

Врахуємо, що $m_b = \rho_b V_b = \rho_b S h_0$, де S – площа поперечного перерізу склянки. Після того, як алюмінієву кульку кинули у склянку, вона опустилась на дно ($\rho_a > \rho_b$).

Об'єм рідини, що витіснила алюмінієва кулька, дорівнює власному об'єму кульки $V_a = S x$, а $m_a = \rho_a V_a = \rho_a S x$.

Підставивши m_b та m_a в рівняння теплового балансу отримаємо:

$$c_b \rho_b S h_0 (t - t_0) = c_a \rho_a S x (t_k - t)$$

$$t = \frac{c_a \rho_a x t_k + c_b \rho_b h_0 t_0}{c_b \rho_b h_0 + c_a \rho_a x}$$

$$t \approx 5,6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Задача 4. Раніше часто на лісозаготівлях колоди в плотах і розсипом сплавляли річкою вниз за течією. Яке мінімальне число N колод модрина європейської потрібно зібрати в пліт, щоб на ньому могла стояти людина масою $m = 100 \text{ кг}$? Через постійне перебування у воді густина колоди модрина дорівнює $\rho = 990 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Вважати колоди циліндрами радіусом $R = 12 \text{ см}$ та довжиною $L = 6 \text{ м}$.

Розв'язок.

Об'єм однієї колоди $V_0 = \pi R^2 L$

Сила тяжіння, що діє на пліт $F_T = N \rho g V_0 = N \rho g \pi R^2 L$

Сила Архімеда, яка діє на повністю занурений пліт:

$$F_a = N \rho_b g V_0 = N \rho_b g \pi R^2 L$$

Умова рівноваги: $mg = F_a - F_T = N(\rho_b - \rho) g \pi R^2 L$

$$\text{Число колод } N = \frac{m}{(\rho_b - \rho) g \pi R^2 L};$$

$$N \approx 3,75$$

Число колод повинно бути цілим число. Щоб пліт не потонув округляємо

$$N = 4$$

9 КЛАС

2018-2019 навчальний рік

Задача 1. Скільки туристів можуть, не замочивши ніг, переправитися через річку на плоту з десяти дубових колод об'ємом $0,3 \text{ м}^3$ кожна? Середня маса туриста з рюкзаком 75 кг. (Густина дуба: $\rho = 700 \text{ кг / м}^3$).

Розв'язок.

$$\text{Об'єм плоту: } V = 10 \cdot 0,3 \text{ м}^3 = 3 \text{ м}^3$$

$$\text{Маса плоту: } m = \rho \cdot V; \quad m = 700 \text{ кг / м}^3 \cdot 3 \text{ м}^3 = 2100 \text{ кг}$$

$$\text{Маса плоту з } N \text{ туристами: } M = (2100 + 75 \cdot N) \text{ кг}$$

$$\text{Вага плоту з туристами: } P = M \cdot g; \quad F = (2100 + 75 \cdot N) \cdot 10 \text{ Н}$$

Виштовхувальна сила плоту (сила Архімеда):

$$F_a = \rho_v \cdot g \cdot V; \quad F_a = 1000 \text{ кг / м}^3 \cdot 10 \text{ Н/кг} \cdot 3 \text{ м}^3 = 30\,000 \text{ Н}$$

$$\text{Прирівнявши: } P = F_a, \text{ отримаємо: } (2100 + 75 \cdot N) \cdot 10 \text{ Н} = 30\,000 \text{ Н}$$

$$2100 + 75 \cdot N = 3000$$

$$75 \cdot N = 900$$

$$N = 12 \text{ туристів}$$

Задача 2. Школяр проїхав першу половину шляху на велосипеді зі швидкістю $v_1 = 15 \text{ км / год}$. Далі половину часу, що залишився він їхав зі швидкістю $v_2 = 10 \text{ км / год}$, а потім решту шляху пройшов пішки зі швидкістю $v_3 = 5 \text{ км / год}$. Визначте середню швидкість руху школяра на всьому шляху.

Розв'язок.

Середню швидкість руху школяра визначаємо за формулою:

$$v_{\text{cp}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}, \quad (1)$$

$$\text{За умовою: } s_1 = v_1 t_1, \quad (2); \quad s_2 = v_2 t_2, \quad (3); \quad s_3 = v_3 t_3, \quad (4); \quad t_2 = t_3 \quad (5)$$

$$s_1 = s_2 + s_3, \quad (6)$$

Підставивши рівняння (2-4) з урахуванням рівняння (5) у рівняння

$$(6), \text{ отримаємо: } s_1 = v_2 t_2 + v_3 t_2; \quad \Rightarrow t_2 = \frac{s_1}{v_2 + v_3} \quad (7)$$

Підставляючи рівняння (6-7) з урахуванням рівнянь (2) і (5) в рівняння (1) отримуємо:

$$v_{cp} = \frac{2 s_1}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{2s_1}{v_2 + v_3}}$$

Звідки отримуємо: $v_{cp} = \frac{2 v_1 (v_2 + v_3)}{2 v_1 + v_2 + v_3}$;

$$v_{cp} = 10 \text{ км/ год.}$$

Задача 3. Два малих плоских дзеркала розташовані на однаковій відстані одне від одного і від точкового джерела світла. Яким має бути кут α між дзеркалами, щоб промінь після двох відбиттів повернувся до джерела світла?

Розв'язок.

Промінь повертається до джерела світла, описавши правильний трикутник (рис.1), тому кути падіння променя на дзеркала $\beta = 30^\circ$, і кути відбивання $\beta = 30^\circ$. Трикутник ABC – правильний, тобто кут між дзеркалами $\alpha = \gamma = 60^\circ$.

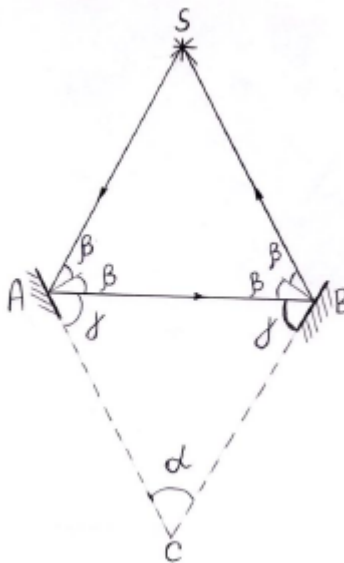


рис. 1

Задача 4. У калориметрі знаходиться 100 г льоду при температурі 0°C . В прилад впускають пар з температурою 100°C . Скільки води буде

в калориметрі, коли весь лід розтане? Температура води, яка утворилася, дорівнює 0°C . Питома теплоємність води $4200 \text{ Дж/ (кг}\cdot^\circ\text{C)}$, питома теплота плавлення льоду 330 кДж/ кг , питома теплота пароутворення води $2,3 \text{ МДж/ кг}$.

Розв'язок.

Кількість теплоти, що необхідна для плавлення льоду, виділяється при конденсації деякої маси пари й охолодження отриманої води до 0°C .

Складемо рівняння теплового балансу:

$$m_{\text{л}} \lambda = m_{\text{п}} r + m_{\text{п}} c(t_{\text{п}} - t_{\text{л}})$$

Загальна маса утвореної води:

$$m = m_{\text{л}} + m_{\text{п}}$$

Виражаємо з першого рівняння масу пари і підставляємо її у друге рівняння:

$$m = m_{\text{п}} + m_{\text{л}} = m_{\text{л}} \left(1 + \frac{\lambda}{r + c(t_{\text{п}} - t_{\text{л}})} \right)$$

$$m \approx 0,112 \text{ кг}$$

Задача 5. У мережу з напругою 24 В підключили два з'єднаних послідовно резистора. При цьому сила струму стала рівною 0,6 А. Коли резистори підключили паралельно, сумарна сила струму стала рівною 3,2 А. Визначити опори резисторів.

Розв'язок.

Згідно закону Ома для ділянки кола і формул для знаходження загального опору при послідовному та паралельному з'єднаннях отримуємо:

$$\frac{U}{I_{\text{посл}}} = R_1 + R_2$$

$$\frac{U}{I_{\text{пар}}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Розв'язуючи дану систему рівнянь, знаходимо невідомі опори резисторів: 10 Ом та 30 Ом.

9 КЛАС**2019-2020 навчальний рік**

Задача 1. У теплоізольовану посудину налили 200 г води при температурі $t_1 = 20^{\circ}\text{C}$ і послідовно кидають в нього однакові кубики

льоду при температурі $t_2 = -10^\circ\text{C}$. Скільки кубиків льоду можна кинути в посудину, щоб після встановлення теплової рівноваги температура виявилася рівною 0°C ? Маса одного кубика дорівнює 10 г. Питома теплота плавлення льоду $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, питома теплоємність льоду $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, питома теплоємність води $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$. Вода з посудини не виливається.

Розв'язок.

Зауважимо, що кінцева температура, яка дорівнює 0°C , може досягатися, якщо після теплообміну в посудині будуть знаходитися і вода, і лід, оскільки 0°C – це температура фазового переходу (плавлення льоду). Таким чином, якщо покласти в посудину занадто багато кубиків льоду, то вся вода замерзне і температура вмісту (льоду) буде нижче нуля, а якщо в посудину покласти недостатнє число кубиків льоду, то весь лід розтане і температура вмісту (води) буде вище нуля. Таким чином, записуючи два рівняння теплового балансу (для максимального і мінімального числа кубиків льоду), отримаємо обмеження для цих чисел:

$$\{Q_{\text{охол.води}} + Q_{\text{замерз.води}} \geq Q_{\text{нагр.льоду}} \quad Q_{\text{охол.води}} \leq Q_{\text{нагр.льоду}} + Q_{\text{плавл.льоду}}$$

де $Q_{\text{охол.води}}$ – теплота, що виділяється при охолодженні води до нуля, $Q_{\text{замерз.води}}$ – теплота, що виділяється при замерзанні води, $Q_{\text{нагр.льоду}}$ – теплота, що поглинається при нагріванні льоду до нуля, $Q_{\text{плавл.льоду}}$ – теплота, що поглинається при плавленні льоду.

$$\{c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_1 - 0^\circ\text{C}) + \lambda m_{\text{л}} \geq c_{\text{л}} n_{\text{л max}} m_{\text{л}} (0^\circ\text{C} - t_2) \quad c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_1 - 0^\circ\text{C}) \leq c_{\text{л}} n_{\text{л min}} m_{\text{л}} (0^\circ\text{C} - t_2) + \lambda n_{\text{л min}} m_{\text{л}}$$

$$\{n_{\text{max}} \leq \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_1 - 0^\circ\text{C}) + \lambda m_{\text{л}}}{c_{\text{л}} m_{\text{л}} (0^\circ\text{C} - t_2)} \approx 394,3 \quad n_{\text{min}} \geq \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_1 - 0^\circ\text{C})}{c_{\text{л}} m_{\text{л}} (0^\circ\text{C} - t_2) + \lambda m_{\text{л}}} \approx 4,8$$

Враховуючи, що n_{max} та n_{min} – цілі числа, отримуємо відповідь $5 \leq n \leq 394$.

Задача 2. Знайти загальний опір ділянки кола (рис. 1), якщо $R = 9 \text{ Ом}$. Відповідь виразіть в Ом, округливши до цілого числа.

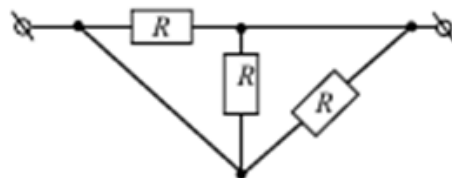


рис. 1

Розв'язок.

З'єднавши вузли схеми, між якими перемички з опором 0, отримаємо еквівалентну схему, яка складається з паралельного з'єднання трьох резисторів. Тому загальний опір $R_{\text{заг}} = \frac{R}{3} = 3 \text{ Ом}$.

Задача 3. Якщо деяку пружину розтягувати силою 30 Н, то її довжина буде дорівнювати 28 см, а якщо стискати силою 20 Н, то її довжина буде дорівнювати 23 см. Знайти довжину пружини у недеформованому стані (відповідь дати у см) та коефіцієнт жорсткості пружини (відповідь подати у Н/м).

Розв'язок. Нехай L – довжина пружини в недеформованому стані, Δx_1 – деформація пружини у першому випадку, Δx_2 – деформація пружини у другому випадку, $L_1 = 28 \text{ см}$, $L_2 = 23 \text{ см}$, $F_1 = 30 \text{ Н}$, $F_2 = 20 \text{ Н}$. Тоді: $F_1 = k\Delta x_1$

$$F_2 = k\Delta x_2,$$

$$F_1 = k(L_1 - L)$$

$$F_2 = k(L - L_2),$$

де k – коефіцієнт жорсткості пружини. Звідси

$$L = \frac{F_1 L_2 + F_2 L_1}{F_1 + F_2} = 25 \text{ см};$$

$$k = \frac{F_1 + F_2}{L_1 - L_2} = 1000 \text{ Н/м}$$

Задача 4. Здолавши $3/8$ довжини мосту, собака почув сигнал автомобіля, що його наздоганяв. Якщо собака побіжить назад, то зустрінеться біля одного кінця мосту, а якщо побіжить вперед, то зустрінеться з ним біля іншого кінця мосту. У скільки разів швидкість автомобіля більша за швидкість собаки?

Розв'язок.

Нехай S – відстань автомобіля до мосту, а l – довжина мосту. Тоді $\frac{3}{8}l$ – відстань, що пройде собака до початку мосту, і $\frac{5}{8}l$ – відстань, що

залишилась собаці до кінця мосту, v_1 – швидкість автомобіля, v_2 – швидкість собаки.

Складемо системи:

1. Собака біжить до початку мосту

$$\{S = v_1 t_1 \quad \frac{3}{8}l = v_2 t_1 \Rightarrow \frac{8S}{3l} = \frac{v_1}{v_2};$$

2. Собака біжить до кінця мосту

$$\{S + l = v_1 t_2 \quad \frac{5}{8}l = v_2 t_2 \Rightarrow \frac{8(S+l)}{5l} = \frac{v_1}{v_2}$$

Прирівнюючи ліві частини рівнянь, отримуємо:

$$\frac{8(S+l)}{5l} = \frac{8S}{3l} \Rightarrow S = \frac{3}{2}l$$

Підставляючи отримане значення у рівняння $\frac{8S}{3l} = \frac{v_1}{v_2}$,

$$\text{отримуємо } \frac{v_1}{v_2} = \frac{8 \cdot \frac{3}{2}l}{3l} = 4$$

Задача 5. На електроплитку, опір спіралі якої 25 Ом, працюючої від мережі з напругою 220 В, поставили каструлю з водою масою 1 кг. Початкова температура води 10°C. Відомо, що вода отримує лише 65% затраченої енергії. Питома теплоємність води 4200 Дж/ (кг·°C), питома теплота пароутворення 2300 кДж/кг. Через 30 хвилин зник струм. Яка кількість води залишиться у каструлі після зникнення струму?

Розв'язок.

Умовою теплового балансу є рівняння:

$$\eta \frac{U^2}{R} t = cm\Delta t + \lambda m_1$$

Через m_1 позначено кількість води, що випарувалась. Маса води, що

$$\text{залишилась: } \Delta m = m - m_1 = m - \frac{\eta \frac{U^2}{R} t - cm\Delta t}{\lambda} = 0,179 \text{ кг.}$$

9 КЛАС

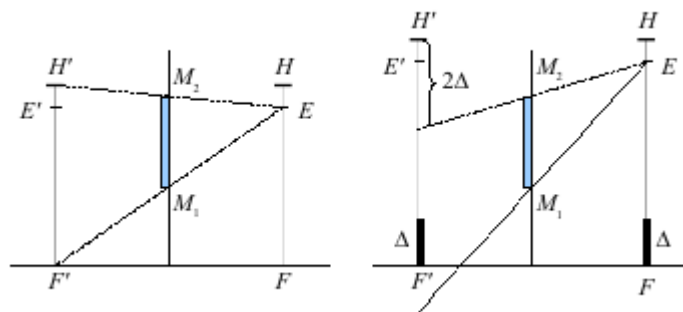
2021-2022 навчальний рік

Задача 1. Дівчина, зріст якої складає 150 см купила дзеркало. Висота дзеркала є мінімальною, при якій вона може побачити себе в повний

зріст. Дзеркало повісили правильно, таким чином, що дівчина дійсно може побачити себе в повний зріст. Але ввечері, збираючись в гості, дівчина виявила, що бачить себе тільки на 90%. На скільки збільшили зріст дівчини святкові туфлі на підборах?

Розв'язок.

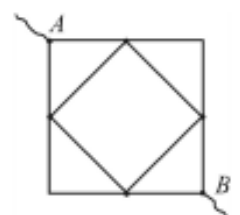
Якщо дівчина розглядає себе в дзеркало без туфель і в туфлях, перебуваючи на незмінній відстані від нього, то можна зробити наступні рисунки (зліва – без туфель, праворуч – в туфлях):



На рисунках Н – голова дівчини, F – її ноги, E – очі, штриховані величини відносяться до зображення; M_1M_2 – дзеркало, підвішене так, що без туфель дівчина тільки-тільки бачить себе в повний зріст; Δ – висота підборів.

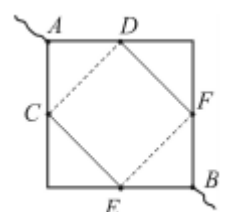
З рисунків бачимо, що коли дівчина стоїть перед дзеркалом в туфлях на тій же відстані, що і без туфель, то туфель вона не бачить, і її верхівка «зрізається» дзеркалом на величину 2Δ , звідки $0,9 h = h - 2\Delta \Rightarrow \Delta = 7,5 \text{ см}$.

Задача 2. Фігура, що зображена на рисунку, зроблена з дроту сталого перерізу. Сторона великого квадрата a , опір одного метра дроту дорівнює ρ . Знайти опір між точками A і B.



Розв'язок.

Потенціали точок C і D рівні, так само як E і F. Це означає, що відрізки прямих, що їх з'єднують можна виключити, і схема спрощується.



$$R_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} \rho + \frac{a \rho \frac{a}{\sqrt{2}}}{a \rho + \frac{a}{\sqrt{2}} \rho} + \frac{a}{2} \rho \right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \rho$$

Задача 3. Чайник на плитці. Чайник з водою ставлять на електричну плитку, що має дві спіралі. При включенні однієї з них вода в чайнику закипає за $t_1 = 3$ хв, а при включенні іншого – за $t_2 = 6$ хв. За якийсь час закипить вода в чайнику, якщо обидві спіралі включити а) паралельно, б) послідовно? Вважайте, що маса і температура води перед нагріванням у всіх випадках однакова, теплообміном з навколишнім середовищем, випаровуванням води, а також залежністю електричного опору спіралей від температури можна знехтувати.

Розв’язок.

Нехай U – напруга мережі, R – загальний електричний опір спіралей. Тоді відповідно до закону Джоуля-Ленца потужність дорівнює:

$$N = \frac{U^2}{R}$$

Якщо кількість теплоти, необхідна для нагрівання води до температури кипіння, дорівнює Q , то рівняння теплового балансу дозволяє знайти час нагрівання:

$$Q = N \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t \Rightarrow t = \frac{Q}{U^2} \cdot R$$

Останнє рівняння показує, що час нагрівання прямо пропорційний електричному опору. Далі після введення опору спіралей R_1 і R_2 врахуємо, що при їх паралельному і послідовному з’єднанні загальний опір відповідно дорівнює

$$R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{\text{пос}} = R_1 + R_2.$$

З урахуванням виразів для цих опорів і того, що час нагрівання прямо пропорційний електричному опору, остаточно можемо записати:

$$t_{\text{пар}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 2 \text{ хв},$$

$$t_{\text{пос}} = t_1 + t_2 = 9 \text{ хв}.$$

Задача 4. У циліндричну посудину налиті вода і гас у рівних за масою кількостях. Загальна висота шарів рідин $H = 36$ см. Знайти тиск рідин на дно посудини і на межі поділу рідин. Густина води $\rho_{\text{в}} = 1,0$ г/см³, густина гасу $\rho_{\text{г}} = 0,8$ г/см³.

Розв'язок.

Тиск рідини, яка складається з кількох компонентів, які не змішуються (вода-гас), на глибині $H = h_{\text{в}} + h_{\text{г}}$: $P_{\text{дн}} = \rho_{\text{в}} g h_{\text{в}} + \rho_{\text{г}} g h_{\text{г}}$ (1)

Оскільки маса води дорівнює масі гасу, можна записати: $\rho_{\text{в}} V_{\text{в}} = \rho_{\text{г}} V_{\text{г}}$;

$\rho_{\text{в}} h_{\text{в}} S = \rho_{\text{г}} h_{\text{г}} S$, де S – площа основи циліндричної посудини.

Звідки отримуємо: $\rho_{\text{в}} h_{\text{в}} = \rho_{\text{г}} h_{\text{г}}$ (2)

Підставляючи (2) в (1) отримуємо $P_{\text{дн}} = 2g\rho_{\text{г}} h_{\text{г}}$ (3)

З (2) виражаємо $h_{\text{г}} = \frac{\rho_{\text{в}} h_{\text{в}}}{\rho_{\text{г}}}$ і підставляємо в Н: $H = h_{\text{в}} \left(1 + \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{г}}}\right)$ (4)

З (4) виражаємо $h_{\text{в}} = \frac{H\rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{г}} + \rho_{\text{в}}}$ (5)

Вираз (5) підставляємо у вираз (3) і знаходимо тиск рідин на дно:

$$P_{\text{дн}} = \frac{2\rho_{\text{г}}\rho_{\text{в}}gH}{\rho_{\text{г}} + \rho_{\text{в}}}$$

Підставивши числові значення, отримаємо:

$$P_{\text{дн}} = 3,2 \text{ кПа}, P_{\text{гр}} = \frac{1}{2} P_{\text{дн}} = 1,6 \text{ кПа}$$

Задача 5. Мотогогонщик рухається по замкнутій трасі, що представляє собою сторони квадрата. Першу сторону він проїхав зі швидкістю V , швидкість на другій стороні становила 80 % від швидкості на першій стороні, на третій – впала в два рази в порівнянні з другою, на четвертій – впала ще в два рази в порівнянні з третьою. Середня швидкість на всьому шляху виявилася рівною 64 км/ год. Знайдіть швидкість мотогогонщика на першій стороні квадрата.

Розв'язок.

Середня швидкість на всьому шляху дорівнює:

$$v_{\text{сер}} = \frac{4a}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{4a}{\frac{a}{v_1} + \frac{a}{0,8v_1} + \frac{a}{0,4v_1} + \frac{a}{0,2v_1}} = \frac{1,6v_1}{3,9}$$

$$\text{Остаточно отримаємо: } v_1 = \frac{3,9 v_{\text{сер}}}{1,6} = 156 \text{ км/год}$$

9 КЛАС

2022-2023 навчальний рік

Задача 1. Автомобіль першу половину шляху їхав зі швидкістю

$v_1 = 40$ км/год, а решту частину – зі швидкістю $v_2 = 60$ км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля за другу половину часу його руху.

Розв'язок.

За умовою $l_1 = l_2$, так як $v = \frac{l}{t}$, отримаємо $l_1 = v_1 \cdot t_1$; $l_2 = v_2 \cdot t_2$

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2, \quad 40 \cdot t_1 = 60 \cdot t_2, \quad t_1 = 1,5 \cdot t_2$$

Загальний час руху $t = t_1 + t_2$; $t = 1,5 t_2 + t_2 = 2,5 t_2$

Половина часу його руху $t' = \frac{2,5 t_2}{2} = 1,25 t_2$,

Це означає, що першу половину часу автомобіль повністю проходить по першій половині шляху, а друга половина часу включає завершення руху по першій половині шляху та рух на другій половині шляху: де спочатку $0,25t_2$ часу він рухався зі швидкістю 40 км/год, а далі t_2 часу – 60 км/год.

Середня швидкість автомобіля за другу половину часу його руху:

$$v_{\text{сер}} = \frac{l_1 + l_2}{0,25 t_2 + t_2}$$

$$v_{\text{сер}} = \frac{40 \cdot 0,25 t_2 + 60 t_2}{0,25 t_2 + t_2} = \frac{70}{1,25} \text{ км/год} = 56 \text{ км/год}$$

Задача 2. В теплоізолюваній посудині лежить шматок льоду при температурі 0°C . Потім в посудину невеликими порціями починають впускати пару при $t = 100^\circ\text{C}$ до тих пір, поки в ній не буде 100 г води при $t = 100^\circ\text{C}$. Яку кількість теплоти пара передасть вмісту посудини? Питома теплоємність води 4200 Дж/ (кг·°C), питома теплота

плавлення льоду 330 кДж/ кг, питома теплота пароутворення води 2,3 МДж/ кг.

Розв'язок.

У теплообміні беруть участь: лід; вода, що утворилась з льоду, що розтанув; пара; вода, що утворилась при конденсації пари.

Лід отримує кількість теплоти на плавлення: $Q_1 = \lambda m_{\text{л}}$

Нагрівання води, що утворилась з льоду до $t = 100^\circ\text{C}$:

$$Q_2 = c_{\text{в}} m_{\text{л}} (t - 0^\circ\text{C})$$

Пара при конденсації віддає кількість теплоти: $Q_3 = r m_{\text{п}}$

Складаємо рівняння теплового балансу: $Q_1 + Q_2 = Q_3$

I спосіб: Маса 100 г води при $t = 100^\circ\text{C}$: $m_{\text{в}} = m_{\text{л}} + m_{\text{п}}$; $m_{\text{п}} = m_{\text{в}} - m_{\text{л}}$

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} (t - 0^\circ\text{C}) = r m_{\text{п}}$$

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} (t - 0^\circ\text{C}) = r (m_{\text{в}} - m_{\text{л}})$$

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} (t - 0^\circ\text{C}) + r m_{\text{л}} = r m_{\text{в}}$$

$$m_{\text{л}} = \frac{r m_{\text{в}}}{\lambda + c_{\text{в}} (t - 0^\circ\text{C}) + r}$$

$$m_{\text{л}} = 75,4 \text{ г}$$

$$m_{\text{п}} = m_{\text{в}} - m_{\text{л}}$$

$$m_{\text{п}} = 100 \text{ г} - 75,4 \text{ г} = 24,6 \text{ г} = 0,0246 \text{ кг}$$

$$Q_3 = r m_{\text{п}}$$

$$Q_3 = 56,6 \text{ кДж}$$

II спосіб: У теплообміні беруть участь: лід; вода, що утворилась з льоду, що розтанув; пара; вода, що утворилась при конденсації пари.

Лід отримує кількість теплоти на плавлення: $Q_1 = \lambda m_{\text{л}}$

Нагрівання води, що утворилась з льоду до $t = 100^\circ\text{C}$:

$$Q_2 = c_{\text{в}} m_{\text{л}} (t - 0^\circ\text{C})$$

Пара при конденсації віддає кількість теплоти: $Q_3 = r m_{\text{п}}$

Складаємо рівняння теплового балансу: $Q_1 + Q_2 = Q_3$

Маса 100 г води при $t = 100^\circ\text{C}$: $m_{\text{в}} = m_{\text{л}} + m_{\text{п}}$; $m_{\text{л}} = m_{\text{в}} - m_{\text{п}}$

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} (t - 0^\circ\text{C}) = r m_{\text{п}}$$

$$\lambda (m_{\text{в}} - m_{\text{п}}) + c_{\text{в}} (m_{\text{в}} - m_{\text{п}}) (t - 0^\circ\text{C}) = r m_{\text{п}}$$

$$\lambda m_{\text{в}} + c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t - 0^\circ\text{C}) = r m_{\text{п}} + \lambda m_{\text{п}} + c_{\text{в}} m_{\text{п}} (t - 0^\circ\text{C})$$

$$m_{\pi} = \frac{\lambda m_B + c m_B (t - 0^{\circ}\text{C})}{(r + \lambda + c_B (t - 0^{\circ}\text{C}))}$$

$$\text{Шукана кількість теплоти } Q_3 = r m_{\pi} = \frac{r m_B (\lambda + c_B (t - 0^{\circ}\text{C}))}{(r + \lambda + c_B (t - 0^{\circ}\text{C}))}$$

$$Q_3 = 56,6 \text{ кДж}$$

Задача 3. В колі, схема якого наведена на рис. 1, опори всіх резисторів однакові і дорівнюють $R = 18 \text{ Ом}$. Напруга на джерелі струму $U = 12 \text{ В}$. Визначте яка потужність буде виділятися на кожному з резисторів.

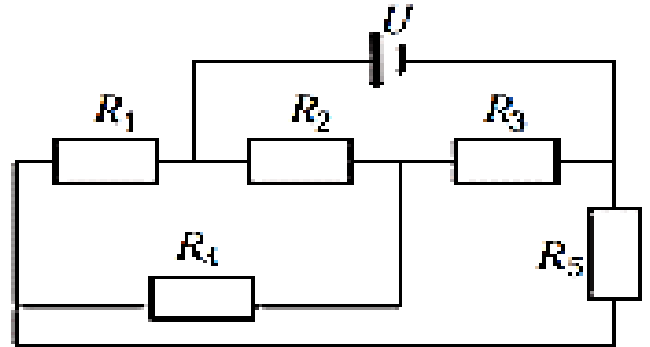
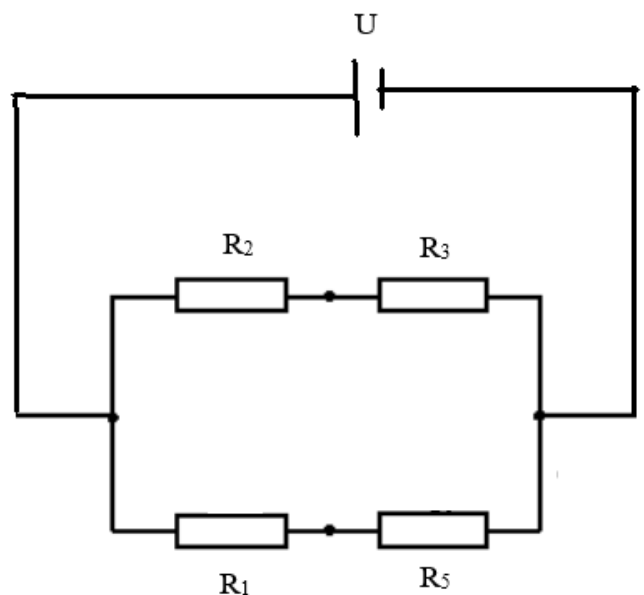


рис. 1

Розв'язок.

Щоб визначити потужність, яка виділяється на кожному резисторі, спочатку потрібно розрахувати загальний опір кола, а потім знайти струм, що проходить через коло. Після цього можна обчислити потужність на кожному резисторі. **Еквівалентна схема**



$$R_{23} = R_2 + R_3; \quad R_{15} = R_1 + R_5; \quad R_{23} = R_{15} = 36 \text{ Ом}$$

$$R_{\text{заг}} = R_{23,15} = \frac{R_{23}}{2}$$

$$R_{\text{заг}} = 18 \text{ Ом}$$

$$I = \frac{U}{R_{\text{заг}}}$$

$$I = \frac{2}{3} \text{ А}$$

$$I' = \frac{I}{2} = \frac{1}{3} \text{ А}$$

Потужність, яка буде виділятися на кожному з резисторів: $P' = I'^2 R$

$$P' = \left(\frac{1}{3} \text{ А}\right)^2 18 \text{ Ом} = 2 \text{ Вт}$$

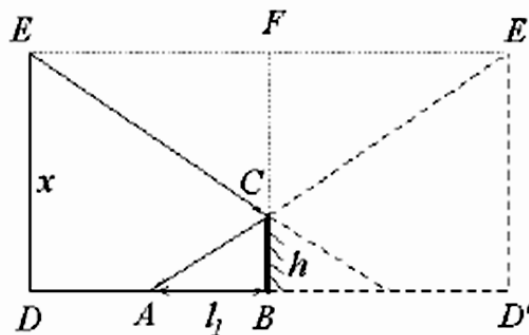
Задача 4. На стіні висить плоске дзеркало висотою h . Людина стоїть на відстані $l_1 = 2$ м від дзеркала. Протилежна стіна знаходиться на відстані $l_2 = 4$ м від дзеркала. Людина, не змінюючи положення голови, бачить ділянку протилежної стіни кімнати, висота якої дорівнює $l_3 = 3$ м. Визначити мінімальну висоту дзеркала h ?

Розв'язок.

Нехай наше око розташоване у точці А. ВС – дзеркало розташоване вертикально на стіні. Відстань $BD' = BD = l_2$.

Висота дзеркала h . Тоді в око можуть потрапити після відбивання в дзеркалі ВС промені, які виходять з усіх точок ділянки стіни DE. Відображення цієї ділянки у плоскому дзеркалі ВС є D'E'. За правилами дзеркального відображення $DE = D'E'$.

Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle AE'D'$. Ці трикутники прямокутні і подібні.



$$\frac{AB}{AD'} = \frac{BC}{D'E'} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot D'E'}{AD'} = \frac{l_1 l_3}{l_1 + l_2} = 1 \text{ м}$$

9 КЛАС

2023-2024 навчальний рік

Задача 1. Опір кожного резистора в електричному колі (рис. 1) становить 1 Ом. Через крайній правий резистор тече струм 1 А. Чому дорівнює напруга між точками А і В?

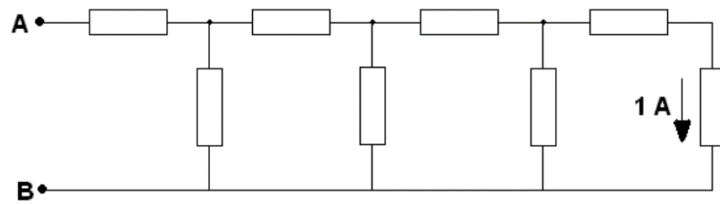


рис. 1

Розв'язок.

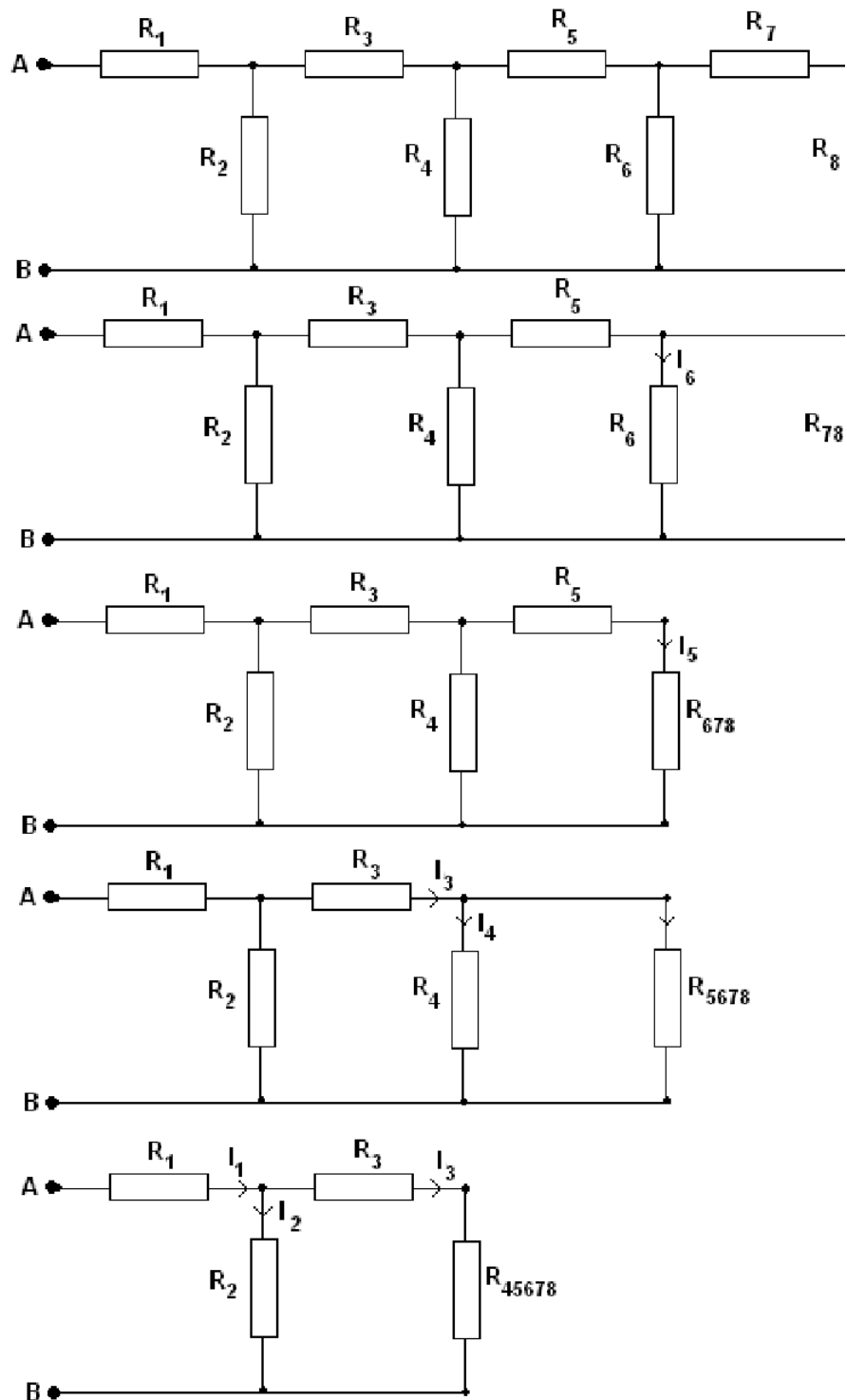
Позначимо резистори, як показано на верхньому рисунку. Через резистори R_7 та R_8 протікає струм силою 1 А, тому що резистори включені в коло послідовно. Опір $R_{78} = 2R = 2 \text{ Ом}$, а напруга $U_{78} = 2 \text{ В}$. Сила струму через резистор R_6 дорівнюватиме $I_6 = \frac{U_{78}}{R_6} = 2 \text{ А}$.

Через резистор R_5 тече сила струму, яка дорівнюватиме:

$$I_5 = I_6 + I_{78} = 3 \text{ А}, \text{ а напруга на ньому } 3 \text{ В}.$$

Визначимо напругу на резисторі R_4 , $U_4 = U_5 + U_{678} = 5 \text{ В}$.

Через цей резистор протікатиме струм $I_4 = 5 \text{ А}$.



Через резистор R_3 протікатиме струм I_3 , який можна визначити як $I_3 = I_4 + I_5 = 8 \text{ A}$. Напруга на ньому дорівнює $U_3 = 8 \text{ В}$. Напруга на резисторі R_2 буде $U_2 = U_3 + U_4$.

$$U_2 = 8 \text{ В} + 5 \text{ В} = 13 \text{ В}$$

Через резистор R_2 протікатиме струм $I_2 = \frac{U_2}{R_2}$,

$I_2 = 13 \text{ A}$. Через резистор R_1 протікатиме струм $I_1 = I_2 + I_3$

$I_1 = 13 \text{ A} + 8 \text{ A} = 21 \text{ A}$, а напруга на ньому буде дорівнює $U_1 = 21 \text{ В}$.
 Напруга між точками А і В дорівнює $U_{AB} = U_1 + U_2$
 $U_{AB} = 21 \text{ В} + 13 \text{ В} = 34 \text{ В}$

Задача 2. Отвір у горизонтальному дні посудини закритий легким напівсферичним ковпачком радіусом R (рис. 2). Посудина заповнена рідиною густиною ρ . Дно посудини знаходиться на глибині H . Знайдіть силу, з якою ковпачок тисне на дно посудини. Прискорення вільного падіння дорівнює g . Об'єм кулі радіусом R дорівнює $\frac{4\pi R^3}{3}$.

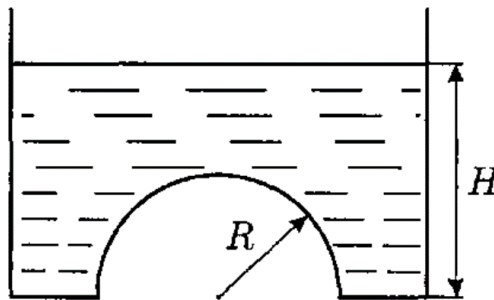


рис. 2

Розв'язок.

Так як ковпачок легкий і враховувати його вагу не треба, то тиск на дно посудини визначиться вагою рідини над ковпачком: $F = mg$

Маса m визначиться об'ємом води V над ковпачком, а це різниця об'ємів циліндра та півкулі: $V = \pi R^2 H - \frac{2}{3} \pi R^3$

$$F = \rho \pi R^2 g \left(H - \frac{2}{3} R \right)$$

Задача 3. Через коаксіальний водонагрівач (проміжок між двома металевими циліндрами) повільно тече вода та нагрівається. Радіус зовнішнього циліндра R_1 , а – внутрішнього R_2 , при цьому проміжок між циліндрами набагато менший радіусів (рис. 3). Довжини циліндрів дорівнюють l . Нагрів води відбувається за допомогою металевих циліндрів, до яких прикладена постійна напруга U . Визначте, з якою швидкістю v повинна текти вода, щоб вона встигала нагріватися на температуру Δt° ? Густину ρ_v , питому теплоємність c_v , а також питомий електричний опір ρ води вважайте відомими. Тепловими втратами знехтуйте.

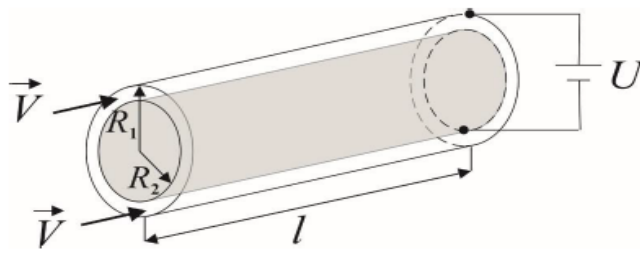


рис. 3

Можливий розв'язок.

Оскільки підключення постійної напруги нагрівача здійснюється до зовнішнього і внутрішнього циліндрів, електричний струм йде перпендикулярно до тонкого шару води. Отже, тонкий шар води можна вважати «провідником» довжиною L і площею S

$$L = R_1 - R_2 \text{ та } S = 2\pi R_1 l \quad (1)$$

В даному випадку, зважаючи на малу товщину шару, площа шару води визначається радіусом зовнішнього циліндра R_1 . Тонкий шар води має електричний опір, який можна розрахувати за формулою:

Задача 4. Козацька сигналізація – система оповіщення козаків і населення про напад ворогів, створювалася у вигляді мережі веж з яких спостерігали, а потім сигналізували за допомогою потужного полум'я. Приймавши, що висота веж дорівнює 10 м, оцініть максимальну відстань L між вежами на відкритій рівнинній місцевості, при якому сигнал буде передаватися з вежі на вежу.

Розв'язок.

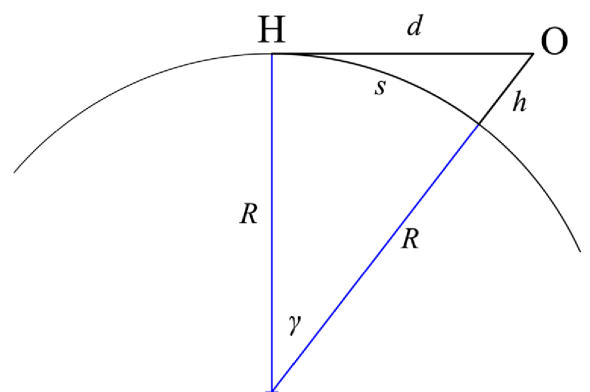
Позначимо радіус Землі R , висоту однієї з веж – h , відстань між верхньою точкою вежі та точкою на видимому горизонті – d . З рисунка видно, що половину шуканої відстані d можна знайти за теоремою Піфагора:

$$d^2 = (R + h)^2 - R^2$$

$$d^2 = R^2 + 2Rh + h^2 - R^2$$

$$d^2 = 2Rh + h^2$$

Оскільки доданок h^2 набагато менший за R^2 та $2Rh$ ним можна знехтувати: $d^2 \approx 2Rh$.



Остаточно отримаємо: $L = 2d \approx 2\sqrt{2Rh}$.

$$L \approx 2\sqrt{2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м} \cdot 10 \text{ м}} \approx 22627 \text{ м}$$

9 КЛАС

2024-2025 навчальний рік

Задача 1. На горизонтальну поверхню льоду за температури $t_1 = 0^\circ\text{C}$ кладуть монету номіналом дві гривні, нагріту до температури $t_2 = 60^\circ\text{C}$. Монета розплавляє лід і опускається в лунку, що утворилася. На яку частину своєї товщини вона зануриться в лід? Маса льоду набагато більша за масу монети, теплообміном з навколишнім середовищем знехтуйте. Питома теплоємність матеріалу з якого виготовлена монета $c = 400 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^\circ\text{C}}$, його густина $\rho = 8,9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Питома теплота плавлення льоду $\lambda = 332 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, його густина $\rho = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок.

Кількість теплоти, відданою монетою під час охолодження:

$$Q_1 = cm_1\Delta t$$

Кількість теплоти, яка йде на плавлення льоду:

$$Q_2 = \lambda m_{\text{л.}}$$

Відповідно до рівняння теплового балансу:

$$cm_1\Delta t = \lambda m_{\text{л.}}$$

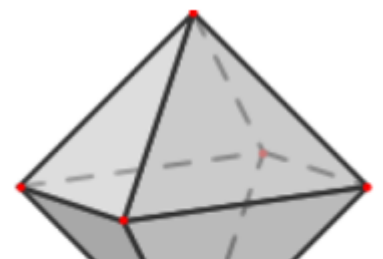
Нехай S – площа однією з сторін монети, d – її товщина, а d_1 – глибина лунки, тоді $m_1 = V_1\rho = Sd\rho$, $m_{\text{л.}} = Sd_1\rho_{\text{л.}}$

$$cSd\rho\Delta t = \lambda Sd_1\rho_{\text{л.}}$$

$$\frac{d_1}{d} = \frac{c\rho\Delta t}{\lambda\rho_{\text{л.}}}$$

$$\frac{d_1}{d} = \frac{400 \cdot 8900 \cdot 60}{332000 \cdot 900} = 0,715$$

Задача 2. Взявши 12 однакових шматків дроту опором $r = 0,1 \text{ Ом}$ кожний, Михайло з'єднав їх



так, що вийшов правильний октаедр

(див. рис. 1). Він приклав напругу 1 В до верхньої та нижньої вершини октаедра. Якою буде сила струму, що протікає сумарно по октаедру, через кожне з бічних горизонтальних ребер, через кожне з бічних похилих ребер?

Розв'язок.

З симетрії задачі випливає, що різниця потенціалів між бічними вершинами не виникне, струм через горизонтальні ребра дорівнюватиме нулю, отже ці провідники можна видалити зі схеми. Тому ми отримаємо еквівалентну схему, в якій буде 4 паралельні провідники опором $2r$ кожен. Загальний опір дорівнюватиме: $\frac{1}{R} = \frac{4}{2r}$

$$; R_1 = \frac{r}{2} \quad R_1 = 0,05 \text{ Ом.}$$

Загальна сила струму дорівнюватиме $\frac{U}{R} = 20 \text{ А}$, вона порівну ділиться між боковими похилими ребрами по 5 А.

Задача 3. У льодах Арктики в центрі невеликої плоскої крижини площею 80 м^2 стоїть білий ведмідь масою 750 кг. При цьому надводна частина крижини виступає над поверхнею води на висоту 10 см. На якій глибині під водою знаходиться нижня поверхня крижини? Густина води $1030 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, густина крижини $900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок.

Відповідно до умови плавання тіла: $F_{\text{арх}} = Mg$, де M – маса крижини та ведмедя. $M = m_k + m$

Маса крижини: $m_k = \rho_k S(h + x)$, де x – шукана глибина.

$$M = \rho_k S(h + x) + m$$

$$F_{\text{арх}} = \rho_v g V = \rho_v g Sx$$

$$\rho_v g Sx = (\rho_k S(h + x) + m)g$$

$$\rho_v Sx = \rho_k S(h + x) + m$$

$$x = \frac{m + Sh\rho_k}{S(\rho_v - \rho_k)}$$

$$x = \frac{750 + 80 \cdot 0,1 \cdot 900}{80(1030 - 900)} \approx 0,76 \text{ м}$$

Задача 4. Вантаж невідомої маси зважують, зрівноваживши його гирькою відомої маси M на кінцях важкого прямого коромисла; при цьому рівновага досягається, коли точка опори коромисла зміщується від його середини на $x = \frac{1}{4}$ його довжини в бік гирьки. За відсутності вантажу на другому плечі коромисло залишається в рівновазі при зміщенні його точки опори від середини в бік гирьки на $y = \frac{1}{3}$ його довжини. Вважаючи коромисло однорідним по всій довжині, знайдіть масу вантажу m .

Розв'язок.

При зважуванні вантажу невідомої маси m на плечі коромисла довжиною L діють сили $m\vec{g}$, $M\vec{g}$ і $m_k\vec{g}$, де m_k – маса коромисла (див. рис.2). Плечі цих сил відносно вісі, що проходить через точку опору перпендикулярно площині рисунка, дорівнюють $(0,5 + x)L$, $(0,5 - x)L$ та xL відповідно. Відповідно до умови рівноваги важеля: $m\vec{g}(0,5 + x)L + m_k\vec{g}xL = M\vec{g}(0,5 - x)L$, звідки:

$$m = \frac{M(0,5 - x) - m_k x}{0,5 + x}$$

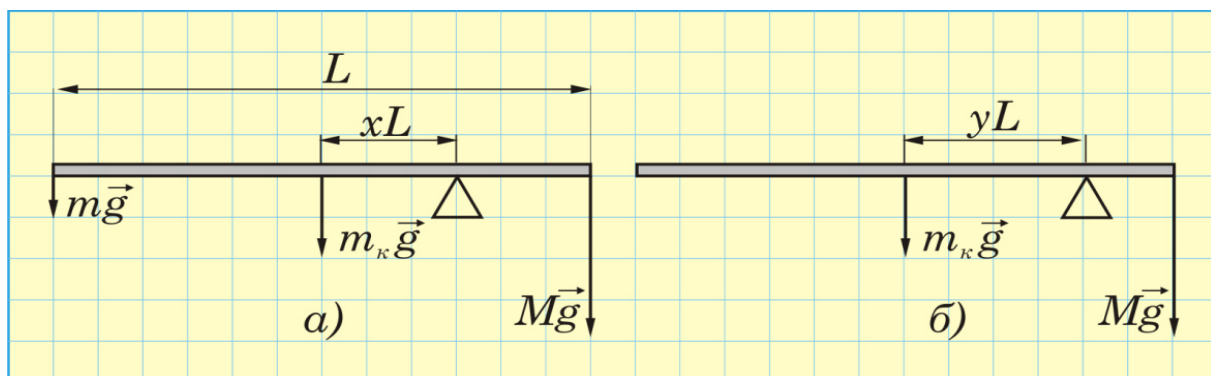


рис. 2

Розглянемо тепер друге зважування (без вантажу невідомої маси), що дозволить знайти масу коромисла. Плечі сил $M\vec{g}$ і $m_k\vec{g}$ тепер будуть дорівнювати $(0,5 - y)L$ та yL відповідно. Умова рівноваги важеля: $m_k\vec{g}yL = M\vec{g}(0,5 - y)L$, звідки:

$$m_k = \frac{M(0,5 - y)}{y}$$

$$\text{Отже } m = \frac{M(0,5-x) - \frac{M(0,5-y)}{y}x}{0,5+x} = \frac{0,5 M (y-x)}{(0,5+x)y}$$

$$m = \frac{0,5 M (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})}{(0,5 + \frac{1}{4})\frac{1}{3}}$$

$$m = \frac{0,5 M (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})}{(0,5 + \frac{1}{4})\frac{1}{3}} = \frac{M}{6}$$

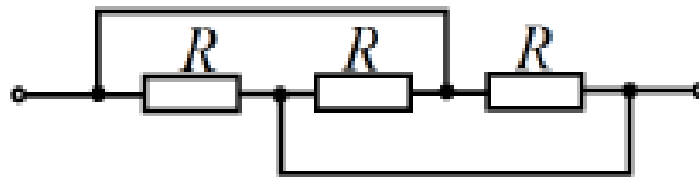
10 КЛАС

2018-2019 навчальний рік

Задача 1. Три однакових опори з'єднані послідовно і підключені до джерела постійної напруги. Як зміниться потужність, яка виділяється на ділянці, якщо точки з'єднання опорів один з одним з'єднати провідниками з дуже малим опором, так як показано на рисунку?

Розв'язок.

При



послідовному з'єднанні опорів потужність, яка виділяється, дорівнює:

$$P_1 = \frac{U^2}{3R}, \text{ де } U - \text{напруга джерела.}$$

При додатковому з'єднанні точок, опори підключено паралельно. Неважко помітити, що тепер будь-який з трьох опорів з'єднаний дротами безпосередньо з джерелом живлення. У цьому випадку потужність

$$P_2 = \frac{3U^2}{R} = 9P_1$$

Задача 2. У герметично закритій посудині у воді плаває шматок льоду масою $M = 0,1$ кг, у який вмерзла дробинка масою $m = 5$ г. Яку кількість теплоти необхідно витратити, щоб дробинка почала тонути? Густина свинцю $\rho_{\text{св}} = 11,3$ г/см³, густина льоду $\rho_{\text{л}} = 0,9$ г/см³, питома теплота плавлення льоду $\lambda_{\text{л}} = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Температура води в посудині 0°C.

Розв'язок.

Для того, щоб дробинка почала тонути, немає необхідності, щоб розтанув весь лід. Достатньо того, щоб середня густина льоду з дробинкою стала рівною густині води. Якщо масу льоду, що при цьому залишився, позначити M_1 , то умова того, що дробинка почне тонути, запишеться так:

$$\frac{M_1 + m}{V} = \rho_{\text{в}}.$$

Але об'єм V льоду та дробинки дорівнює сумі їх об'ємів:

$$V = \frac{M_1}{\rho_{\text{л}}} + \frac{m}{\rho_{\text{св}}}$$

$$\text{Тому, } M_1 + m = \rho_{\text{в}} \left(\frac{M_1}{\rho_{\text{л}}} + \frac{m}{\rho_{\text{св}}} \right)$$

$$\text{Звідки } M_1 = m \frac{(\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{в}}) \rho_{\text{л}}}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) \rho_{\text{св}}} = 8,2m$$

Розтанути повинна маса льоду:

$$\Delta M = M - M_1 = 100 \text{ г} - 8,2 \cdot 5 \text{ г} = 59 \text{ г}$$

Для цього необхідна кількість теплоти:

$$Q = \lambda \cdot \Delta M = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг} \cdot 59 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \approx 19,5 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

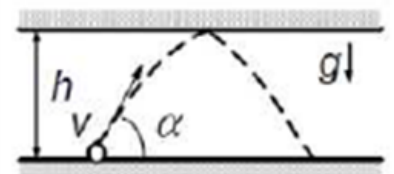
Задача 3. Яку відстань по горизонталі пролетить м'яч, який кинуту зі швидкістю $v = 10 \text{ м/с}$ під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту, якщо він вдариться об стелю? Висота стелі $h = 3 \text{ м}$, удар пружний. Опором повітря знехтувати.

Розв'язок.

З рівняння рівноприскореного руху по вертикалі отримуємо:

$$h = v t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}$$

$$\text{звідки } t = \frac{v \sin \alpha}{g} - \left[\left(\frac{v \sin \alpha}{g} \right)^2 - \frac{2h}{g} \right]^{\frac{1}{2}}$$



Відстань, пройдена тілом по горизонталі за час польоту $2t$, дорівнює:

$$l = v \cos \alpha \cdot 2t = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha \left[1 - \left(1 - \frac{2gh}{(v \sin \alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Підставивши числові дані отримаємо: $l = 5$ м.

Задача 4. Знайдіть мінімально можливу відстань між предметом та його дійсним зображенням, якщо оптична сила тонкої лінзи дорівнює 8 дптр.

Розв'язок.

Запишемо формулу тонкої лінзи: $\frac{1}{d} + \frac{1}{h-d} = D$,

де h – відстань між предметом та зображенням, d – відстань між предметом та лінзою.

$$\text{Звідки: } -d^2 + hd - \frac{h}{D} = 0$$

Дане рівняння має розв'язок, якщо дискримінант невід'ємний:

$$h^2 - 4\frac{h}{D} = h\left(h - \frac{4}{D}\right) \geq 0$$

Звідки мінімально можлива відстань:

$$h = \frac{4}{D} = 0,5 \text{ м} = 50 \text{ см}$$

Задача 5. Аеростат піднімається з поверхні землі вертикально вгору з прискоренням $2,45 \text{ м/с}^2$. Через 8 секунд від початку руху з нього випадає предмет. Через який час і з якою швидкістю цей предмет впаде на землю? Опором повітря знехтувати.

Розв'язок.

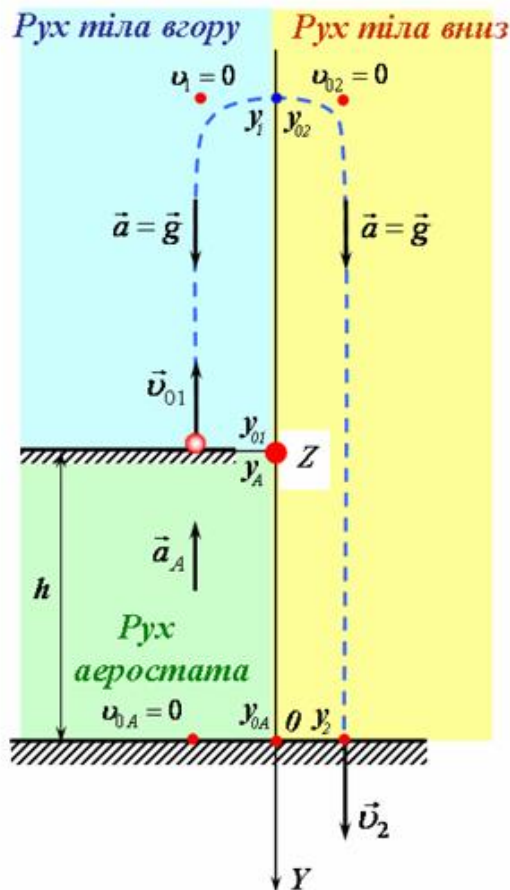


рис1

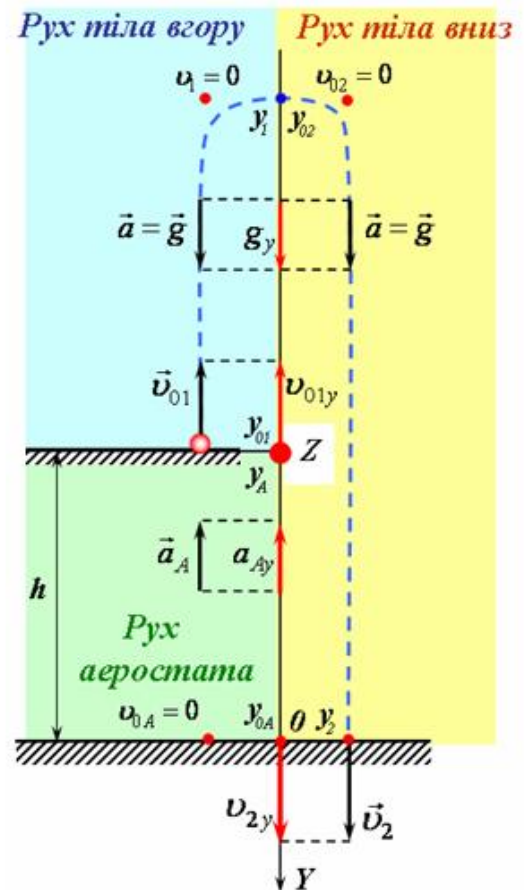


рис2

Побудуємо схему руху, пов'язавши систему відліку з поверхнею землі. На рисунку 1 та 2 зображена траєкторія руху тіла. Щоб зобразити рух тіла вгору та вниз на одному рисунку, трохи змістимо одну відносно одної траєкторії руху, а саме: вниз та вгору.

Розіб'ємо рух на дві ділянки: рівноприскорений рух аеростата протягом 8 с та рівнозмінний рух предмета, який випав з аеростата.

Після того як предмет випав з аеростата без початкової швидкості відносно аеростата цей предмет рухатиметься відносно поверхні землі спочатку вгору з початковою швидкістю, яка дорівнює миттєвій швидкості аеростата в момент часу $\tau = 8$ с, до зупинки. Після досягнення найвищої точки траєкторії (рис. 2) тіло вільно падатиме вниз.

Оскільки рух предмета, після того як він випав з аеростату, є рівнозмінним і прискорення за весь час руху (і під час руху вгору, і під час руху вниз) не змінює ні свого напрямку ні величини, то обидві

ділянки руху (вгору і вниз) можна описати одним рівнянням руху та одним рівнянням швидкості.

Знайдемо швидкість аеростата в момент часу $\tau = 8$ с (це буде початкова швидкість тіла в момент скидання). Для цього запишемо рівняння швидкості в проекціях на вісь ОУ аеростата у загальному вигляді: $v_{01y} = v_{0Ay} + a_y \tau$, $v_{0Ay} = 0$,

$$v_{01} = a\tau, \quad v_{01} = 19,6 \text{ м/с.}$$

Знайдемо висоту h , на якій буде знаходитись аеростат у момент коли предмет з нього випав. Для цього запишемо рівняння руху для руху аеростата від поверхні землі до точки Z. Запишемо рівняння руху для аеростату в проекціях на обрану вісь ОУ:

$$y_{01} = y_{0A} + v_{0Ay} \tau + \frac{a_y \tau^2}{2}$$

$$h = \frac{a\tau^2}{2}; \quad h = 78,4 \text{ м}$$

Для знаходження часу t , який мине з того моменту коли предмет з нього випав до моменту його падіння на землю. Запишемо рівняння руху для даного руху в проекціях на обрану вісь ОУ:

$$y_2 = y_{02} + v_{01y} t + \frac{g_y t^2}{2}$$

$$0 = -h - v_{01} t + \frac{gt^2}{2}$$

Розв'язавши дане квадратне рівняння отримаємо: $t = 6,3$ с – час руху предмета. Швидкість v_2 знаходимо з рівняння: $v_2 = -v_{01} + gt$

Звідки $v_2 = 43,84$ м/с.

10 КЛАС

2019-2020 навчальний рік

Задача 1. Автомобіль, який їхав по шосе з постійною швидкістю 54 км/год, проїжджає повз другий автомобіль, що стоїть на сусідній смузі. У цей момент другий автомобіль рушає з місця і починає їхати за першим, рухаючись з постійним прискоренням 5 м/с^2 . За який час другий автомобіль наздожене перший? Яку швидкість він матиме в

момент, коли порівняється з першим? Автомобілі вважати матеріальними точками.

Розв'язок.

Переміщення автомобілів з моменту першої зустрічі до моменту другої зустрічі рівні. Нехай t – проміжок часу між зустрічами, S – модуль переміщення автомобілів за цей проміжок часу, $v_1 = 54 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – швидкість першого автомобіля, a – прискорення другого автомобіля. Тоді:

$$S = v_1 t = \frac{at^2}{2}, \quad t = \frac{2v_1}{a} = \frac{2 \cdot 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 6 \text{ с.}$$

Швидкість другого автомобіля через час t дорівнює:

$$v_2 = at = 30 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 108 \frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

Задача 2. Порожня металева сфера масою m і радіусом R спливає з дна озера з постійною швидкістю. Вантаж якої маси потрібно помістити всередину сфери, щоб вона занурювалася з такою ж за модулем швидкістю? Сила опору, що діє на кулю з боку рідини, залежить тільки від швидкості кулі відносно рідини і спрямована протилежно до цієї швидкості. Густина рідини ρ , об'єм сфери дорівнює $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Розв'язок.

При спливанні сфери з постійною швидкістю сума сил, що діють на неї, дорівнює нулю. Вертикально вниз діють сили тяжіння mg і опору $F_{\text{оп}}$, а вертикально вгору – сила Архімеда $F_{\text{Арх}}$. При русі вниз з тією ж постійною швидкістю вертикально вниз діє сила тяжіння $(m + \Delta m)g$, де Δm – маса доданого вантажу, а вертикально вгору – така ж сила Архімеда $F_{\text{Арх}}$, як в першому випадку, і сила опору $F_{\text{оп}}$ (незмінна за модулем через рівність модулів швидкостей сфери відносно води в обох випадках). Таким чином

$$\{F_{\text{Арх}} = mg + F_{\text{оп}} \quad F_{\text{Арх}} = (m + \Delta m)g - F_{\text{оп}}$$

Додавши рівняння, отримаємо:

$$2F_{\text{Арх}} = 2mg + \Delta mg,$$

$$\Delta m = 2 \frac{F_{\text{Арх}} - mg}{g} = 2(\rho V - m) = 2\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho - m\right)$$

Задача 3. У сучасних приватних будинках все частіше використовують проточні водонагрівачі. Температура холодної води, що іде з крану дорівнює 14°C , а температура води на виході 40°C . Визначте об'ємну витрату води в душі (у літрах за хвилину), якщо потужність водонагрівача 5 кВт , а його ККД дорівнює 80% . Питома теплоємність води дорівнює $4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$, густина води – $1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок.

Введемо позначення: q – шукана об'ємна витрата води, τ – час роботи душу, ρ – густина води, c – питома теплоємність води, t_1 , t_2 – температура води до і після нагрівання відповідно, η – ККД нагрівача, N – потужність нагрівача.

Запишемо рівняння теплового балансу: $Q_{\text{нагр}} = Q_{\text{води}}$,

$$\eta N \tau = \rho c q \tau (t_2 - t_1)$$

$$q = \frac{\eta N}{\rho c (t_2 - t_1)} \approx 3,66 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{с}} \approx 2,2 \frac{\text{л}}{\text{хв}}$$

Задача 4. Відстань між предметом і його прямим зображенням, отриманим за допомогою тонкої лінзи, дорівнює $L = 40\text{ см}$. Зображення менше предмета у $n = 3$ рази. Яка оптична сила лінзи?

Розв'язок.

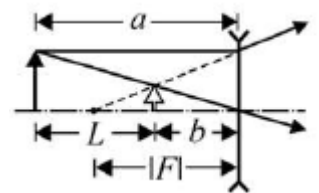
Пряме зменшене зображення предмета отримується лише за допомогою розсіювальної лінзи. Відповідна побудова наведена на рисунку.

Формула тонкої лінзи з урахуванням того, що зображення уявне, має вигляд

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = D$$

За умовою $a = n \cdot b$, $a - b = L$.

Звідси $D = -\frac{(n-1)^2}{nL} \approx -3,33\text{ дптр}$

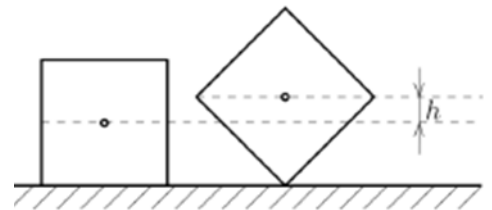


Задача 5. Силачу потрібно перемістити куб з ребром l і масою m , що лежить на горизонтальній підлозі, на відстань L , яка кратна довжині ребра куба. У нього є на вибір два способи: рівномірно штовхати куб, прикладаючи до нього горизонтальну силу, або "котити" – ставити на ребро, а потім відпускати, причому коефіцієнт тертя куба об підлогу μ такий, що ребро, що дотикається підлоги, в процесі руху не ковзає. Силач хоче витратити на переміщення мінімум енергії. Яку мінімальну роботу повинен зробити силач у першому випадку? У другому? Який спосіб енергетично вигідніше і у скільки разів, якщо коефіцієнт тертя кубу об підлогу $\mu = 0,8$?

Розв'язок.

Щоб пересунути куб першим способом, потрібно прикласти силу

$$F_1 = \mu mg$$



Робота, яка здійснюється при першому способі пересування:

$$A_1 = F_1 L = \mu mgl = 0,8mgl$$

При другому способі куб потрібно поставити на ребро N раз

$$N = \frac{L}{l}$$

З кожним разом, коли куб встає на ребро, центр мас куба піднімається на висоту:

$$h = (\sqrt{2} - 1)\frac{l}{2}$$

Значить робота, яку потрібно здійснити, щоб перекотити куб на відстань L , може бути знайдена із закону збереження енергії:

$$A_2 = mghN = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \cdot \frac{mgL}{l} = \frac{(\sqrt{2}-1)mgL}{2} \approx 0,2mgL$$

В силу умови, що накладається на коефіцієнт тертя μ , $A_2 < A_1$, причому

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\mu}{\sqrt{2}-1} \cong 4$$

10 КЛАС

2021-2022 навчальний рік

Задача 1. Підйомний кран піднімає піддон з вантажем цегли на висоту 20 м. Протягом якого часу підніметься вантаж, якщо електричний двигун крана підключений до напруги 380 В, сила струму в його обмотці дорівнює 20 А, а коефіцієнт корисної дії дорівнює 50%? Маса піддону дорівнює 160 кг, маса цегли – 600 кг. Зробіть малюнок до задачі.

Розв'язок.

$$\text{ККД двигуна: } \eta = \frac{A_{\text{кор}}}{A_{\text{затр}}}$$

$$\text{Корисна робота } A_{\text{кор}} = (m_{\text{підд}} + m_{\text{цегл}})gh$$

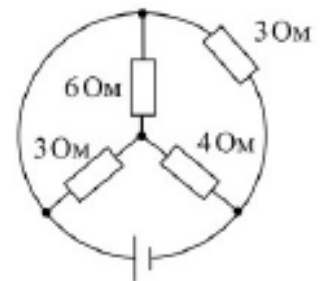
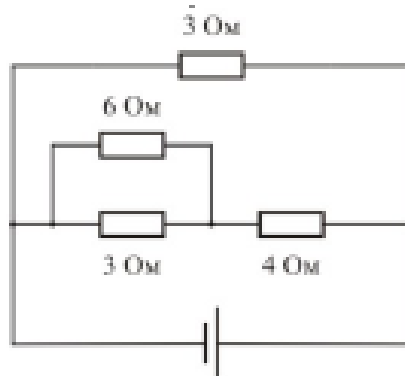
$$\text{Затрачена робота } A_{\text{затр}} = UIt$$

$$\text{Звідси час } t = \frac{mgh}{UI\eta} = 40 \text{ с}$$

Задача 2. Чому дорівнює напруга на батареї в колі, схема якого наведена на малюнку, якщо через нього протікає струм 2,5 А.

Розв'язок.

Еквівалентна схема буде такою:



Користуючись формулами для послідовного і паралельного з'єднань, отримаємо, що всі резистори на схемі можна замінити одним з опором 2 Ом.

$$\frac{1}{R_{36}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_{36} = 2 \text{ Ом}$$

$$R_{36-4} = 2 \text{ Ом} + 4 \text{ Ом} = 6 \text{ Ом}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{36-4}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2 \text{ Ом}$$

$$U = IR = 2,5 \text{ А} \cdot 2 \text{ Ом} = 5 \text{ В.}$$

Отже, напруга на батарейці дорівнює 5 В.

Задача 3. Порожня пластикова пляшка від газованої води з пробкою має масу 30 г і зовнішній об'єм 1,5 літра. Порожній кисневий балон з товстими сталевими стінками має масу 57 кг і зовнішній об'єм 47 літрів. Яку мінімальну кількість таких закритих порожніх пляшок слід прив'язати до цього балона для того, щоб зібрану конструкцію можна було без труднощів переправити вплав з одного берега озера на інший? Густина води дорівнює $1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Масою повітря в пляшках і в балоні знехтуйте.

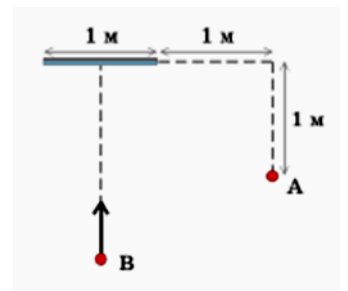
Розв'язок.

Нехай N – необхідна мінімальна кількість пляшок, $m = 30 \text{ г}$, $v = 1,5 \text{ л}$, $M = 57 \cdot 10^3 \text{ г}$, $V = 47 \text{ л}$, густина води $\rho = 1000 \frac{\text{г}}{\text{л}}$. Щоб зібрану конструкцію можна було без труднощів переправити вплав з одного берега озера на інший, має бути виконана умова: $\rho_k < \rho$, де ρ_k – середня густина конструкції.

$$\rho > \frac{Nm+M}{Nv+V} \Rightarrow N > \frac{M - \rho V}{\rho v - m} = 6,8$$

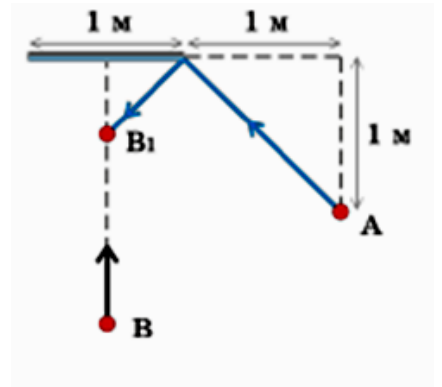
Отже, потрібно взяти не менше, ніж 7 пляшок.

Задача 4. Збоку від дзеркала шириною 1 м у точці А стоїть людина (див. рис.). Інша людина іде з точки В у напрямку до плоского дзеркала по прямій, яка проходить перпендикулярно до середини дзеркала. На якій відстані від дзеркала буде точка В у момент, коли обидві людини побачать одна одну у дзеркалі?



Розв'язок.

З рисунка видно, що кут падіння променя з точки А на дзеркало дорівнює 45° . Відбивання променя здійснюється під таким же кутом. Отже, людина з точки В має переміститися у точку B_1 , щоб побачити людину у точці А. З подібності трикутників, утворених променями і стінками видно, відстань від дзеркала до точки B_1 буде дорівнювати половині ширини дзеркала – 0,5 м.



Задача 5. На Марсі у Робота 1, що ремонтував ретрансляційну антену на висоті 29,6 м, з «кібер-рук» випав гайковий ключ. Скільки часу є у Робота 2, що знаходиться у підніжжя антени для того, щоб прийняти рішення та відійти у бік, якщо вважати, що гайковий ключ падав не зачіпаючи інші предмети і на початку падіння мав нульову швидкість. З якою швидкістю ключ вдарився об поверхню Марса біля шасі Робота 2? Зобразіть графік залежності координати гайкового ключа від часу падіння. Вважайте прискорення вільного падіння на Марсі рівним $3,7 \text{ м/с}^2$.

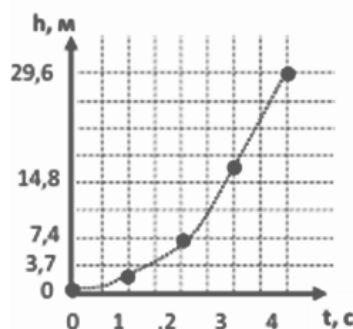
Розв'язок.

Початкову швидкість ключа можна прийняти рівною 0, тоді час його падіння дорівнює: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4 \text{ с}$.

Швидкість ключа у момент падіння на поверхню Марса:

$$v = gt = 14,8 \text{ м/с}$$

Графік матиме такий приблизний вигляд як на рисунку (масштаб по осі ординат 1 клітинка – 3,7 м).



10 КЛАС

2022-2023 навчальний рік

Задача 1. Камінь, який кинуто вертикально вгору, побував у певній точці А двічі з інтервалом часу $t_1 = 1$ с. Чому дорівнює подібний часовий інтервал t_2 , через який тіло побуває двічі в точці В. Точка В лежить на одній вертикалі з точкою А, але нижче на $h = 15$ м.

Розв'язок.

Час польоту каменя до верхньої точки траєкторії складає

$\frac{t_1}{2} = 0,5$ с. Від верхньої точки назад до точки А камінь падає протягом

тих самих 0,5 с та пролітає при цьому $y_1 = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{t_1}{2}\right)^2 = 1,25$ м. Відстань від верхньої точки до точки В дорівнює: $y_2 = y_1 + h = 16,25$ м. Цю

відстань камінь пролітає за час $\frac{t_2}{2} = \sqrt{\frac{2y_2}{g}} \approx 1,81$ с, а весь час $t_2 \approx 3,62$ с.

Задача 2. Промінь, випущений точковим джерелом світла S, послідовно відбивається від дзеркал M_1 , M_2 та M_3 , після чого проходить через точку О (рис. 1). Опишіть, як можна відновити хід променя за допомогою циркуля та лінійки без поділок.

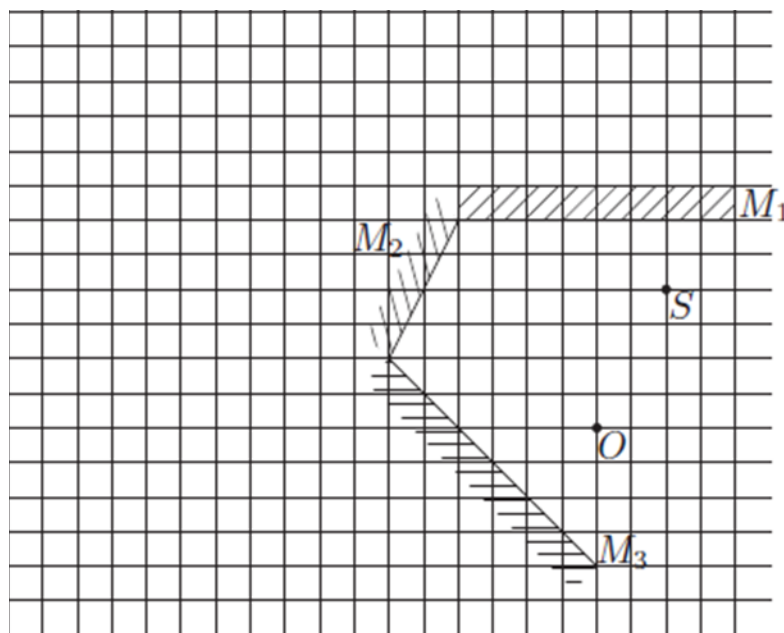


рис. 1

Розв'язок.

Побудуємо зображення S_1 джерела S в дзеркалі M_1 (за стандартною методикою). Тепер, при розгляді променів, відбитих дзеркалом M_1 , можна відволіктися від джерела S та дзеркала M_1 та вважати, що ці промені виходять із уявного джерела S_1 .

У такий же спосіб побудуємо S_{12} – уявне зображення уявного джерела S_1 в дзеркалі M_2 і, далі, S_{123} – зображення S_{12} в M_3 (рис. 2). З'єднавши S_{123} з точкою O , знайдемо точку K , в якій промінь відбився від M_3 та ділянку KO траєкторії променя.

За аналогією, з'єднуємо S_{12} з K і знаходимо точку L , в якій промінь відбився від M_2 і ділянку LK траєкторії променя.

Далі з'єднуємо S_1 з L та знаходимо точку N . Ми відновили наступну ділянку ходу променя NL . Зрештою, з'єднуючи S з N , завершуємо побудову. $SNLKO$ – шукана траєкторія променя.

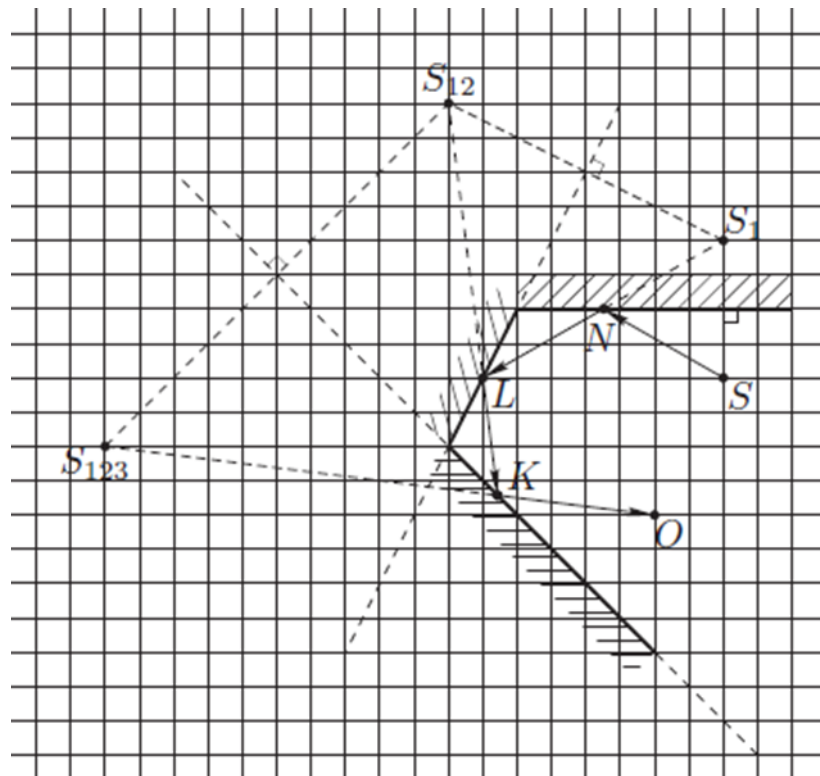


рис. 2

Задача 3. Легка пружина жорсткістю $k = 50 \text{ Н/м}$ складається з $N = 49$ витків. Визначте, на скільки сантиметрів збільшиться відстань між десятим та двадцять шостим витками вертикально розташованої пружини, якщо до неї підвісити вантаж масою $m = 600 \text{ г}$. Модуль прискорення вільного падіння вважайте рівним $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Розв'язок.

Видовження пружини $\Delta l = \frac{mg}{k}$. Отже, відстань між двома сусідніми витками збільшиться на величину: $\frac{\Delta l}{N-1} = \frac{mg}{k(N-1)}$. Тоді відстань між десятим та двадцять шостим витками пружини збільшиться на величину: $\frac{mg}{k(N-1)} \cdot (26 - 10) = 0,04$ м.

Задача 4. Кулька, підвішена на нитці довжиною 1 м рухається по колу в горизонтальній площині, так, що нитка описує конічну поверхню (конічний маятник), утворюючи кут 45° з вертикаллю. Визначити швидкість кульки ($g = 10$ м/с²).

Розв'язок.

Відповідно до рисунка:

$$x: T \cdot \sin \alpha = ma \quad (1)$$

$$y: T \cdot \cos \alpha = mg \quad (2)$$

Поділимо (1) на (2) отримаємо:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{g} \quad (3)$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l \cdot \sin \alpha} \quad (4)$$

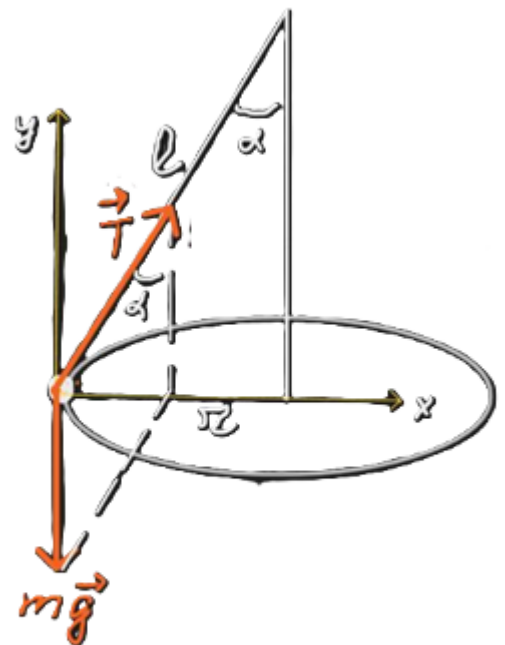
Підставимо (4) в (3) отримаємо:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{v^2}{l \cdot \sin \alpha}}{g}$$

$$v^2 = \frac{gl \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$v = \sin \alpha \sqrt{\frac{gl}{\cos \alpha}}$$

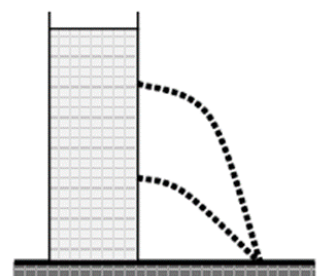
$$v = \sin 45^\circ \sqrt{\frac{10 \cdot 1}{\cos 45^\circ}} = 2,65 \text{ м/с}$$



10 КЛАС

2023-2024 навчальний рік

Задача 1. У циліндричну посудину налито воду висотою H . На висоті $h_1 = 1/3 H$ від дна в стінці зроблено маленький отвір (див. рисунок 1). На якій висоті від дна необхідно зробити ще один отвір, щоб обидва струмені води падали в одну точку?



Розв'язок.

При падінні з висоти h_1 дальність польоту S та висота h_1 пов'язані між собою співвідношеннями: $S = v_1 t_1$, $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$; $\frac{mv_1^2}{2} = mg(H - h_1)$

При падінні з висоти h_2 : $S = v_2 t_2$, $h_2 = \frac{gt_2^2}{2}$; $\frac{mv_2^2}{2} = mg(H - h_2)$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{H - h_2}{H - h_1}$$

$$h_1 \cdot (H - h_1) = h_2 \cdot (H - h_2)$$

$$h_1 \cdot H - h_1^2 = h_2 \cdot H - h_2^2$$

$$h_2^2 - h_2 \cdot H + h_1 \cdot H - h_1^2 = 0$$

$$h_2^2 - h_1^2 = h_2 \cdot H - h_1 \cdot H$$

$$h_2^2 - h_1^2 = H \cdot (h_2 - h_1)$$

$$H = h_2 + h_1$$

$$h_2 = H - h_1$$

$$h_2 = H - \frac{1}{3}H = \frac{2}{3}H$$

Задача 2. Автомобіль стартував із постійним прискоренням. Проїхавши $\frac{1}{6}$ всього шляху, він став рухатися з постійною швидкістю v . Потім він почав гальмувати з прискоренням, яке в два рази менше ніж прискорення на старті, і зупинився. Визначте середню швидкість автомобіля, якщо траєкторією його руху була пряма.

Розв'язок.

Середня швидкість автомобіля: $v_{cp} = \frac{s}{t}$ (1)

$$v_{cp} = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} \quad (2)$$

Для першої ділянки, враховуючи, що початкова швидкість дорівнювала нулю та що $s_1 = \frac{1}{6}s$, можна записати: $v = a \cdot t_1$;

$$s_1 = \frac{v^2}{2a} \quad (3)$$

$$t_1 = \frac{v}{a} = \frac{v}{\frac{v^2}{2s_1}} = \frac{2s_1}{v} = \frac{s}{3v} \quad (4)$$

Для останньої ділянки, враховуючи, що кінцева швидкість теж стала дорівнювати нулю, а прискорення в два рази менше, ніж прискорення на старті, можна записати: $v = 0,5a \cdot t_3$; $s_3 = \frac{v^2}{a}$,

$$\text{відповідно } v = 0,5a \cdot t_3 \text{ та } v = a \cdot t_1$$

$$a \cdot t_1 = 0,5a \cdot t_3 \Rightarrow t_3 = 2t_1$$

$$s_1 = \frac{v^2}{2a} \text{ та } s_3 = \frac{v^2}{a} \Rightarrow s_3 = 2s_1 = 2 \cdot \frac{1}{6}s = \frac{1}{3}s$$

Остаточно для останньої ділянки, $t_3 = 2t_1$ та $s_3 = \frac{1}{3}s$ (5)

$$t_3 = 2t_1 = 2 \cdot \frac{s}{3v} \quad (6)$$

Для середньої ділянки шляху: $t_2 = \frac{s_2}{v}$;

$$s_2 = s - s_3 - s_1 = s - \frac{1}{3}s - \frac{1}{6}s = \frac{1}{2}s \quad (7)$$

$$t_2 = \frac{s}{2v} \quad (8)$$

$$v_{cp} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{s}{\frac{s}{3v} + \frac{s}{2v} + 2 \cdot \frac{s}{3v}} = \frac{1}{\frac{1}{3v} + \frac{1}{2v} + \frac{2}{3v}} = \frac{6v}{9} = \frac{2v}{3}$$

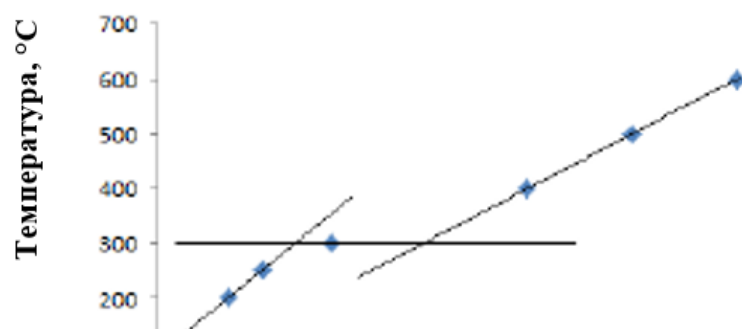
$$v_{cp} = \frac{2v}{3}$$

Задача 3. У таблиці наведено результати вимірювань температури t речовини залежно від підведеного до неї тепла Q . Визначте питому теплоємність цієї речовини, якщо відомо, що маса речовини 1 кг.

$t, ^\circ\text{C}$	100	200	250	300	400	500	600
$Q, \text{кДж}$	0	14	21	35	74	95	116

Розв'язок.

На графіку залежності



температури речовини t від підведеного до нього тепла Q видно, що перші три точки, а також останні три точки добре лягають на прямі, що мають різні нахили.

Це говорить про те, що при нагріванні речовина перейшла з одного агрегатного стану в інший. Питому теплоємність в обох випадках розрахуємо за формулою: $c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t}$. Питома теплоємність речовини в початковому агрегатному стані дорівнює: $c_1 = 140 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, в кінцевому: $c_2 = 210 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$

Задача 4. Визначте мінімальний розмір плоского дзеркала квадратної форми необхідного для того, щоб людина зростом $h = 1,8$ м, що має ширину плечей $d = 50$ см, могла побачити себе в ньому повністю.

Розв'язок.

Якби дзеркало було прямокутним, його

висота мала б дорівнювати $h/2$, а ширина

$d/2$. Такий прямокутник вписується

у квадрат мінімальних розмірів (див. рисунок), коли діагональ квадрата розташована вертикально і дорівнює: $BD = BL + LT = TD$ (1)

$$LT = \frac{h}{2}; MN = KP = \frac{d}{2} \quad (2)$$

З прямокутного трикутника BLN :

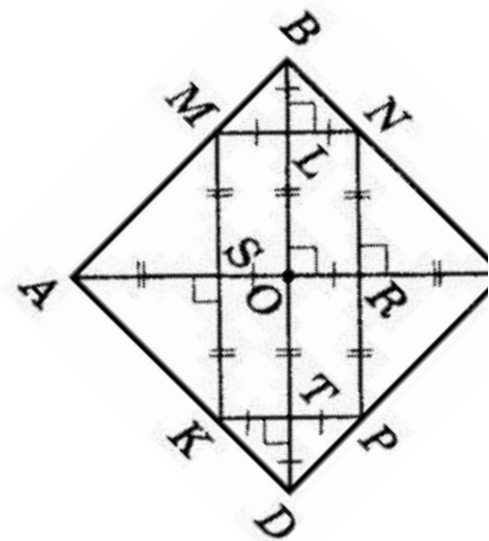
$$BL = NL = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d}{4} \quad (3)$$

За аналогією розглянемо прямокутний

трикутник KTD :

$$TD = KT = \frac{1}{2} KP = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d}{4} \quad (4)$$

Підставивши (4), (3), (2) в (1) отримаємо:



$$BD = \frac{d}{4} + \frac{h}{2} + \frac{d}{4} = \frac{h+d}{2} \quad (5)$$

Визначимо мінімальну довжину сторони квадратного плоского дзеркала.

Розглянемо прямокутний трикутник DAB ($AB = AD$), використовуючи властивість прямокутного трикутника: $BD = \sqrt{2} AB$

$$AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

Підставимо (5) в (6), остаточно отримаємо: $AB = \frac{h+d}{2\sqrt{2}}$

$$AB = \frac{180 \text{ см} + 50 \text{ см}}{2\sqrt{2}} \approx 81,33 \text{ см}$$

10 КЛАС

2024-2025 навчальний рік

Задача 1. В циліндричну посудину налили води до висоти h . У дні посудини зробили отвір з площею поперечного перерізу S_1 . При цьому рівень води у посудині підтримують постійним. Вода витікаючи

з посудини утворює струмінь, що не розбризкується. Сили тертя в струмені відсутні. Визначте площу поперечного перерізу струменя води, що витікає з посудини на відстані $4h$ від її дна. Зміною прискорення вільного падіння g з висотою знехтуйте.

Розв'язок.

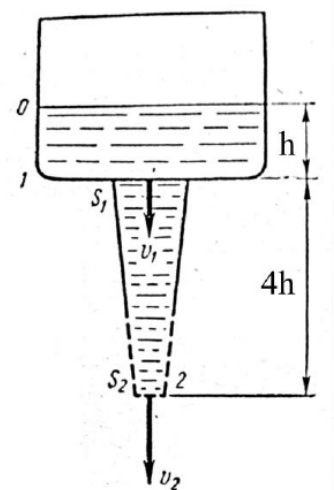
Якщо не враховувати стисливість рідини, то за однакові проміжки часу через перерізи струменя проходить однакова кількість рідини:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

v_1 – швидкість проходження рідини через переріз 1, v_2 – швидкість проходження рідини через переріз 2.

Запишемо закон збереження енергії для різних рівнів рідини (рівні 0 та 1).

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} \quad \text{або} \quad \rho gh = \frac{\rho v_1^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

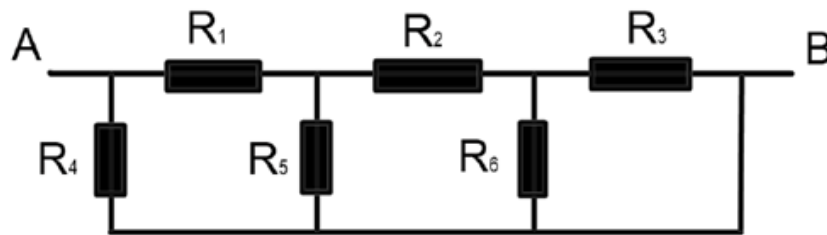


При переході цього ж об'єма через перерізи 0 і 2

$$mg5h = \frac{mv_2^2}{2}, \Rightarrow v_2 = \sqrt{10gh}$$

$$\text{Тоді } S_1 v_1 = S_2 v_2, S_1 \sqrt{2gh} = S_2 \sqrt{10gh}, \quad S_1 = S_2 \sqrt{5} \approx 2,24 S_2$$

Задача 2. Визначте опір ділянки кола (див. рисунок), якщо $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 6 \text{ Ом}$, $R_4 = 8 \text{ Ом}$, $R_5 = 10 \text{ Ом}$, $R_6 = 12 \text{ Ом}$.



Розв'язок.

Зобразимо еквівалентну схему.

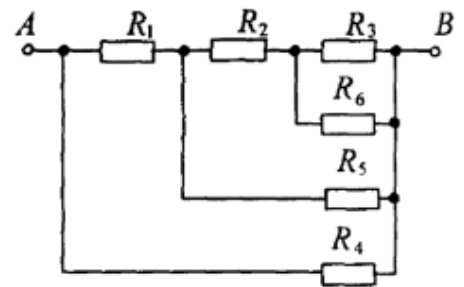
$$R_{36} = \frac{R_3 \cdot R_6}{R_3 + R_6}; \quad R_{36} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4 \text{ Ом}$$

$$R_{236} = R_2 + R_{36} = 4 \text{ Ом} + 4 \text{ Ом} = 8 \text{ Ом}$$

$$R_{2365} = \frac{R_{236} \cdot R_5}{R_{236} + R_5}; \quad R_{2365} = \frac{8 \cdot 10}{8 + 10} = 4,44 \text{ Ом}$$

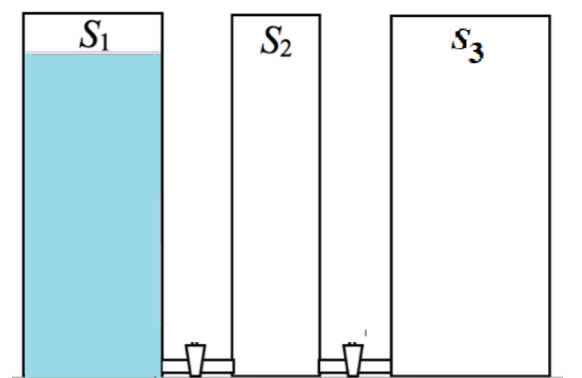
$$R_{12365} = R_1 + R_{2365} = 2 \text{ Ом} + 4,44 \text{ Ом} = 6,44 \text{ Ом}$$

$$R = \frac{R_{12365} \cdot R_4}{R_{12365} + R_4}; \quad R = \frac{6,44 \cdot 8}{6,44 + 8} = 3,57 \text{ Ом}$$



Задача 3. Є три циліндричні сполучені посудини (див. рисунок)

У початковому стані наповненою є перша посудина, а обидва крани закриті. Спочатку відкривають перший кран між 1 та 2 посудинами. Після встановлення рівня заповнення, закривають перший кран та



відкривають другий. Визначити рівні рідини в кожній посудині, якщо початковий рівень у першій посудині $h_1 = 1 \text{ м}$, площа поперечного

перерізу першої посудини $S_1 = 15 \text{ см}^2$, другої – $S_2 = 10 \text{ см}^2$, третьої – $S_3 = 20 \text{ см}^2$.

Розв'язок.

Після відкриття крана між 1 та 2 посудинами встановиться рівень:

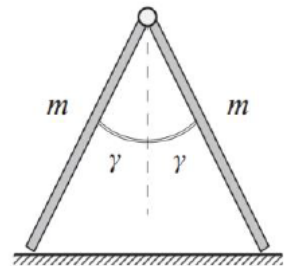
$$h_1 \cdot S_1 = H_1 \cdot (S_1 + S_2) \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{h_1 \cdot S_1}{(S_1 + S_2)} \quad H_1 = \frac{15}{25} = 0,6 \text{ м},$$

після закриття 1 крана цей рівень збережеться в 1 посудині.

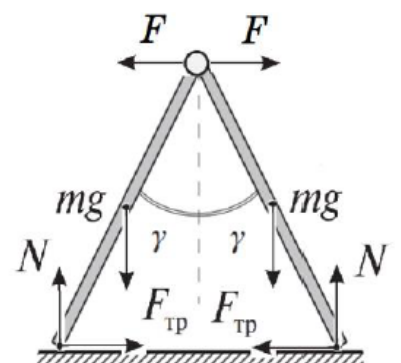
Після закриття 1 крана та відкриття 2 крана в 2 та 3 посудині встановиться однаковий рівень: $H_1 \cdot S_2 = H_{23} \cdot (S_2 + S_3)$

$$H_{23} = \frac{H_1 \cdot S_2}{(S_2 + S_3)} \quad H_{23} = \frac{6}{30} = 0,2 \text{ м}$$

Задача 4. На рисунку зображено конструкцію, що складається із двох однакових однорідних дошок масою m кожна, з'єднаних шарнірно та нахилених під кутами γ до вертикалі. Визначте, із якою силою взаємодіють між собою частини конструкції. При якому мінімальному значенні коефіцієнта тертя μ між дошкою і підлогою частини конструкції не роз'їжджатимуться? Система перебуває у рівновазі. Тертя в шарнірі немає. Прискорення вільного падіння g .



Розв'язок. Розставимо зовнішні сили на всю систему (дві сили тяжіння, дві сили реакції і дві сили тертя) і внутрішню силу F . Сила, що діє з боку правої частини конструкції на ліву, дорівнює по модулю і протилежна за напрямом силі, що діє з боку лівої частини на праву. Отже, з міркувань симетрії конструкції зрозуміло, що сила



F горизонтальна. З правила моментів щодо нижньої лівої точки (для лівої частини конструкції) отримаємо: $F = m g \frac{\tan \gamma}{2}$

При шуканому мінімальному значенні коефіцієнта тертя сума сил дорівнює нулю, а сила тертя максимальна. Із рівності нулю суми слідує, що:

$$N = mg \text{ та } F_{\text{тр}} = F = mg \frac{tg \gamma}{2} \quad (1)$$

$$\text{Сила тертя максимальна, отже } F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \quad (2)$$

$$\text{Порівнявши (1) та (2) отримаємо: } mg \frac{tg \gamma}{2} = \mu mg$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{tg \gamma}{2}$$

11 КЛАС

2018-2019 навчальний рік

Задача 1. У запаяній трубці знаходиться 1 г водяної пари та деяка кількість води. Початкова температура вмісту трубки $t_0 = 7^\circ\text{C}$. Температуру в трубці підвищили до $t = 77^\circ\text{C}$, а тиск пари у ній зріс у 10 разів. Визначте, скільки грамів води було в трубці? Нижче у таблиці приведений тиск насиченої водяної пари при деяких температурах.

t, °C	0	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
p, кПа	0,61	1,00	1,94	3,57	6,28	10,61	17,31	27,33	41,88	62,49	90,94

Розв'язок.

Відповідно до умови задачі пару можна вважати ідеальним газом, тому запишемо двічі рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$p_0 V = \frac{m_0}{M} RT_0 \quad (1), \text{ та} \quad 10p_0 V = \frac{m_0 + m}{M} RT \quad (2)$$

При цьому з умови задачі можна зробити висновок, що спочатку пара є насиченою, а в кінці – ненасиченою і, відповідно, вода випарувалась уся. Розділивши рівняння (1) на (2) отримаємо:

$$10 = \frac{m_0 + m}{m_0} \cdot \frac{T}{T_0}$$

$$10 \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{m}{m_0} \Rightarrow m = (10 \cdot \frac{T_0}{T} - 1) \cdot m_0$$

$$m = (10 \cdot \frac{280,15}{350,15} - 1) \cdot 1$$

$$m = 7 \text{ г}$$

Задача 2. Один конденсатор заряджений до напруги $U_1 = 10 \text{ В}$, а інший – до напруги $U_2 = 20 \text{ В}$. Після їх з'єднання обкладинками, що мають однойменні заряди, на них встановилося напруга $U_3 = 12 \text{ В}$. Яка напруга U_4 встановилося б на конденсаторах, якби їх з'єднали обкладинками, що мають різнойменні заряди?

Розв'язок.

Запишемо закон збереження заряду окремо для двох випадків:

1) при з'єднанні конденсаторів обкладинками, що мають однойменні заряди;

2) при з'єднанні конденсаторів обкладинками, що мають різнойменні заряди.

1) При з'єднанні конденсаторів обкладинками, що мають однойменні заряди:

$$\text{загальний заряд системи: } Q = q_1 + q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2 \quad (1)$$

$$\text{загальна ємність системи: } C = C_1 + C_2 \quad (2)$$

$$\text{напруга на конденсаторах після з'єднання: } U_3 = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

Прирівнявши рівняння (1) та (3), а також врахувавши рівняння (2) отримаємо

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 = (C_1 + C_2) U_3 \quad (4)$$

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 = C_1 U_3 + C_2 U_3$$

$$C_1 U_1 - C_1 U_3 = C_2 U_3 - C_2 U_2$$

$$C_1 (U_1 - U_3) = C_2 (U_3 - U_2)$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{U_3 - U_2}{U_1 - U_3}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{U_2 - U_3}{U_3 - U_1}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{20 \text{ В} - 12 \text{ В}}{12 \text{ В} - 10 \text{ В}} = 4$$

$$C_1 = 4 \cdot C_2 \quad (5)$$

2) При з'єднанні конденсаторів обкладинками, що мають різнойменні заряди:

$$\text{загальний заряд системи: } Q = q_1 - q_2 = C_1 U_1 - C_2 U_2 \quad (6)$$

$$\text{загальна ємність системи не змінюється: } C = C_1 + C_2 \quad (7)$$

$$\text{напруга на конденсаторах після з'єднання: } U_4 = \frac{Q}{C} \quad (8)$$

Прирівнявши рівняння (6) та (8), а також врахувавши рівняння (7) та (5) отримаємо: $C_1 U_1 - C_2 U_2 = (C_1 + C_2) U_4 \quad (9)$

З рівняння (9) знаходимо U_4 : $4C_2 \cdot U_1 - C_2 \cdot U_2 = 5C_2 \cdot U_4$

$$4U_1 - U_2 = 5 \cdot U_4$$

$$U_4 = \frac{4U_1 - U_2}{5}$$

$$U_4 = \frac{4 \cdot 10 \text{ В} - 20 \text{ В}}{5}$$

$$U_4 = 4 \text{ В}$$

Задача 3. У кабіні космічного корабля, який має висоту 3 м, створено однорідне електричне поле. Поле направлено від стелі до підлоги та має напруженість 1000 В/м. Від підлоги до стелі з різними початковими швидкостями кидають маленьку пружну кульку, що має заряд 10^{-5} Кл та масу 1 г. Побудуйте графік залежності часу, за який кулька впаде на підлогу від початкової швидкості, з якою її кидають. З якою швидкістю необхідно кинути кульку, щоб вона найдовше летіла до підлоги? Опором повітря знехтувати. Кульку можуть кидати з швидкостями від 1 м/с до 10 м/с.

Розв'язок.

На кульку діє сила $F = qE$, яка гальмує рух кульки та надає їй прискорення: $a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \quad (1).$

Якщо переміщення кульки $S = \frac{v_0^2}{2a}$ менше H , то кулька не удариться об стелю. У даному випадку:

$$v_0 < \sqrt{2Sa} = \sqrt{\frac{2HqE}{m}} \quad (2)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3}{10^{-3}}} = \sqrt{60} \approx 7,746 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Час руху вгору визначаємо з рівняння швидкості $0 = v_0 - at$.

Звідси, $t = \frac{v_0}{a} \quad (3),$

підставимо рівняння (1) та (2) в (3), отримаємо:

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{\sqrt{\frac{2HqE}{m}}}{\frac{qE}{m}} = \sqrt{\frac{2Hm}{qE}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{10^{-5} \cdot 1000}} = \sqrt{0,6} = 0,775 \text{ с}$$

Врахувавши, що загальний час руху кульки подвоюється, то $t = 1,55 \text{ с}$.

Розглянемо випадок у інтервалі швидкостей від 7,746 м/с до 10 м/с, коли кулька ударяється в стелю. Скористаємося двома закономірностями:

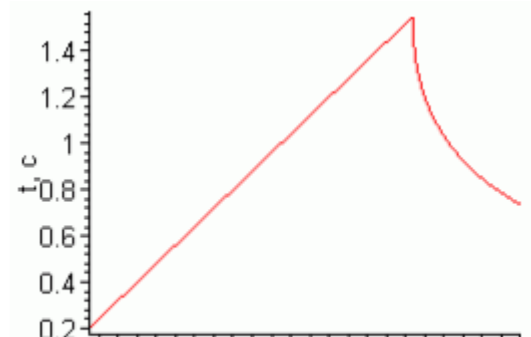
1) удар кульки об стелю буде пружним, тому швидкість кульки не зміниться за величиною, а лише змінить напрямок руху. Швидкість кульки визначимо з формули:

$$H = \frac{v^2 - v_0^2}{-2a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2aH}$$

2) оскільки рух кульки вгору та вниз відбуваються з однаковим прискоренням і удар пружний, то можна скористатися властивістю зворотності механічного руху, тобто після удару кулька впаде з тією ж швидкістю, яку вона мала в момент кидка, та час руху кульки вгору буде дорівнювати часу руху вниз.

$$\text{Тоді } t = 2 \cdot \frac{v - v_0}{-a} = 2 \cdot \frac{v_0 - v}{a} = 2 \cdot \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aH}}{a}$$

та час руху кульки починає зменшуватися. Отже, максимальний



час руху кульки 1,55 с при швидкості 7,746 м/с.

Графік залежності часу, за який кулька впаде на підлогу від початкової швидкості, з якою її кидають (див. рисунок):

Задача 4. Футболіст забиває гол з одинадцятиметрової відмітки точно під перекладину воріт. Яку мінімальну енергію потрібно було надати для цього м'ячу? Висота воріт 2,5 м, маса м'яча 0,5 кг. Опором повітря знехтувати.

Розв'язок.

Розглянемо один із можливих варіантів розв'язку: позначимо мінімальну вертикальну складову швидкості м'яча як v_1 , а мінімальну горизонтальну складову цієї швидкості як v_2 . Мінімальна вертикальна складова швидкості визначається із умови підйому на висоту воріт h , за формулами: $h = \frac{gt^2}{2}$ та $v_1 = gt$. З них отримуємо: $v_1 = \sqrt{2hg}$.

Горизонтальна складова визначається із умови, щоб за час підйому $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ м'яч долетів до воріт: $v_2 = \frac{l}{t} = \frac{l}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = l \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}$,

де $l = 11$ м – відстань, з якої здійснюється удар. Оскільки енергія, яка надається м'ячу футболістом є повністю кінетичною, то її мінімальне значення визначається за формулою:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2} = \frac{m(2hg + \frac{gl^2}{2h})}{2} = mg(h + \frac{l^2}{4h})$$

Підставляючи чисельні значення, отримуємо:

$$E = 0,5 \cdot 9,81 \cdot (2,5 + \frac{11^2}{4 \cdot 2,5}) \approx 71,61 \text{ Дж}$$

Задача 5. Після розгону по злітно-посадковій смузі, спрямованій строго на схід, і набору потрібної висоти, літак здійснює лівий розворот в горизонтальній площині, в напрямку строго на північний захід. Сидячий у вікна літака пасажир оцінив, що крен під час розвороту становив 30° , а час розвороту – 100 с. Знайти радіус дуги кола, по якому рухався літак під час розвороту, та його швидкість.

Розв'язок.

При горизонтальному польоті підйомна сила крил літака врівноважує силу тяжіння. При нахилі літака під час розвороту підйомна сила, як і раніше перпендикулярна площині крил літака, розкладається на дві складові: вертикальна складова врівноважує силу тяжіння, а горизонтальна складова є доцентровою силою:

$$F = \frac{mv^2}{R} = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

де $\alpha = 30^\circ$ – крен літака, v – його швидкість при русі по дузі кола.

$$\text{Швидкість дорівнює } v = \sqrt{gR \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad (1)$$

При розвороті з напрямку на схід на північно-західний напрям вектор швидкості літака повертається на кут $\varphi = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$. Довжина дуги кола, по якій рухався літак, виражається через кут і радіус, а також швидкість:

$$L = \varphi R = \frac{3\pi R}{4} = vt \quad (2)$$

Підставивши рівняння (1) в рівняння (2), отримаємо:

$$\frac{3\pi R}{4} = t \sqrt{gR \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{9\pi^2 R^2}{16} = t^2 \cdot g \cdot R \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$R = \frac{16}{9\pi^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot g \cdot t^2 \quad (3)$$

$$R = \frac{16}{9 \cdot 3,14^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 9,81 \cdot 100^2 = 10,212 \text{ м}$$

З рівняння (2) та (3) знайдемо швидкість літака: $\frac{3\pi R}{4} = vt$

$$\frac{3\pi \cdot 16}{4 \cdot 9\pi^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot g \cdot t^2 = vt$$

$$v = \frac{4}{3\pi} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot g \cdot t$$

$$v = \frac{4}{3\pi} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot g \cdot t$$

$$v = \frac{4}{3 \cdot 3,14} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 9,81 \cdot 100 = 240,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

11 КЛАС

2019-2020 навчальний рік

Задача 1. Вільнопадаюче тіло за останню секунду падіння пройшло шлях $l = 63,7$ м. З якої висоти падало тіло?

Розв'язок.

Нехай тіло падало t секунд, тоді висота падіння:

$$h = \frac{gt^2}{2},$$

а за $(t-1)$ секунд падіння тіло пройшло шлях: $\frac{g(t-1)^2}{2}$.

Отже за останню секунду воно пройшло шлях:

$$l = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-1)^2}{2} = \frac{g}{2}(t^2 - (t-1)^2) = \frac{g}{2}(2t-1)$$

$$l = \frac{g}{2}(2t-1)$$

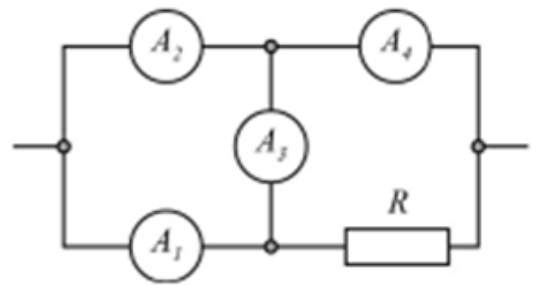
$$\frac{2l}{g} = 2t-1$$

$$\Rightarrow t = \frac{l}{g} + \frac{1}{2}$$

Отриманий час підставляємо у формулу висоти $h = \frac{gt^2}{2}$

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{l}{g} + \frac{1}{2}\right)^2 \approx 240 \text{ м}$$

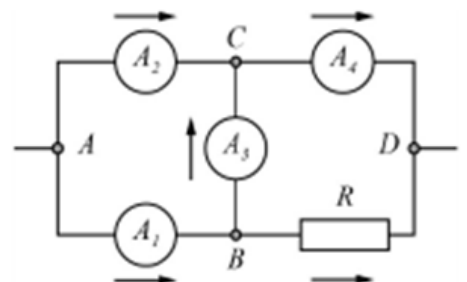
Задача 2. Електричне коло складається з резистору опором R і чотирьох однакових амперметрів з внутрішнім опором r . Покази амперметрів A_1 і A_2 рівні $I_1=3\text{ А}$, $I_2=5\text{ А}$. Знайти відношення опорів R/r .



Розв'язок.

На рисунку стрілками показані обрані нами додатні напрями струмів у гілках кола.

Оскільки в контурі АСВ відсутні джерела ЕРС, то



$$I_2 r = I_3 r + I_1 r \Rightarrow I_3 = I_2 - I_1 = 2 \text{ A}$$

Запишемо закон збереження електричного заряду для вузла В:

$$I_1 = I_3 + I_R \Rightarrow I_R = I_1 - I_3 = 1 \text{ A}$$

Аналогічно знаходимо струм $I_4 = I_2 + I_3 = 7 \text{ A}$

Для контуру CDB, в якому також відсутні джерела ЕРС:

$$I_3 r + I_4 r = I_R R \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{I_3 + I_4}{I_R} = 9$$

Задача 3. Розсіювальна лінза дає зображення предмета зі збільшенням 0,2. Якщо впритул до неї приставити тонку збиральну лінзу, то при тій же відстані до предмета ця система створить пряме зображення зі збільшенням 2/3. Визначте, з яким збільшенням вийде зображення предмета від однієї збиральної лінзи при тій же відстані від лінзи до предмета.

Розв'язок.

Розсіювальна лінза дає уявне зображення

$$-\frac{1}{F_1} = -\frac{1}{b_1} + \frac{1}{a_1}$$

Збільшення для розсіювальної лінзи:

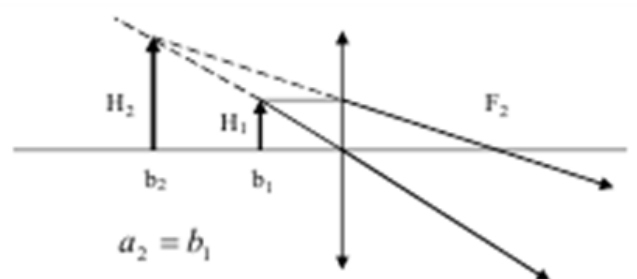
$$k_1 = \frac{H_1}{h} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{5}$$

де h – висота предмета;

H_1 – висота зображення у розсіювальній лінзі.

Якщо впритул до розсіювальної лінзи приставити збиральну лінзу, то зображення, отримане у розсіювальній лінзі, буде предметом для збиральної лінзи. За умовою задачі система створює пряме зображення, отже зображення у збиральній лінзі буде уявним.

За формулою лінзи для уявного зображення можемо записати:



$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2}$$

Збільшення системи

$$k = k_1 k_2 = \frac{H_1}{h} \cdot \frac{H_2}{H_1} = \frac{H_2}{h} = \frac{2}{3}$$

З перших двох формул отримуємо $F_1 = \frac{a_1}{4}$ тобто $a_1 = 4F_1$

$$b_1 = \frac{4F}{5}$$

З останньої формули збільшення збиральної лінзи в системі

$$k_2 = \frac{5}{3} \quad a_2 = b_1 \quad k_2 = \frac{b_2}{a_2} = \frac{5}{3}$$

Тоді $F_2 = 2F_1$ і $a_1 = 2F_2$

Предмет знаходиться на подвійній фокусній відстані від збиральної лінзи, отже, збільшення зображення предмета від однієї збиральної лінзи буде дорівнювати

$$k_0 = 1$$

Задача 4. Визначити силу струму через кожний з резисторів, якщо до кола (точки А і В) прикладена напруга $U=84$ В. Опори резисторів в колі:

$$R_1 = R_5 = R_8 = 12 \text{ Ом};$$

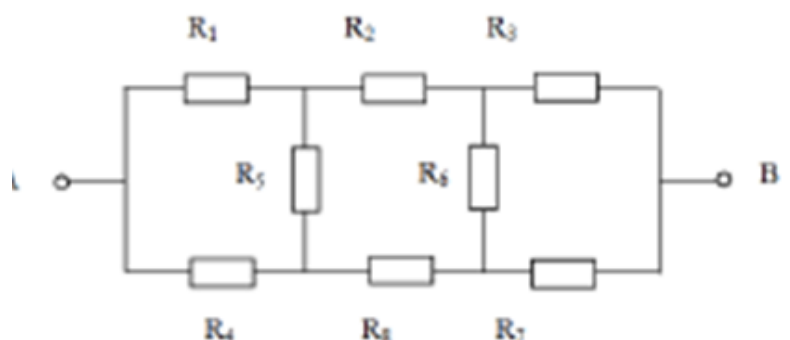
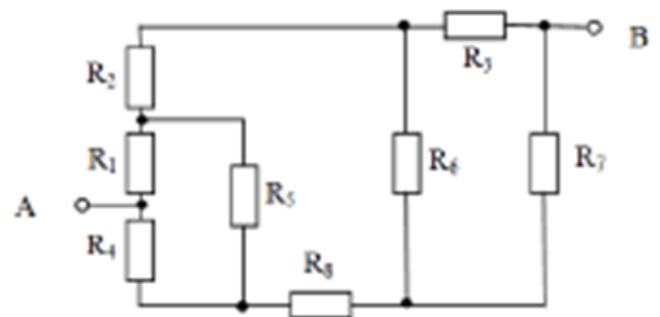
$$R_2 = R_6 = R_7 = 6 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 24 \text{ Ом}; R_3 = 3 \text{ Ом}.$$

Розв'язок.

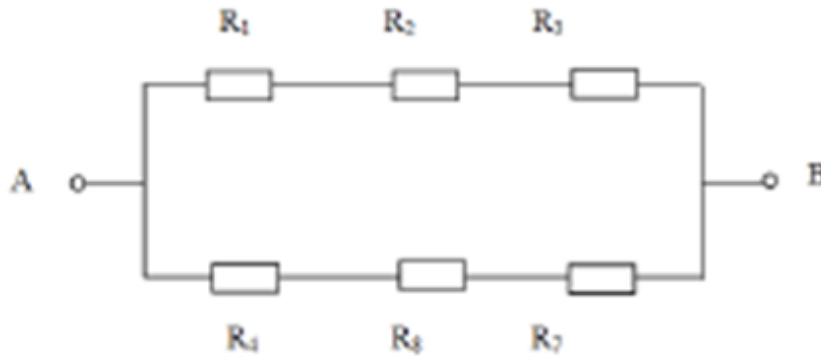
Зобразимо еквівалентну схему:

У верхній ділянці кола $R_1:R_2:R_3 = 12:6:3 = 4:2:1$;



У нижній ділянці кола $R_4:R_8:R_7 = 24:12:6 = 4:2:1$

Тому опір R_5 з'єднує точки з рівними потенціалами. Теж саме відноситься до опору R_6 . Ці опори можна виключити з кола, тоді отримуємо наступну схему:



Ділянки кола з'єднані паралельно. Струм у нижній ділянці:

$$I = \frac{U}{R_4 + R_8 + R_7} = 2A$$

Струм у верхній ділянці:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = 4A$$

Таким чином через опори 5 та 6 струм = 0;

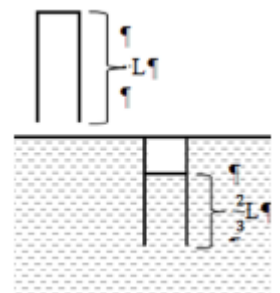
Через опори 1, 2, 3 – струм = 4А;

Через опори 4, 7, 8 – струм = 2А.

11 КЛАС

2021-2022 навчальний рік

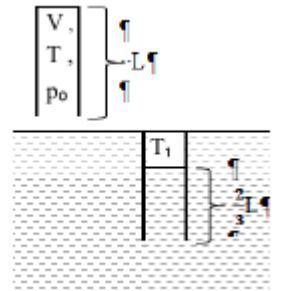
Задача 1. Запаяна з одного кінця циліндрична трубка довжиною L занурювалася в воду до тих пір, доки запаяний кінець її не виявився на одному рівні з поверхнею води (див. рис.). Коли температури повітря і води зрівнялися, виявилася, що вода в трубці піднялася на висоту $\frac{2}{3} L$. Визначте T – початкову температуру повітря в трубці, якщо температура води T_1 , а атмосферний тиск p_0 .



Розв'язок.

Зміна стану повітря у трубці згідно закону Менделєєва-Клапейрона при сталих масі і молярній масі

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$



До занурення трубки: тиск $p = p_0$, об'єм повітря V , температура T .

У зануреній трубці: тиск повітря $p_1 = p_0 + \frac{1}{3}L\rho g$;

об'єм повітря $V_1 = \frac{1}{3}LS$ і температура T_1 .

Тоді закон Менделєєва-Клапейрона матиме вигляд:

$$\frac{p_0 LS}{T} = \frac{\left(p_0 + \frac{1}{3}\rho g L\right) \frac{1}{3}LS}{T_1}$$

$$\Rightarrow T = T_1 \frac{3p_0}{p_0 + \frac{1}{3}\rho g L}$$

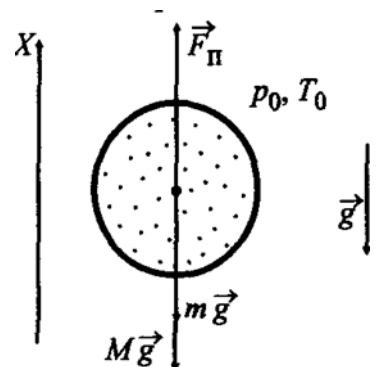
Задача 2. У повітряній кулі з еластичною тонкою оболонкою знаходиться газ об'ємом $V_0 = 1500 \text{ м}^3$ за температури $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$. На скільки зміниться підйомна сила повітряної кулі, якщо газ у ній нагріти на $\Delta t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$? Тиск і температура повітря в атмосфері дорівнюють

$p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $T_0 = 273 \text{ К}$ відповідно. Молярна маса повітря $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Розв'язок.

На повітряну кулю діють три сили: сила тяжіння оболонки кулі Mg , сила тяжіння газу mg і виштовхувальна сила з боку повітря, $F_A = \rho g V$, де V – об'єм кулі, ρ – густина повітря навколо кулі. Підйомна сила кулі за другим законом Ньютона:

$$F_{\Pi} = \rho g V - (Mg + mg).$$



При зміні температури газу змінюється лише об'єм кулі, оскільки оболонка еластична ($p = \text{const}$) і непроникна ($m = \text{const}$).

$$\text{Отже } \Delta F_{\text{п}} = \rho g \Delta V$$

Задача 3. Яку кінетичну енергію переносить вітер через перпендикулярну напрямку вітру площу $S = 1\text{ м}^2$ за добу, якщо швидкість вітру $v = 5\text{ м/с}$, а густина повітря $\rho = 1,3\text{ кг/м}^3$? Чи вистачить цієї енергії, перетвореної в електричну енергію за допомогою вітряної електростанції для освітлення, наприклад, невеликого дачного будиночка (5-6 лампочок по 20 Вт кожна)? ККД вітрової станції вважати рівним 100 %.

Розв'язок.

Кінетична енергія одного кубічного метра повітря:

$$k = \frac{\rho v^2}{2}$$

Обсяг повітря, що переноситься за добу через площу в квадратний метр $V = vT$, де $T = 24\text{ год}$. За добу через квадратний метр буде перенесена кінетична енергія

$$K = \frac{\rho v^2}{2} vT = \frac{\rho v^3 T}{2}$$

Підставляючи в цю формулу числові значення, отримаємо:

$$K = 7020000\text{ Дж} = 1,95\text{ кВт}\cdot\text{год}.$$

Цієї енергії вистачить, наприклад, для живлення шести лампочок, потужністю по 20 Вт (енергозберігаюча лампочка) кожна, протягом 16 годин, тобто вистачить для освітлення невеликого дачного будиночка.

Задача 4. Плоский конденсатор ємністю $C = 22\text{ пФ}$, резистор з опором $R = 10\text{ МОм}$ і батарея з ЕРС $\varepsilon = 100\text{ В}$ з'єднані послідовно. Відстань між обкладинками конденсатора швидко зменшують в $n = 2$ рази. Знайдіть кількість теплоти Q , що виділиться після цього на резисторі. Внутрішнім опором батареї знехтувати.

Розв'язок.

До зміщення пластин напруга на конденсаторі $U_1 = \varepsilon$, а заряд $q_1 = \varepsilon C$. Після зміщення пластин ємність конденсатора збільшилася в n разів ($C_2 = nC$), а напруга в n разів зменшилася ($U_2 = \frac{\varepsilon}{n}$). Енергія електричного поля конденсатора відразу після зміщення пластин:

$$W_1 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{CS^2}{2n}$$

У колі виникне електричний струм, який буде протікати, поки напруга на конденсаторі знову не стане рівною ε , а заряд на обкладинках $q_2 = \varepsilon nC$. Енергія конденсатора після встановлення рівноваги:

$$W_2 = \frac{C_2 S^2}{2} = \frac{nCS^2}{2}$$

За час протікання струму через батарею ЕРС пройде заряд:

$$\Delta q = q_2 - q_1 = sC(n - 1).$$

Сторонні сили батареї при цьому здійснять роботу:

$$A_{\text{ст}} = \Delta qs = s^2 C (n - 1)$$

Відповідно до закону збереження енергії:

$$Q = A_{\text{ст}} - (W_2 - W_1) = \frac{s^2 C (n-1)}{2n} = 55 \text{ нДж.}$$

Задача 5. На двох довгих паралельних рейках, розташованих на горизонтальній поверхні на відстані $l = 1$ м одна від одної, лежить перпендикулярно до рейок струмопровідний стрижень масою $m = 0,5$ кг. Коефіцієнт тертя між стрижнем і рейками $\mu = 0,1$. Вся система знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор індукції якого спрямований вертикально і за модулем дорівнює $B = 0,1$ Тл. Рейки підключають до джерела з ЕРС $\varepsilon = 10,1$ В, в результаті чого стрижень починає рухатися. Нехтуючи опором рейок і внутрішнім опором джерела, а також вважаючи опір відрізка стрижня між точками його контакту з рейками рівним $R = 2$ Ом, знайдіть, з якою сталою швидкістю v_0 буде рухатися стрижень. Прискорення вільного падіння прийміть рівним $g = 10$ м/с².

Розв'язок.

Стрижень прийде у рухомий стан під дією сили Ампера $F_A = BIl$. Де I – сила струму у колі. Використовуючи закон електромагнітної індукції і правило Ленца, знаходимо, що при русі стрижня зі швидкістю v на його кінцях виникає ЕРС індукції $\varepsilon_{\text{інд}} = Bvl$,

спрямована проти ЕРС джерела. За законом Ома для замкненого кола маємо: $I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\text{інд}}}{R}$.

За другим законом Ньютона для стрижня: $ma = F_A - F_{\text{тер}}$,

де a – прискорення стрижня, а $F_{\text{тер}} = \mu mg$ – модуль сили тертя ковзання. При устаткованому русі стрижня $a = 0$, а $v = v_0$.

З записаних виразів випливає рівність:

$$\frac{(\varepsilon - Bv_0 l)Bl}{R} = \mu mg \Rightarrow v_0 = \frac{1}{Bl} \left(\varepsilon - \frac{\mu mg R}{Bl} \right) = 1 \text{ м/с}$$

При $\varepsilon \leq 10$ В стрижень не зрушить з місця і його швидкість дорівнюватиме 0.

11 КЛАС

2022-2023 навчальний рік

Задача 1. До кінця вертикально підвішеної пружини, масою якої можна знехтувати, підвішують вантаж масою m . Потім до середини вже розтягнутої пружини підвішують ще один вантаж такої ж маси. Знайти довжину розтягнутої пружини. Жорсткість пружини дорівнює k , а її довжина в нерозтягнутому стані l_0 .

Розв'язок.

При підвішуванні першого вантажу пружина видовжується на:

$$\Delta l = \frac{mg}{k},$$

тобто, кожна половина пружини видовжується на:

$$\Delta l = \frac{mg}{2k},$$

При підвішуванні другого вантажу довжина нижньої половини пружини не змінюється. Видовження верхньої половини пружини збільшується удвічі і дорівнює $\Delta l = \frac{2mg}{2k}$, так як сила натягу цієї частини пружини зростає в два рази. Отже, видовження всієї пружини, таким чином, буде дорівнювати: $\frac{mg}{2k} + \frac{mg}{k} = \frac{3mg}{2k}$, а довжина пружини буде дорівнювати: $l_0 + \frac{3mg}{2k}$.

Задача 2. З одним молем одноатомного ідеального газу відбувається циклічний процес, графік якого в координатах «тиск-об'єм» наведено на рис. 1. Знайти ККД процесу. Усі необхідні величини дано на рис. 1.

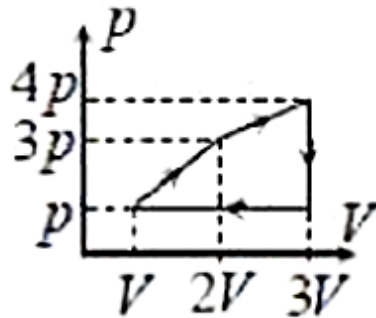


рис. 1

Розв'язок.

Робота газу за цикл дорівнює площі цикла: $A = \frac{7pV}{2}$

Газ отримує тепло від нагрівника в процесі розширення від V до $2V$, від $2V$ до $3V$. Застосовуючи до всього цього процесу перший закон термодинаміки, отримаємо: $Q = A + \Delta U$,

$$Q = \frac{11pV}{2} + \frac{33pV}{2} = \frac{44pV}{2}$$

$$\eta = \frac{A}{Q}$$

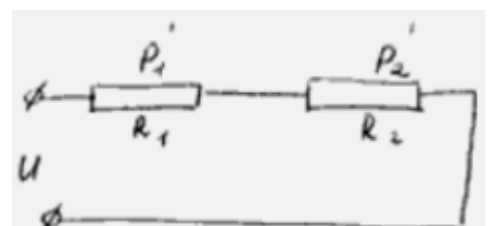
$$\eta = \frac{7}{44} = 15,9 \%$$

Задача 3. Два студенти, Сергій та Святослав, які живуть у сусідніх кімнатах, вирішили зекономити, з'єднавши свої світильники послідовно. Вони домовились, що встановлять лампочки по 100 Вт і будуть платити за електроенергію порівну. Однак, кожен з них вирішив отримати краще освітлення за рахунок іншого: Сергій встановив лампочку потужністю 200 Вт, а Святослав – лампочку потужністю 50 Вт. Котрий із студентів отримає краще освітлення і який з них платитиме за іншого.

Розв'язок.

$$P_1 = P_2 = 100 \text{ Вт}, P_1' = 200 \text{ Вт}, P_2' = 50 \text{ Вт}.$$

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1'}, \quad R_2 = \frac{U^2}{P_2'}$$



$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$I = \frac{U}{\frac{U^2}{P_1} + \frac{U^2}{P_2}}$$

При послідовному з'єднанні на першій лампочці буде виділятися потужність P_1' , на другій – P_2' .

Тоді
$$\begin{cases} P_1'' = I^2 R_1 \\ P_2'' = I^2 R_2 \end{cases}$$

$$\frac{P_1''}{P_2''} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{P_1''}{P_2''} = \frac{\frac{U^2}{P_1'}}{\frac{U^2}{P_2'}}$$

$$\frac{P_1''}{P_2''} = \frac{P_2'}{P_1'}$$

$$\frac{P_1''}{P_2''} = \frac{50 \text{ Вт}}{200 \text{ Вт}} = \frac{1}{4}$$

Відповідь: На другій лампочці ($P_2' = 50 \text{ Вт}$) буде виділятися в 4 рази більша потужність ніж на першій. Отже, Святослав використовує гроші Сергія. Краще освітлення отримає Святослав, оскільки його лампочка (50 Вт) має більший опір і при послідовному з'єднанні на ній виділятиметься більша потужність.

Задача 4. По двох паралельних металевих рейках, які лежать на площині на відстані $L = 1 \text{ м}$ одна від одної, може рухатися без тертя металевий однорідний стрижень. Довжина стрижня дорівнює відстані між рейками, а його маса $m = 10 \text{ кг}$. Кінці стрижня щільно прилягають до рейок, забезпечуючи добрий електричний контакт. Рейки з'єднані одна з одною через конденсатор ємністю $C = 100 \text{ мкФ}$. Вся система знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор індукції якого спрямований вертикально, а модуль його $B = 10 \text{ Тл}$. Визначити заряд,

який виникає на конденсаторі через $\tau = 1$ с після початку дії на стрижень зовнішньої сили, прикладеної до середини стрижня, спрямованої паралельно до рейок і за модулем рівної $F = 0,04$ Н. Початкова швидкість стрижня дорівнює нулю. Опором рейок і підвідних проводів можна знехтувати.

Розв'язок.

Під час руху стрижня в магнітному полі на його кінцях виникає напруга $U = BLv$ (v – швидкість стрижня в даний момент часу).

В результаті по стрижню і рейках проходить індукційний струм силою I , який заряджає конденсатор. Приріст заряду на конденсаторі за час Δt , з одного боку, дорівнює $\Delta q = I\Delta t$, а з другого боку, $\Delta q = C\Delta U = CBL\Delta v$. Звідси одержуємо формулу, яка пов'язує силу струму I з прискоренням a руху стрижня:

$$I = CBL \frac{\Delta v}{\Delta t} = CBLa$$

Прискорення знайдемо за допомогою другого закону Ньютона. Крім зовнішньої сили F , на стрижень діє ще сила F_M з боку магнітного поля. Вона спрямована протилежно силі F і за модулем дорівнює $F_M = BIL = CB^2L^2a$.

Таким чином, $ma = F - CB^2L^2a$, звідси:

$$a = \frac{F}{m + CB^2L^2}$$

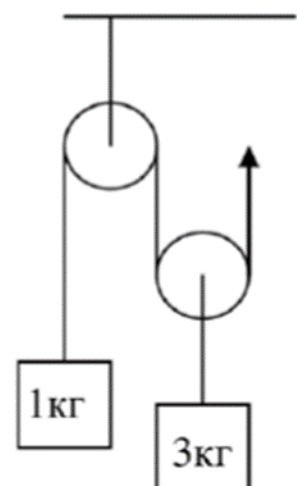
За час τ на конденсаторі накопичиться заряд:

$$q = I\tau = \frac{CBLF\tau}{m + CB^2L^2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$$

11 КЛАС

2023-2024 навчальний рік

Задача 1. З яким по модулю і в який бік напрямленим прискоренням треба рухати вздовж вертикалі кінець нитки, щоб вантаж, що має масу $m = 1$ кг, залишався нерухомим (див. рис.)? Масами ниток та блоків можна знехтувати. Нитки нерозтяжні, тертя відсутнє. Прискорення вільного падіння вважати рівним $g = 10$ м/с².



Розв'язок.

З умови рівноваги вантажу масою $m = 1$ кг, випливає, що $T = mg$. Тоді рівняння другого закону Ньютона, записане в проекції на вертикальну вісь ОУ, спрямовану вгору, для другого тіла масою $3m$, має вигляд: оу:

$$2T - 3mg = 3ma_y, \text{ звідки } a_y = \frac{2T}{3m} - g = -\frac{1}{3}g$$

Знак мінус означає, що вантаж $3m$ буде мати прискорення, спрямоване вниз. З умови нерозтяжності нитки випливає, що кінець нитки необхідно опускати з прискоренням, удвічі більшим за модулем та спрямованим донизу, тобто: $a_1 = \frac{2}{3}g = 6,7 \frac{m}{c^2}$.

Задача 2. Вертикальна циліндрична теплоізолююча гладка посудина розділена на дві частини масивним горизонтальним поршнем.

У нижній частині посудини перебуває гелій під тиском $p_1 = 100$ кПа, а верхня частина вакуумована. Поршень утримується в цьому положенні. Потім його відпускають. Після встановлення рівноваги виявилось, що об'єм, зайнятий гелієм, збільшився на 40 %. Знайдіть тиск газу у цьому стані.

Розв'язок.

Нехай в посудині міститься ν молей гелію, а його початковий об'єм дорівнює V . Тоді кінцевий об'єм дорівнює $\frac{7V}{5}$, а висота підйому поршня $x = \frac{\Delta V}{S} = \frac{2V}{5S}$, де S – площа поперечного перерізу посудини.

В кінцевому стані тиск гелію зрівноважиться вагою поршня:

$$p_2 S = mg \quad \Rightarrow \frac{5\nu RT_2}{7V} S = mg$$

В процесі стиснення внутрішня енергія газу переходить в потенціальну енергію поршня в полі сили тяжіння:

$$-\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = mgx$$

Підставимо отримані вирази для mg та x , отримаємо:

$$\frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{5\nu RT_2}{7V} S \cdot \frac{2V}{5S} \quad \Rightarrow 21(T_1 - T_2) = 4T_2$$

$$T_2 = \frac{21}{25} T_1$$

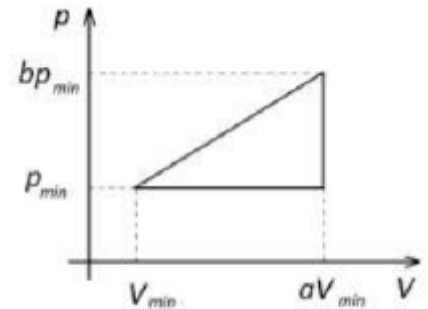
Згідно об'єднаного газового закону $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$

Отже, $P_2 = \frac{3}{5} P_1 = 60 \text{ кПа}$

Задача 3. Робочим тілом теплової машини є ідеальний одноатомний газ. 1 моль цього газу здійснює цикл, що складається з процесу нагрівання, в ході якого спостерігається лінійна залежність тиску від температури, а також ізохори та ізобари. Відомо, що максимальний об'єм газу в $a = 1,2$ рази більший від мінімального, максимальний тиск відрізняється в $b = 2$ рази від мінімального, а максимальна температура на $\Delta T = 280 \text{ К}$ більша за мінімальну. Визначити ККД циклічного процесу.

Розв'язок.

На рисунку зображено цикл в координатах p - V , що має вид трикутника. Робота газу за цикл дорівнює площі всередині трикутника:



$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (p_{\max} - p_{\min})(V_{\max} - V_{\min}) = \\ &= \frac{1}{2} (bp_{\min} - p_{\min})(aV_{\min} - V_{\min}) = \\ &= \frac{1}{2} (b - 1)(a - 1)p_{\min} V_{\min} = 0,1 p_{\min} V_{\min} \end{aligned}$$

Застосувавши рівняння Менделєєва – Клапейрона для двох станів отримаємо:

$$p_{\min} V_{\min} = \nu R T_{\min}$$

$$p_{\max} V_{\max} = \nu R T_{\max}$$

$$bp_{\min} aV_{\min} = \nu R T_{\max}$$

$$T_{\max} = baT_{\min} = 2,4T_{\min}$$

$$\text{Отримаємо: } \Delta T = T_{\max} - T_{\min} = 1,4T_{\min} \Rightarrow T_{\min} = 200 \text{ К}$$

Розрахуємо роботу газу за цикл:

$$A = 0,1 \nu R T_{\min} = 0,1 \cdot 1 \cdot 8,31 \cdot 200 = 166,2 \text{ Дж}$$

Тепло передається газу від нагрівника в процесі з прямою залежністю тиску від об'єму:

$$\begin{aligned}
Q_{\text{нагр}} &= \Delta U + A_{\text{нагр}} = \frac{3}{2} \nu R (T_{\text{max}} - T_{\text{min}}) + \frac{1}{2} (p_{\text{max}} + p_{\text{min}}) (V_{\text{max}} - V_{\text{min}}) = \\
&= \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \frac{1}{2} (b + 1)(a - 1) p_{\text{min}} V_{\text{min}} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + 0,3 p_{\text{min}} V_{\text{min}} = \\
&= \frac{3}{2} \nu R \Delta T + 0,3 \nu R T_{\text{min}} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 8,31 \cdot 280 + 0,3 \cdot 1 \cdot 8,31 \cdot 200 = 3490,2 + 498,6 \\
&= 3988,8 \text{ Дж}
\end{aligned}$$

$$\text{ККД циклу: } \eta = \frac{A}{Q_{\text{нагр}}} = \frac{166,2}{3988,8} \cdot 100\% \approx 4,2 \%$$

Задача 4. Джерело струму віддає у зовнішнє коло, при силі струму 10 А, потужність 100 Вт, а при силі струму 12 А – потужність 115,2 Вт. Знайдіть внутрішній опір та ЕРС джерела струму.

Розв’язок.

Потужність, що виділяється у зовнішньому колі: $P = I^2 R$

$$R = \frac{P}{I^2} \qquad R_1 = \frac{P_1}{I_1^2} \qquad R_2 = \frac{P_2}{I_2^2}$$

За законом Ома для повного кола: $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$

$$\text{Тоді} \quad I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}, \quad \text{та} \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}$$

$$\varepsilon = I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r)$$

$$I_1 \left(\frac{P_1}{I_1^2} + r \right) = I_2 \left(\frac{P_2}{I_2^2} + r \right)$$

$$\frac{P_1}{I_1} + I_1 r = \frac{P_2}{I_2} + I_2 r$$

$$\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2} = I_2 r - I_1 r$$

$$\frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2} = r(I_2 - I_1)$$

$$r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)}$$

$$r = \frac{100 \cdot 12 - 115,2 \cdot 10}{10 \cdot 12 \cdot 2} = 0,2 \text{ Ом}$$

$$\varepsilon = I_1(R_1 + r) = I_1 \left(\frac{P_1}{I_1^2} + r \right)$$

$$\varepsilon = 10 \left(\frac{100}{100} + 0,2 \right) = 12 \text{ В}$$

11 КЛАС

2024-2025 навчальний рік

Задача 1. На плиті, в каструлі з площею поперечного перерізу $S = 150 \text{ см}^2$, кипить 1,5 літра води. Якщо кількість теплоти, що віддає нагрівник, не змінюється з часом, то за 15 хвилин випаровується шар води завтовшки $h = 1,5 \text{ см}$. В каструлю починають опускати з постійною швидкістю маленькі кульки льоду. Яку масу M таких кульок за хвилину треба кидати для підтримки постійного рівня окропу в цій каструлі? Температуру кульок прийняти рівною $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$. Густина води $1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, питома теплоємність води $4,2 \frac{\text{кДж}}{(\text{кг}\cdot\text{K})}$, питома теплота плавлення льоду дорівнює $340 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, питома теплота пароутворення води – $2,3 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$.

Розв'язок.

Знайдемо спочатку кількість теплоти, що подається від нагрівника плити до окропу за 1 хвилину. Оскільки за цей час рівень води знижується на 0,1 см, об'єм води V , що википає за цей час дорівнює:

$$V = 0,1 \text{ см} \cdot 150 \text{ см}^2 = 15 \text{ см}^3,$$

Він має масу $m = \rho V$; $m = 1000 \cdot 15 \cdot 10^{-6} \text{ кг} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$.

Для випаровування такої маси води потрібна кількість теплоти, що дорівнює:

$$Q = rm; \quad Q = 2,3 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 34,5 \text{ кДж}.$$

При підтримці постійного рівня киплячої води в каструлі вся ця кількість теплоти витрачатиметься на плавлення крижаних кульок масою M (у хвилину), на нагрівання води, що утворилась з кульок від $0 \text{ }^\circ\text{C}$ до $100 \text{ }^\circ\text{C}$ і на її випаровування:

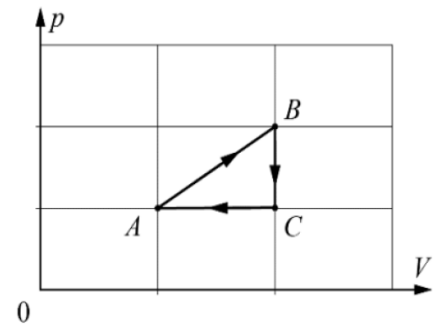
$$Q = M[\lambda + c(100 - 0) + r]$$

$$M = \frac{Q}{\lambda + c(100 - 0) + r}$$

$$M = \frac{34500}{340000 + 420000 + 2300000} \approx 11,27 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{хв}} \approx 11,27 \frac{\text{г}}{\text{хв}}.$$

Задача 2. Теплова машина, в якій у якості робочого тіла використовуються два молі ідеального одноатомного газу, за один замкнутий цикл АВС (див. рис.) виконує роботу A_0 .

1. На якій(-их) ділянці(-ах) робоче тіло отримало тепло?
2. Чому дорівнює ця кількість теплоти?
3. Обчисліть ККД η даної теплової машини.



Розв'язок.

1. На ділянці BC робота не виконується, а температура знижується, отже робоче тіло віддає тепло. На ділянці CA робоче тіло стискується в ізобарному процесі. Це можливо при віддачі тепла. Отож, лише на ділянці AB робоче тіло отримало тепло.
2. Нехай тиск p_0 відповідає одній клітинці вертикальної осі графіка, а клітинка на осі об'ємів дорівнює V_0 . За цикл газ здійснить роботу:

$$A_0 = \frac{p_0 V_0}{2}$$

Звідси $p_0 V_0 = 2A_0$

За першим законом термодинаміки на ділянці AB газ отримає кількість теплоти: $Q_{AB} = \Delta U + A_{AB}$

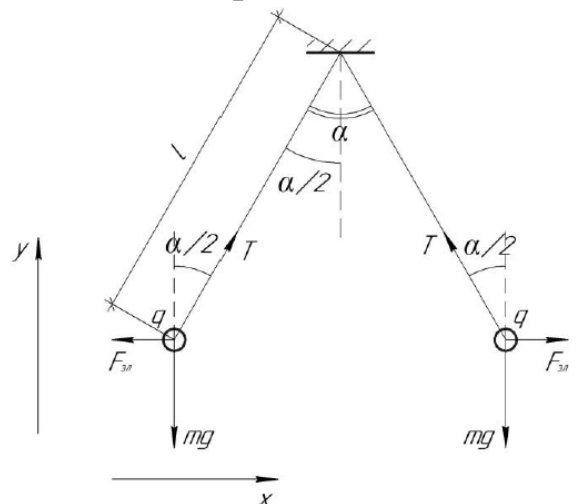
$$Q_{AB} = \frac{3}{2} (4p_0 V_0 - p_0 V_0) + 1,5 p_0 V_0 = 6 p_0 V_0 = 12 A_0$$

3. За визначенням $\eta = \frac{A_0}{Q_{AB}}$

$$4. \quad \eta = \frac{A_0}{12A_0} \approx 0,08$$

Задача 3. Дві кульки масою по 1 г підвішені на нитках завдовжки 0,5 м в одній точці. Після надання їм негативного заряду кут між нитками став 60° . Чому дорівнює сила їхньої електричної взаємодії?

Розв'язок. Після надання кожній із кульок негативного заряду вони розійдуться на кут α (як показано на рис.), при цьому в якийсь момент часу кульки прийдуть у стан рівноваги. У цьому стані на кожну кульку діють три сили: сила тяжіння mg , кулонівська сила відштовхування $F_{ел}$, яку



необхідно знайти, і сила натягу нитки T . Запишемо перший закон Ньютона в проекції на обидві осі координат.

$$T \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = F_{\text{ел}}$$

$$T \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = mg$$

Поділивши одну рівність на іншу отримаємо: $\cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{F_{\text{ел}}}{mg}$

$$F_{\text{ел}} = mg \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$F_{\text{ел}} = 0,001 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = 0,58 \cdot 10^{-2} \text{ Н} = 5,8 \text{ мН}$$

Задача 4. Соломійка любить з'їжджати зі сніжної гірки на санчатах, але зовсім не любить підніматися на цю гірку пішки. Тому турботливий тато, після кожного спуску, тягне санчата з донечкою на гору за допомогою мотузки, прикладаючи до неї силу $F = 130 \text{ Н}$. Визначте коефіцієнт тертя полозів санчат об сніг і прискорення, з яким Соломійка з'їжджає з гірки. Маса дівчинки разом із санчатами дорівнює 20 кг . Схил гірки утворює з горизонтом кут 30°С . Під час підйому санки рухаються рівномірно, а мотузка паралельна поверхні гірки. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Опором повітря знехтуйте.

Розв'язок.

Нехай m – маса дівчинки з санчатами, μ – коефіцієнт тертя полозів санчат об сніг. Розглянемо випадок, коли санчата тягнуть нагору

$$F = mg \cdot \sin 30^\circ + \mu mg \cdot \cos 30^\circ \longrightarrow \mu = \frac{F - mg \cdot \sin 30^\circ}{mg \cdot \cos 30^\circ}$$

$$\mu = \frac{130 \text{ Н} - 200 \text{ Н} \cdot 0,5}{200 \text{ Н} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{10} \approx 0,17$$

Випадок, коли санчата рухаються вниз: $F = mg \cdot \sin 30^\circ - \mu mg \cdot \cos 30^\circ$

$$a = g \cdot (\sin 30^\circ - \mu \cdot \cos 30^\circ)$$

$$a = g \cdot (0,5 - \frac{\sqrt{3}}{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0,35 \cdot g = 3,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$