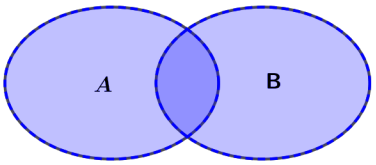
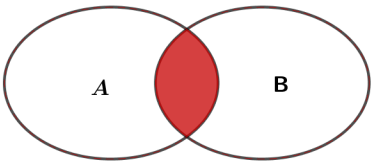
Chapitre 02
Ensembles et nombres

I. Ensembles de nombres

En mathématiques, on s'intéresse à des ensembles dont les éléments sont de même nature (nombres, fonctions, figures géométriques, …).
Si on s'intéresse à un ensemble E et si x **est un élément de cet ensemble**, on note $x \in E$ **(« x appartient à E »)**.
Si l'ensemble **E est inclus dans un ensemble F**, on note $E \subset F$ **(« E est inclus dans F »)**.
Si l'ensemble **R est la réunion des ensembles A et B**, on note $R = A \cup B$ **(« A union B »)**. Dans ce cas, les éléments de l'ensemble R appartiennent à l'ensemble A **ou** à l'ensemble B.
Si l'ensemble **I est l'intersection des ensembles A et B**, on note $I = A \cap B$ **(« A inter B »)**. Dans ce cas, les éléments de l'ensemble I appartiennent à l'ensemble A **et** à l'ensemble B.



A ∪ B



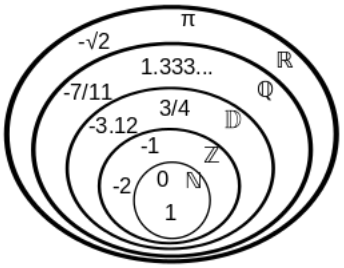
A ∩ B

Remarques

- Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$
- Si les ensembles A et B n'ont aucun élément en commun, on note $A \cap B = \emptyset$ **(ensemble vide)**

On distingue ainsi plusieurs ensembles de nombres en classe de secondes.

- **L'ensemble des entiers naturels**, noté N : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4…
- **L'ensemble des entiers relatifs**, noté Z **:** … − 3 ; − 2 ; − 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3…
- **L'ensemble des nombres décimaux**, noté D. Ils peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où le nombre a est un entier relatif et n désigne un entier naturel : $3,27 = \frac{327}{10^2}$; $-0,053 = \frac{-53}{10^3}$ …
- **L'ensemble des nombres rationnels**, noté Q. Ils peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où les nombres a et b désignent des entiers relatifs ($b \neq 0$) : $-\frac{1}{3}$; $\frac{22}{7}$ …
- **L'ensemble des nombres réels**, noté R. Cet ensemble décrit tous les nombres que l'on peut associer à l'abscisse d'un point sur une droite graduée.



Remarques

- Chaque ensemble est inclus dans le suivant $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$
- Un nombre peut avoir plusieurs écritures : une écriture décimale de 3 est $3,0 = \frac{3}{10^0}$
  Une écriture fractionnaire de 3 est $\frac{3}{1}$
- Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels. Par exemple, $\sqrt{2}$ et π ne sont pas rationnels. On dit qu'ils sont **irrationnels**. On ne peut pas les écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers même si l'on peut en trouver une aussi proche que l'on veut de ces nombres.

- On peut déterminer si un nombre est décimal, rationnel ou irrationnel en observant sa partie décimale.
  Un nombre est **décimal** si sa **partie décimale** est **finie**, c'est-à-dire si elle ne comporte que des zéros à partir d'un certain rang
  Un nombre est **rationnel** si sa **partie décimale** est **cyclique** à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si elle répète une **même séquence de chiffres à l'infini** à partir d'un certain rang.
  $\frac{1}{3} = 0,3333…$ Le chiffre 3 se répète à l'infini et on note parfois $\frac{1}{3} = 0,\underline{3}$
  $\frac{1}{7} = 0,142\,857\,142\,857\,142\,857… = 0,\underline{142\,857}$ La séquence de chiffres 142 857 se répète à l'infini.
  Un nombre est **irrationnel** si sa **partie décimale** est **infinie** et ne se répète pas d'une manière cyclique.

Une curiosité et quelques démonstrations

$1 = 0,999999\ldots = 0,\underline{9}$

En effet, si l'on pose la division, on s'aperçoit que $1/9 = 0,111111\ldots = 0,\underline{1}$

Or $0,111111\ldots\times 9 = 0,\underline{1}\times 9 = 0,\underline{9}$ et $\frac{1}{9}\times 9 = 1$

On en déduit que $1 = 0,\underline{9} = 0,999999\ldots$

1/3 n'est pas un nombre décimal

On raisonne par l'absurde en supposant que 1/3 est un nombre décimal. On en déduit qu'il existe un entier relatif a et un entier naturel n tels que

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$$

Cette égalité revient à dire que, par égalité des produits en croix,

$$3a = 10^n$$

$3a$ est un multiple de 3 mais 10^n ne l'est pas car la somme de ses chiffres égale 1, ce qui n'est pas un multiple de 3. On aboutit à une contradiction. L'hypothèse de départ est donc fausse donc 1/3 n'est pas un nombre décimal.

$\sqrt{2}$ est irrationnel

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers naturels a et b ($b\neq 0$) tels que $\frac{a}{b}$ soit irréductible et égale à $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$
$$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$
$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Donc $a^2 = 2b^2$

On en déduit que a^2 est pair donc a **est pair**. Si a est pair, il peut s'écrire sous la forme $a = 2d$ où d est un entier.

$$a^2 = (2d)^2 = 4d^2$$

Donc $4d^2 = 2b^2$

Et donc $2d^2 = b^2$

On en déduit que b^2 est pair donc b **est pair**.

Si a et b sont pairs, on peut simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ par 2, ce qui contredit le fait que $\frac{a}{b}$ est irréductible et donc l'hypothèse de départ. **Il n'existe donc aucune fraction entière égale à $\sqrt{2}$.**

Encadrement

Soient a, b et x des nombres réels, soit n un entier, l'inégalité

$$a\leq x < b$$

est un **encadrement à 10^{-n} près** si **l'amplitude** de l'encadrement $b - a$ **égale** 10^{-n}, si $a\times 10^n\in Z$ et si $b\times 10^n\in Z$ (autrement dit, si $n > 0$, seuls les n premiers chiffres de la partie décimale de a et b sont non nuls).

Par exemple, $3,14 < \pi < 3,15$ est un encadrement de π au centième près ($0,01 = 10^{-2}$) car

$$3,15 - 3,14 = 0,01$$
$$3,14\times 10^2 = 3,14\times 100 = 314 \in Z$$
$$3,15\times 10^2 = 3,15\times 100 = 315 \in Z$$

Rappel

$$\forall n \in N^*,\ 10^{-n} = 0,0\ldots\underbrace{0}_{n \text{ zéros}}1$$

Remarque

La définition de l'encadrement reste vraie pour un entier n négatif.

II. Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs Z

1. Multiples et diviseurs

Définition 1

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$. On dit aussi que b est un **diviseur** de a.

Exemples et contre-exemple

- 15 est un multiple de 3 car $15 = k \times 3$ avec $k = 5$
- 10 est un diviseur de 40 car $40 = k \times 10$ avec $k = 4$
- Par contre, 13 n'est pas un multiple de 3 car il n'existe pas d'entier k tel que $13 = k \times 3$

Remarques et notations

- $\{2k,\ k \in Z\} = 2Z$ est l'ensemble des nombres pairs. Si n est un nombre pair, alors il existe $k \in Z$ tel que
$$n = 2k$$
- Dire que le **nombre entier** a est un multiple de 3 revient à dire que $a \in 3Z$ ou encore que
$$\exists\ k \in Z,\ a = 3k$$
Le symbole « » signifie « il existe »

  On note aussi $3|a$ (« 3 divise a »)
- Dire que le **nombre entier** b est un diviseur de 63 revient à dire que $63 \in bZ$ ou encore que
$$\exists\ k \in Z,\ ka = 63$$
  On note aussi $b|63$
- **0 est un multiple de tous les nombres** mais n'en divise aucun.
- **1 divise tous les nombres** mais n'est multiple que de 1 et de -1.
- Si a est multiple de b, alors a est aussi multiple de $-b$. En particulier, $bZ = -bZ$
- 3 ne divise pas 13. On écrit « $3 \nmid 13$ »

Propriété 1

Soit $a \in Z$. La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Démonstration

🖥️ **Vidéo** https://youtu.be/4an6JTwrJV4

Soit $a \in Z$. Soient b et c deux multiples de a.

b est un multiple de a donc il existe un entier $k \in Z$ tel que $b = ka$

c est un multiple de a donc il existe un entier $m \in Z$ tel que $c = ma$

$$b + c = ka + ma = (k + m)a$$
$$k \in Z \text{ et } m \in Z \Longrightarrow k + m \in Z \Longrightarrow a | b + c$$

Méthode

Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs

🖥️ **Vidéo** https://youtu.be/7nU2M-zhAjk

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Solution

Soient trois entiers consécutifs. Soit $n \in Z$ le deuxième entier. Leur somme égale
$$S = n - 1 + n + n + 1 = 3n$$
donc S est un multiple 3.

2. Nombres pairs, impairs

Définition 2

Un nombre entier relatif est **pair** si et seulement s'il est multiple de 2.

Un nombre entier relatif **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples
34 ; $-$ 68 ; 9 756 786 et 0 sont des nombres pairs
567 ; $-$ 871 et 1 sont des nombres impairs.

Propriété 2
Un nombre **pair** s'écrit sous la forme $2k$ où $k \in Z$
Un nombre **impair** s'écrit sous la forme $2k + 1$ où $k \in Z$

Propriété 3
Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration au programme
🖥️ **Vidéo** https://youtu.be/eKo1MpX9ktw
Soit a est un nombre impair. Il existe un entier $k \in Z$ tel que $a = 2k + 1$
$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ en posant $k' = 2k^2 + 2k$
k' est entier en tant que somme de deux entiers, donc a^2 est impair.

Méthode
Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs
🖥️ **Vidéo** https://youtu.be/xCLLqx11Le0
Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.
Solution
Soient deux entiers consécutifs n et $n + 1$
- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$ où k est un entier.

Le produit de deux entiers consécutifs s'écrit donc
$n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 2k_1$ où $k_1 = k(2k + 1)$ est un entier
On en déduit que $n(n + 1)$ est pair.
- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ où k est un entier.

Le produit des deux entiers consécutifs s'écrit donc
$n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 2) = 2(2k + 1)(k + 1) = 2k_2$ où $k_2 = (2k + 1)(k + 1)$ est un entier
On en déduit que $n(n + 1)$ est pair.
Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

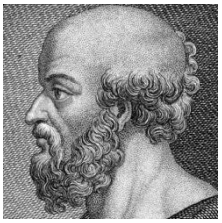
3. Nombres premiers

Définition 3
Un nombre entier naturel p est **premier** s'il possède **exactement deux diviseurs positifs** qui sont 1 et lui-même.

Exemples
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … Cette liste est infinie.

Remarques
- Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

La recherche de nombres premiers et déterminer si un nombre est premier (on parle de test de primalité) est un problème qui occupe les mathématiciens depuis l'antiquité. Le **crible d'Ératosthène** ($-$ 276; $-$ 194) permet par exemple de trouver facilement les nombres premiers entre 1 et 100. Pour cela, on supprime les multiples de 2, de 3, de 5 et de 7 jusqu'à 100. On remarquera que ce



1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50

n'est pas la peine d'aller plus loin car 7 est le plus grand nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{100} = 10$.
D'une manière générale, pour trouver les **diviseurs** d'un nombre entier n, il suffit de chercher ceux qui sont **inférieurs ou égaux à** $\sqrt{n}$. Les autres diviseurs s'obtiennent alors en divisant n par les diviseurs inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Définition 4
Deux nombres entiers relatifs sont **premiers entre eux** si et seulement si leur seul diviseur positif commun est 1.

Propriété 4
Tout nombre entier naturel peut se décomposer en **produits de facteurs premiers**. Cette décomposition est **unique** à l'ordre des facteurs près.

Exemple
$300 = 2\times2\times3\times5\times5 = 2^2\times3\times5^2$

Définition 5
Une fraction entière est **irréductible** si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Méthode
Rendre une fraction irréductible
🖥️ **Vidéo** https://youtu.be/qZaTliAWkA0
Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$

Solution
Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.
$\frac{60}{126} = \frac{2^2\times3\times5}{2\times3^2\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$
10 et 21 sont premiers entre eux et donc $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$

Remarques

- La calculatrice permet d'obtenir directement cette décomposition. Pour la calculatrice Numworks, on utilise la fonction « **factor(n)** » disponible dans l'onglet arithmétique de la boîte à outils T
- On pourrait aussi calculer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de 60 et 126 soit à l'aide de la fonction « **gcd(p,q)** » du même menu soit à l'aide de l'algorithme d'**Euclide**. L'algorithme d'Euclide consiste à effectuer des divisions euclidiennes (entières) successives entre le diviseur et le reste de la division précédente. On commence par effectuer la division des deux nombres dont on cherche le PGCD. Pour trouver le reste, on utilise la fonction « **rem(p,q)** » de la calculatrice NumWorks. On note alors les divisions dans le tableau suivant

a	b	**Reste de** a/b
126	60	6
60	6	0

Le processus s'arrête lorsque le reste est nul. Le dernier diviseur est le PGCD des deux nombres.
Dans l'exemple, $PGCD(126\,;60) = 126\wedge60 = 6$
Ainsi,
$\frac{60}{126} = \frac{6\times10}{6\times21} = \frac{10}{21}$

III. Intervalles

Dans une étude statistique, on considère les personnes dont l'âge varie entre 15 ans et 18 ans. Comment représenter mathématiquement cette tranche d'âge ?
La notation utilisée s'appelle un **intervalle**. Mathématiquement, on écrira **[15 ;18]**

Remarque
La phrase en français comporte une imprécision : on ne sait pas si l'on considère aussi dans cet intervalle les personnes qui ont exactement 15 ans ou 18 ans. La notation utilisée pour les intervalles lève ce doute.

L'intervalle **[15 ; 18]** contient toutes les valeurs comprises entre 15 et 18, 15 et 18 compris.
L'intervalle **[15 ; 18[** contient toutes les valeurs comprises entre 15 et 18, 15 compris mais pas 18.
L'intervalle **]15 ; 18]** contient toutes les valeurs comprises entre 15 et 18, 18 compris mais pas 15.
L'intervalle **]15 ; 18[** contient toutes les valeurs comprises entre 15 et 18, mais ni 15 ni 18.

Autrement dit, l'intervalle **[15 ; 18]** est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $15 \leq x \leq 18$
L'intervalle **]15 ; 18[** est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $15 < x < 18$

On peut maintenant se poser la question de l'intervalle qui traduit le fait que l'on considère toutes les personnes dont l'âge est **strictement supérieur à 18 ans**.
On introduit alors une borne infinie, notée $+\infty$ si l'on considère un nombre **arbitrairement grand** et notée $-\infty$ si l'on considère un nombre **arbitrairement petit**.
L'intervalle considéré se note alors $]18\,;\ +\infty[$

Remarque
Le symbole infini ∞ s'écrit toujours avec un crochet tourné vers l'extérieur.
De la même façon, l'intervalle **]$-\infty$; 18]** est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $x \leq 18$

En résumé
Soit x un nombre réel
$x \in [15; 18] \Leftrightarrow 15 \leq x \leq 18$
$x \in [15; 18[\Leftrightarrow 15 \leq x < 18$
$x \in]15; 18] \Leftrightarrow 15 < x \leq 18$
$x \in]15; 18[\Leftrightarrow 15 < x < 18$
$x \in]18; +\infty[\Leftrightarrow x > 18$
$x \in]-\infty; 18] \Leftrightarrow x \leq 18$

Intervalle ouvert et intervalle fermé

Définition 6
Un intervalle fini est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle. Il est **ouvert** dans le cas contraire.

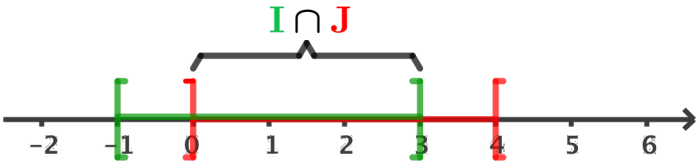
Exemples
L'intervalle $[-2\,;\ 5]$ est un intervalle **fermé**.
$-2 \in [-2\,;\ 5]$ et $5 \in [-2\,;\ 5]$
L'intervalle $]2\,;\ 6[$ est un intervalle **ouvert**.
$2 \notin]2\,;\ 6[$ et $6 \notin]2\,;\ 6[$
L'intervalle $]18\,;+\infty[$ est également un intervalle **ouvert**. On verra dans le supérieur que l'intervalle $[18\,;+\infty[$ est également fermé et on dira que les intervalles $[-2\,;\ 5[$ et $]-2\,;\ 5]$ sont **semi-ouverts** (à droite et à gauche respectivement)

Intersections et unions d'intervalles

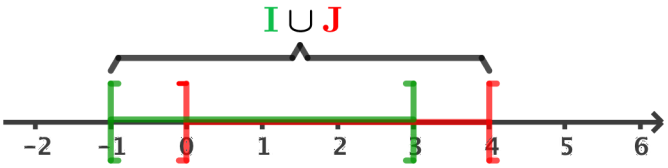
Méthode
Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/8WJG_QHQs1Y**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/hzINDVy0dgg**
Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :
1. $I = [-1\,;\ 3]$ et $J =]0\,;\ 4[$
2. $I =]-\infty\,;\ -1]$ et $J = [1\,;\ 4]$

Solution
1. Pour visualiser les ensembles solutions, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.

Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent à la fois aux deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué où les deux ensembles se superposent. Ainsi
$I \cap J =]0\,;\,3]$

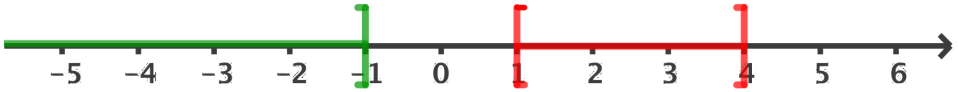


Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée qui correspond soit à l'intervalle I soit à l'intervalle J. Ainsi $I \cup J = [-1\,;\,4[$



2. $I \cap J = \emptyset$ ($\emptyset$ **désigne l'ensemble vide)**. Les ensembles I et J n'ont pas de valeurs en commun.

$$I \cup J =]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,4]$$



IV. Valeur absolue d'un nombre

Exemples

- La valeur absolue de -5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Définition 7

La **valeur absolue** d'un nombre réel A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre $-A$ si A est négatif. La valeur absolue de A se note $|A|$. Autrement dit,

$$|A| = \{A \text{ si } A \geq 0 \quad -A \text{ si } A < 0$$

Exemple

Soit $x \in R$,

$|x-5| = \{x-5 \text{ si } x \geq 5 \; 5-x \text{ si } x < 5$

Propriété 5

Soient x et y des réels

$|x| \geq 0 \; |-x| = |x| \; \sqrt{x^2} = |x| \; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y) \vee (x = -y$

Exemples

$|-3| = 3$ et $|3| = 3$ donc $|-3| = |3|$

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $|-5| = 5$ donc $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

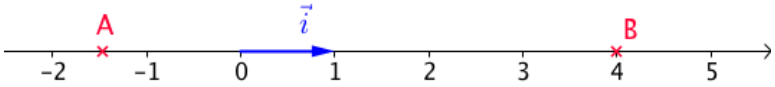
Distance et valeur absolue

Définition 8

Soient a et b deux nombres réels. Sur une droite graduée munie d'un repère $(O, \vec{i})$, la **distance** entre les points A et B d'abscisses respectives les nombres a et b est le nombre $|a-b|$
Ce nombre s'appelle aussi la **distance entre les réels a et b** et se note $d(a; b)$

Exemple

Calculer la distance entre les nombres $-1,5$ et 4.
$d(-1,5; 4) = |4-(-1,5)| = 5,5$



Propriété de l'inégalité triangulaire

Soient x et y deux nombres réels.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Le cas d'égalité a lieu lorsque les nombres x et y sont positifs.

Démonstration

Dans un repère $(O, \vec{i})$, soit A et B deux points d'abscisses respectives x et $-y$
On sait que $AB \leq AO + OB$, soit
$|x - (-y)| \leq |x - 0| + |0 - (-y)|$ Soit encore $\quad |x + y| \leq |x| + |y|$

Résolution d'inéquation avec une valeur absolue

On utilise la propriété suivante. Soient x et y des réels $(y > 0)$

$$|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$$

$$|x| > y \Leftrightarrow x < -y \text{ ou } x > y$$

Remarque

Dans le premier cas, l'inégalité n'est jamais vérifiée si y est négatif.
Dans le deuxième cas, l'inégalité est toujours vérifiée si y est négatif.

Exercice 1

On veut résoudre l'inéquation $|x - 5| < 3$ dans R

Solution

Soit $x \in R$,

$$|x - 5| < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 < x - 5 < 3 \Leftrightarrow -3 + 5 < x < 3 + 5 \Leftrightarrow 2 < x < 8$$

Les solutions de l'inéquation sont données par l'intervalle $S =]2; 8[$

Interprétation graphique

Dans ce cas, le problème revient à chercher les abscisses des points à une distance strictement inférieure à 3 du point d'abscisse 5 sur une droite graduée.

Exercice 2

On veut résoudre l'inéquation $|2x + 3| \geq 1$ dans R

Solution

Soit $x \in R$,

$$|2x + 3| \geq 1$$

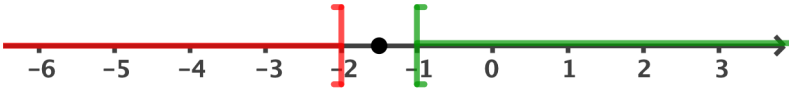
$$\Leftrightarrow 2x + 3 \leq -1 \text{ ou } 2x + 3 \geq 1 \Leftrightarrow 2x \leq -4 \text{ ou } 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1$$

Les solutions de l'inéquation sont données par la réunion d'intervalles $S =]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$

Interprétation graphique

$$|2x + 3| \geq 1 \Leftrightarrow 2|x + 1,5| \geq 1 \Leftrightarrow |x + 1,5| \geq 0,5$$

Dans ce cas, le problème revient à chercher les abscisses des points à une distance supérieure ou égale à 0,5 du point d'abscisse $-1,5$ sur une droite graduée.



Remarque

Pour les équations, le principe est le même. Il suffit d'utiliser la propriété suivante. Soit x et y des réels ($y > 0$)

$$|x| = y \Leftrightarrow x = -y \text{ ou } x = y$$

Exercice 3

On veut résoudre l'équation $|2x + 3| = 1$ dans R

Solution

Soit $x \in R$,

$$|2x + 3| = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 = -1 \text{ ou } 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow 2x = -4 \text{ ou } 2x = -2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = -1$$

Les solutions de l'équation sont données par l'ensemble $S = \{-2; -1\}$