

Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ТЭК 2/3

04.10.2022

Практическое занятие.

Действия над числами в алгебраической форме.

Цели:

1. **Образовательная:** формировать навыки действий над числами в алгебраической форме.
2. **Воспитательная:** воспитать логическое мышление, внимание.
3. **Развивающая:** развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал практического занятия на тему: «Действие над числами в алгебраической форме» формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
 - ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
 - ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
 - ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
 - ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
 - ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
 - ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
 - ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
 - ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.
-

Над комплексными числами можно проводить различные операции, а именно:

- Складывать и вычитать
- Умножать и делить
- Извлекать корни и возводить в степень

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел

$$z_1 = 2+7i; z_2 = 3+5i.$$

Решение: Сумму находим формальным сложением двучленов $2-7i, 3+5i$;
 $z_1+z_2 = (2-7i) + (3+5i) = 2-7i+3+5i = 5-2i.$

произведение находим перемножив двучлены $2-7i$ и $3+5i$ с последующей заменой i^2 на -1 .

$$z_1 \cdot z_2 = (2-7i) \cdot (3+5i) = 6-21i+10i-35i^2 = 6-11i+35 = 41-11i.$$

Ответ: $z_1+z_2 = 5-2i; z_1 \cdot z_2 = 41-11i.$

Легко увидеть, что слагаемое двух сопряжённых чисел является действительным числом:

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 - bai + abi - (bi)^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2.$$

Следовательно,

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Воспользуемся этим свойством для введения действия деления двух комплексных чисел.

При делении комплексных чисел $\frac{z_2}{z_1}$, где $z_1 = a_1+ib_1, z_2 = a_2+ib_2$

достаточно умножить числитель и знаменатель дроби $\frac{a_2+ib_2}{a_1+ib_1}$ на число сопряжённое к знаменателю, то есть на a_1-ib_1 .

Пример 2. Даны комплексные числа $z_1 = 3-4i$ и $z_2 = 10+5i$. Найдите разность z_2-z_1 и частное $z_2:z_1$.

Решение:

Находим разность вычитанием двучленов $3-4i$ и $10+5i$.

$$z_2 - z_1 = (10+5i) - (3-4i) = 10+5i-3+4i = 7+9i.$$

Чтобы найти частное $z_2 : z_1$ умножим числитель и знаменатель на число, сопряжённое к знаменателю:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{10+5i}{3-4i} = \frac{(10+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{30+15i+40i+20i^2}{3^2+4^2} = \frac{10+55i}{25} = 0,4 + 2,2i.$$

Ответ: $z_2 - z_1 = 7+9i$; $z_2 : z_1 = 0,4 + 2,2i$.

Действия над комплексными числами имеют следующие интересные свойства:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \quad \overline{(z_1 / z_2)} = \overline{z_1} / \overline{z_2} \quad (\overline{z_2} \neq 0).$$

Доказательство выходит из определения сопряжённых чисел. Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются и другие приведённые свойства.

Возведение комплексного числа в степень выполняется по формулам возведения двучлена в степень. При этом следует учитывать, что

$$\begin{aligned} i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \\ i^n = i^{4m+k} = (i^4)^m \cdot i^k = i^k, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Например:

$$i^{24} = i^{4 \cdot 6} = 1, \quad i^{59} = i^{4 \cdot 14 + 3} = i^3 = -i; \quad i^{42} = i^{4 \cdot 10 + 2} = i^2 = -1.$$

Пример 3. Найти комплексное число $z = \frac{12+5i}{(2+3i)^2}$.

Решение:

Выполнив в знаменателе возведение в степень, получим:

$$z = \frac{12+5i}{4+12i+9i^2} = \frac{12+5i}{4+12i-9} = \frac{12+5i}{-5+12i}.$$

Умножив числитель и знаменатель на число, сопряжённое к знаменателю, то есть на $-5-12i$, получим:

$$z = \frac{(12+5i)(-5-12i)}{(-5+12i)(-5-12i)} = \frac{-60-25i-144i-60i^2}{5^2+12^2} = \frac{-60-169i+60}{25+144} = \frac{-169i}{169} = -i$$

Ответ: $z = i$.

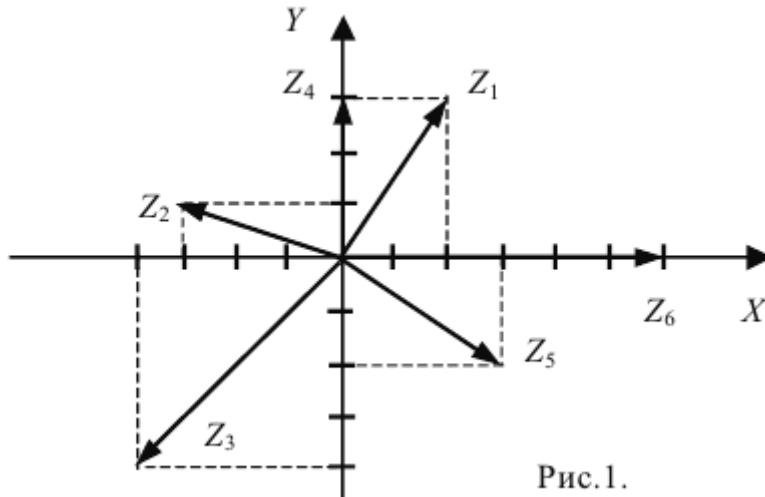
Каждому комплексному числу $z = a+ib$ можно поставить в соответствие упорядоченную пару действительных чисел $(a; b)$ и наоборот. Такая упорядоченная пара действительных чисел определяет точку или вектор на плоскости.

Следовательно, комплексное число вида $z = a+ib$ изображается на координатной плоскости точкой $M(a, b)$ или вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец с т. М.

Сама координата плоскости называется при этом комплексной плоскости, ось абсцисс — действительной осью, ось ординат — мнимой осью.

Например, изобразим числа

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = -3 + i, z_3 = -4 - 4i, z_4 = 3i, z_5 = 3 - 2i, z_6 = 6 \text{ (рис. 1).}$$

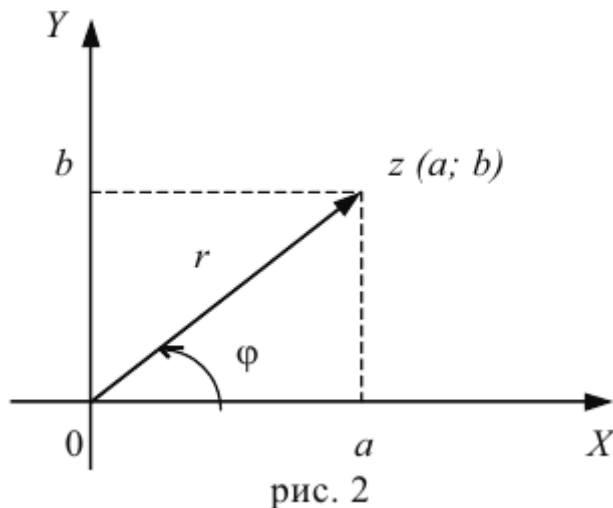


Представление комплексного числа как вектора на плоскости позволяет ввести понятие модуля и аргумента комплексного числа.

Модулем комплексного числа называют длину вектора, которая соответствует данному числу (обозначают r либо ρ).

Аргументом комплексного числа ($z \neq 0$) называют величину угла φ между положительным направлением действительной оси и вектора, который соответствует данному комплексному числу.

Рассмотрим рисунок:



На основе теоремы Пифагора получаем $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Например, комплексное число $z = 8 - 6i$ имеет модуль равный 10, так как

$$r = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$, в отличие от модуля, вычисляется неоднозначно. Так аргументом числа 5 являются следующие углы $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 2\pi$; $\varphi_3 = -2\pi$, ... $\varphi_k = 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Среди бесконечного множества значений аргумента только одно принадлежит промежутку $(-\pi; \pi)$ или $(0; 2\pi)$. Эти значения аргумента мы и будем вычислять.

Аргумент легко вычислить, если комплексное число расположено в I четверти. Действительно, согласно тригонометрическим соотношениям в прямоугольном треугольнике (рис. 2) имеем:

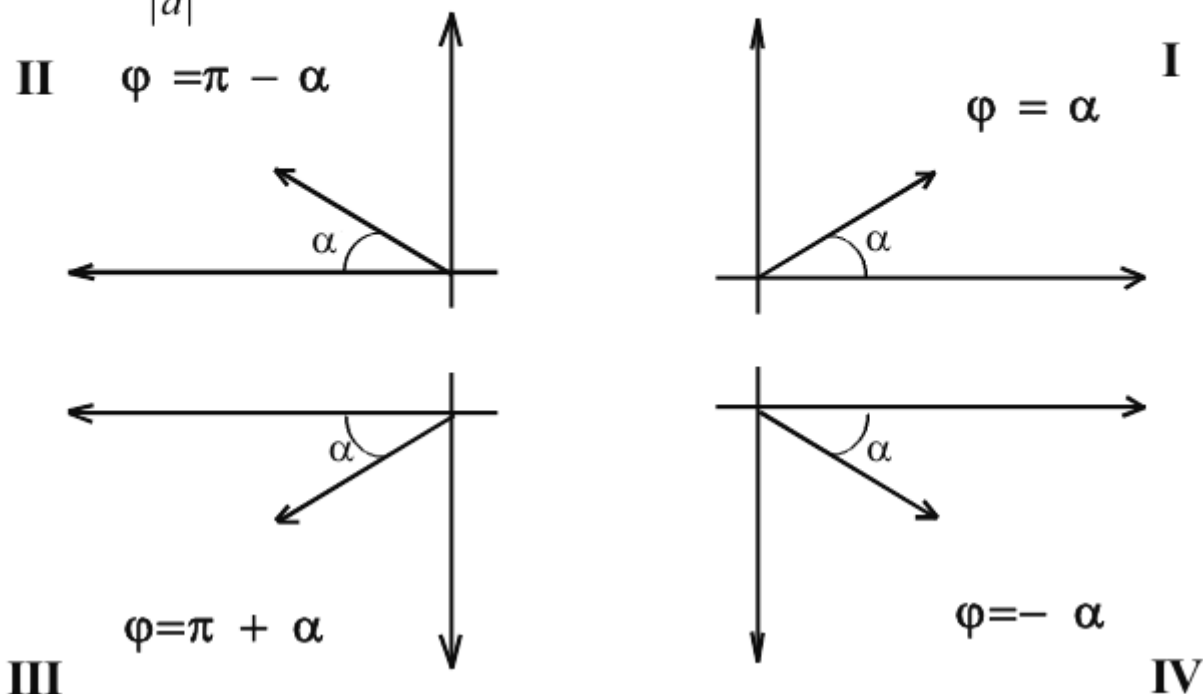
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Если комплексные числа размещены в других четвертях, то необходимо провести дополнительные рассуждения. Рассмотрим рис. 3. Видим, что для

$$\text{II четверти} \quad \varphi = \pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{b}{a} \right|; \quad \text{для III четверти} \quad \varphi = \pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{b}{a} \right|;$$

для IV четверти $\varphi = -\arctg\left|\frac{b}{a}\right|$, либо $\varphi = 2\pi - \arctg\left|\frac{b}{a}\right|$,

если за $\arctg\left|\frac{b}{a}\right|$ принимать значение острого угла α .



Таким образом, алгоритм нахождения аргумента комплексного числа следующий:

1. Определить коэффициент a, b заданного комплексного числа.

$$\alpha = \arctg\left|\frac{b}{a}\right|.$$

2. Найти

3. Установить, в какой четверти расположено комплексное число.

4. Вычислить аргумент φ согласно приведённым формулам.

Возможны и другие способы нахождения аргумента комплексного числа, например:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & \text{если точка } (a; b) \text{ принадлежит I либо IV четверти;} \\ \pi - \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & \text{если точка } (a; b) \text{ принадлежит II либо III четверти;} \end{cases}$$

либо аргумент j определяют по системе

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r}; \\ \sin \varphi = \frac{b}{r}. \end{cases}$$

Пример 4. Найти аргумент комплексного числа $z = 1 - i\sqrt{3}$.

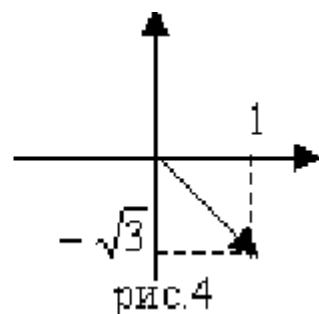
Решение:

1. Вычислить коэффициенты

$$a=1, b=-\sqrt{3}.$$

2. Найти острый угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{-\sqrt{3}}{1} \right| = 60^\circ.$$



3. Выяснить, в какой четверти находится данное число (рис. 4).

4. Аргумент, который соответствует данному комплексному числу принадлежит IV четверти, то есть $\varphi = -\alpha = -60^\circ$.

Ответ: $\varphi = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}.$

Домашнее задание

Найти сумму, разность и произведение чисел.

$$z_1 = 2 + 7i; z_2 = 3 + 5i.$$

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru