

**PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL**  
**BÀI 10. TÌM SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH – LOGARIT (P1)**

**Tổng hợp phương pháp**

**Bước 1:** Chuyển PT về dạng  $Vế\ trái = 0$

**Bước 2:** Sử dụng chức năng MODE 7 để xét lập bảng giá trị của vế trái

**Bước 3:** Quan sát và đánh giá : +) Nếu  $F(\alpha) = 0$  thì  $\alpha$  là 1 nghiệm

+ ) Nếu  $F(a).F(b) < 0$  thì PT có 1 nghiệm thuộc  $(a;b)$

**VD1-[THPT Phạm Hồng Thái – Hà Nội 2017]**

Số nghiệm của phương trình  $6.4^x - 12.6^x + 6.9^x = 0$  là ;

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Khởi động chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của Casio rồi nhập hàm :  $w76O4^Q)p12O6^Q)p+6O9^Q)$

$$f(X) = 4 \cdot 6^X + 6 \cdot 9^X$$

- ☉ Thiết lập miền giá trị của  $X$  là : Start  $-9$  End  $10$  Step  $1$   
==p9=10=1=

Máy tính cho ta bảng giá trị :

X	F(X)
0	0
1	16.666666666666666
2	66
3	252
4	900
5	3240
6	11880
7	43200
8	155520
9	561600
10	2016000

Ta thấy khi  $x=0$  thì  $F(0)=0$  vậy  $x=0$  là nghiệm.

- ☉ Tiếp tục quan sát bảng giá trị  $F(X)$  nhưng không có giá trị nào làm cho  $F(X)=0$  hoặc khoảng nào làm cho  $F(X)$  đổi dấu. Điều này có nghĩa  $x=0$  là nghiệm duy nhất

**Kết luận :** Phương trình ban đầu có 1 nghiệm  $\Rightarrow$  Ta chọn đáp án **B**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Vì  $9^x > 0$  nên ta có thể chia cả 2 vế cho  $9^x$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{4^x}{9^x} - 12 \cdot \frac{6^x}{9^x} + 6 = 0$$

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 = 0 \quad (1)$$

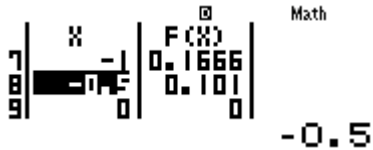
- Đặt  $\left(\frac{2}{3}\right)^x$  là  $t$  thì  $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = t^2$ . Khi đó (1)
 
$$\Leftrightarrow 6t^2 - 12t + 6 = 0 \Leftrightarrow 6(t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

- Vậy  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

❖ **Bình luận :**

- Để sử dụng phương pháp Casio mà không bị sót nghiệm ta có thể sử dụng vài thiết lập miền giá trị của  $X$  để kiểm tra. Ngoài Start  $-9$  End  $10$  Step  $1$  ta có thể thiết lập Start  $-4$  End  $5$  Start  $0.5$

==p4=5=0.5=



Ta quan sát bảng giá trị vẫn có 1 nghiệm  $x = 0$  duy nhất vậy ta có thể yên tâm hơn về lựa chọn của mình.

- Theo cách tự luận ta thấy các số hạng đều có dạng bậc 2. Ví dụ  $4^x = (2^x)^2$  hoặc  $6^x = 2^x \cdot 3^x$  vậy ta biết đây là phương trình dạng đẳng cấp bậc 2.
- Dạng phương trình đẳng cấp bậc 2 là phương trình có dạng

$ma^2 + nab + pb^2 = 0$  ta giải bằng cách chia cho  $b^2$  rồi đặt ẩn phụ là  $\frac{a}{b} = t$

**VD2-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]**

Số nghiệm của phương trình  $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \tan x$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$  là :

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

- ⊙ Chuyển phương trình về dạng :  $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} - \tan x = 0$

Sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start 0 End  $2\pi$  Step  $\frac{2\pi - 0}{19}$   
 qw4w7QK^jQ)paQKR4\$)Sp(Q))=0=2qK=2qKP19=

X	F(X)
3	0.2036
4	-0.17
5	-2.127

0.6613879271

X	F(X)
5	-2.127
6	14.354
7	4.9039

1.322775854

X	F(X)
12	0.659
13	-0.222
14	-1.648

4.299021526

X	F(X)
14	-1.584
15	-11.54
16	4.3724

4.62971549

☉ Quan sát bảng giá trị ta thấy 3 khoảng đổi dấu như trên :

$$f(0.6613).f(0.992) < 0 \Rightarrow \text{có nghiệm thuộc khoảng } (0.6613; 0.992)$$

$$f(1.3227).f(1.6634) < 0 \Rightarrow \text{có nghiệm thuộc khoảng } (1.3227; 1.6634)$$

$$f(3.6376).f(3.9683) < 0 \Rightarrow \text{có nghiệm thuộc khoảng } (3.6376; 3.9683)$$

$$f(4.6297).f(4.9604) < 0 \Rightarrow \text{có nghiệm thuộc khoảng } (4.6297; 4.9604)$$

**Kết luận :** Phương trình ban đầu có 4 nghiệm  $\Rightarrow$  Ta chọn đáp án **D**

❖ **Bình luận :**

- Đề bài yêu cầu tìm nghiệm thuộc  $[0; 2\pi]$  nên Start = 0 và End =  $2\pi$
- Máy tính Casio tính được bảng giá trị gồm 19 giá trị nên bước nhảy Step =  $\frac{2\pi - 0}{19}$

**VD3-[THPT Nhân Chính – Hà Nội 2017]** Phương trình  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{3x}{x-1}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x$  có số nghiệm âm là :

A. 2 nghiệm

B. 3 nghiệm

C. 1 nghiệm

D. Không có

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

☉ Chuyển phương trình về dạng :  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{3x}{x-1}} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 0$

Khởi động chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của Casio rồi nhập hàm :

$$w7(s3\$+s2\$)^a3Q)RQ)+1\$\$p(s3\$ps2\$)^Q)$$

$$f(X) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^X$$

- ☉ Vì đề bài yêu cầu nghiệm âm nên ta thiết lập miền giá trị của X là : Start -9 End 0 Step 0.5  
==p9=0=0.5=

Máy tính cho ta bảng giá trị :

X	F(X)
-4	-90.62
-3.5	67.992

-4.5

Ta thấy khi  $x = -4$  thì  $F(-4) = 0$  vậy  $x = -4$  là nghiệm.

- Tiếp tục quan sát bảng giá trị  $F(X)$  nhưng không có giá trị nào làm cho  $F(X) = 0$  hoặc khoảng nào làm cho  $F(X)$  đổi dấu.

Điều này có nghĩa  $x = -4$  là nghiệm âm duy nhất

**Kết luận :** Phương trình ban đầu có 1 nghiệm âm  $\Rightarrow$  Ta chọn đáp án C

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Logarit hai vế theo cơ số dương  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

$$\text{Phương trình} \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{3x}{x+1}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3} + \sqrt{2}} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{3x}{x+1}} = \log_{\sqrt{3} + \sqrt{2}} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} = x \log_{\sqrt{3} + \sqrt{2}} (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} = -x \Leftrightarrow x \left( \frac{3}{x+1} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = -3 \Leftrightarrow x = -4 \end{cases}$$

- $x = -4$  thỏa điều kiện. Vậy ta có  $x = -4$  là nghiệm âm thỏa phương trình

❖ **Bình luận :**

- Phương trình trên có 2 cơ số khác nhau và số mũ có nhân tử chung. Vậy đây là dấu hiệu của phương pháp Logarit hóa 2 vế
- Thực ra phương trình có 2 nghiệm  $x = 0; x = -4$  nhưng đề bài chỉ hỏi nghiệm âm nên ta chỉ chọn nghiệm  $x = -4$  và chọn đáp án C là đáp án chính xác
- Vì đề bài hỏi nghiệm âm nên ta thiết lập miền giá trị của  $x$  cũng thuộc miền âm  $(-9; 0)$

**VD4-[THPT Yên Thế - Bắc Giang 2017]** Số nghiệm của phương trình

$$(3 - \sqrt{5})^x + 7(3 + \sqrt{5})^x = 2^{x+3} \text{ là :}$$

- A. 2                      B. 0                      C. 3                      D. 1

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Chuyển phương trình về dạng :  $(3 - \sqrt{5})^x + 7(3 + \sqrt{5})^x - 2^{x+3} = 0$

Khởi động chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của Casio rồi nhập hàm :  $w7(3ps5)^{\wedge}Q)+7(3+s5)^{\wedge}Q)p2^{\wedge}Q)+3$

$$f(x) = (3-\sqrt{5})^x - 2^{x+3}$$

- Thiết lập miền giá trị của  $X$  là : Start  $-9$  End  $10$  Step  $1$   
 $\Rightarrow p9=10=1=$

Máy tính cho ta bảng giá trị :

X	F(X)
0	-1.354
1	21.416

- 1

Ta thấy khi  $x=0$  thì  $F(0)=0$  vậy  $x=0$  là nghiệm.

- Tiếp tục quan sát bảng giá trị  $F(X)$

X	F(X)
-1	2.4454
-2	1.2917
-3	-0.031

- 4

Ta lại thấy  $f(-3).f(-2) < 0$  vậy giữa khoảng  $(-3; -2)$  tồn tại 1 nghiệm

**Kết luận :** Phương trình ban đầu có 2 nghiệm  $\Rightarrow$  Ta chọn đáp án **A**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Vì  $2^x > 0$  nên ta có thể chia cả 2 vế cho  $2^x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x + 7\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x - 8 = 0$$

Phương trình đã cho

- Đặt  $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = t$  ( $t > 0$ ) thì  $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$  . Khi đó (1)

$$\Leftrightarrow t + 7 \cdot \frac{1}{t} - 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=7 \end{cases}$$

- Với  $t=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x=0$

Với  $t=7 \Leftrightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} 7$

$$x=0; x = \log_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} 7$$

Vậy phương trình ban đầu có 2 nghiệm

❖ **Bình luận :**

- Nhắc lại một lần nữa nếu  $f(a).f(b) < 0$  thì phương trình có nghiệm thuộc  $(a; b)$



A. 2                      B. 1                      C. 0                      D. Một số khác

**Bài 2-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017]**

Số nghiệm của phương trình  $(x-2)[\log_{0.5}(x^2-5x+6)+1]=0$  là :

A. 1                      B. 3                      C. 0                      D. 2

**Bài 3-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017]** Phương trình  $3^{x^2-2x-3} + 3^{x^2-3x+2} = 3^{2x^2-5x-1} + 1$

A. Có ba nghiệm thực phân biệt                      B. Vô nghiệm  
C. Có hai nghiệm thực phân biệt                      D. Có bốn nghiệm thực phân biệt

**Bài 4-[THPT HN Amsterdam 2017]** Tìm số nghiệm của phương trình  $2^{\frac{1}{x}} + 2^{\sqrt{x}} = 3$  :

A. 1                      B. 2                      C. Vô số                      D. Không có nghiệm

**Bài 5-[THPT Nhân Chính – Hà Nội 2017]**

Cho phương trình  $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{3}}(1-\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x-2\sqrt{x}+2)$ . Số nghiệm của phương trình là ;

A. 2 nghiệm                      B. Vô số nghiệm                      C. 1 nghiệm                      D. Vô nghiệm

**Bài 6-[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]**

Tìm số nghiệm của phương trình  $\log(x-2)^2 = 2\log x + \log_{\sqrt{10}}(x+4)$

A. 3                      B. 2                      C. 0                      D. 1

**Bài 1-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017]** Số nghiệm của phương trình

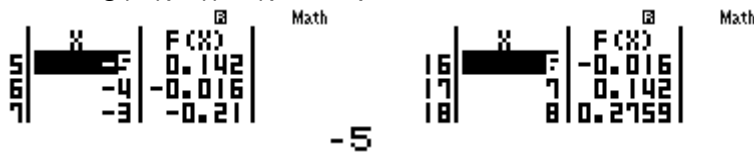
$\log(x-1)^2 = \sqrt{2}$  là

A. 2                      B. 1                      C. 0                      D. Một số khác

GIẢI

- Phương trình  $\Leftrightarrow \log(x-1)^2 - \sqrt{2} = 0$ . Sử dụng chức năng MODE 7 để tìm số nghiệm với Start  $-9$  End 10 Step 1

w7g(Q)p1))od)ps2==p9=10=1=



Ta thấy có hai khoảng đổi dấu  $\Rightarrow$  Phương trình ban đầu có 2 nghiệm

$\Rightarrow$  A là đáp án chính xác

Chú ý : Để tránh bỏ sót nghiệm ta thường thử thêm 1 hoặc 2 lần nữa với hai khoảng Start End khác nhau Ví dụ Start -29 End -10 Step 1 hoặc Sart 11 End 30 Step 1. Ta thấy không có khoảng đổi dấu nào nữa  
 ⇒ Chắc ăn hơn với 2 nghiệm tìm được

**Bài 2-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017]**

Số nghiệm của phương trình  $(x-2)[\log_{0.5}(x^2-5x+6)+1]=0$  là :

- A. 1                      B. 3                      C. 0                      D. 2

GIẢI

- Tìm điều kiện của phương trình :  $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 2 \end{cases}$   
 wR1111=p5=6==  
 Math

$x < 2, 3 < x$

$x < 2, 3 < x$

- Phương trình  $(x-2)[\log_{0.5}(x^2-5x+6)+1]=0$  . Vì điều kiện chia hai khoảng nên ta MODE 7 hai lần. Lần thứ nhất với Start -7 End 2 Step 0.5  
 w7(Q)p2)(i0.5\$Q)dp5Q)+6\$+1)==p7=2=0.5=

16	x	F(x)
17	0.5	1.3603
18	1.5	-0.7071

1

Ta thấy có 1 nghiệm  $x = 1$   
 Lần thứ hai với Start 3 End 12 Start 0.5  
 C==3=12=0.5=

2	x	F(x)
3	3.5	2.1225
4	4.5	-2.2671

4

Ta lại thấy có nghiệm  $x = 4 \Rightarrow$  Phương trình có 2 nghiệm 1 và 4 .  $\Rightarrow$  Đáp án chính xác là D

**Bài 3-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017]** Phương trình  $3^{x^2-2x-3} + 3^{x^2-3x+2} = 3^{2x^2-5x-1} + 1$

- A. Có ba nghiệm thực phân biệt                      B. Vô nghiệm  
 C. Có hai nghiệm thực phân biệt                      D. Có bốn nghiệm thực phân biệt

GIẢI

- Phương trình  $\Leftrightarrow 3^{x^2-2x-3} + 3^{x^2-3x+2} - 3^{2x^2-5x-1} - 1 = 0$  . Sử dụng MODE 7 với Start -9 End 0 Step 0.5  
 w73^A(Q)dp2Q)p3\$+3^A(Q)dp3Q)+2\$3^2Q)dp5Q)p1\$P1==p9=0=0.5=

1	6	X	F(X)
2	7	-1.5	-1.105
3	8	-0.5	51.692

Math

- 1

Ta thấy có 1 nghiệm  $x = -1$

- Tiếp tục MODE 7 với Start 0 End 9 Step 0.5  
C==0=9=0.5=

2	3	X	F(X)
3	4	0.5	1.2587
		1.5	-0.236

Math

1

4	5	X	F(X)
5	6	1.5	-0.236
		2.5	1.0924

Math

2

6	7	X	F(X)
7	8	2.5	1.0924
		3.5	-656.6

Math

3

Ta lại thấy có thêm ba nghiệm  $x = 1; 2; 3 \Rightarrow$  Tổng cộng 4 nghiệm  $\Rightarrow$  Đáp án chính xác là D

**Bài 4-[THPT HN Amsterdam 2017]** Tìm số nghiệm của phương trình  $2^{\frac{1}{x}} + 2^{\sqrt{x}} = 3$  :

A. 1                      B. 2                      C. Vô số                      D. Không có nghiệm

GIẢI

- Phương trình  $\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}} + 2^{\sqrt{x}} - 3 = 0$  (điều kiện  $x \geq 0$ ). Sử dụng MODE 7 với Start 0 End 4.5 Step 0.25  
w72^a1RQ)\$\$+2^sQ)\$\$p3==0=4.5=0.25=

1	2	X	F(X)
2	3	0.25	ERROR
		0.5	2.6325

Math

0

Trên đoạn  $[0; 4.5]$  không có nghiệm nào

- Tiếp tục MODE 7 với Start 4.5 End 9 Step 0.25  
C==4.5=9=0.25=

1	2	X	F(X)
2	3	4.75	2.5174
		5	2.6869
		5	2.8598

Math

4.5

Dự đoán phương trình vô nghiệm. Để chắc chắn hơn ta thử lần cuối với Start 9 End 28 Step 1

C==9=28=1=

X	F(X)
1	6.08
2	7.0241
3	8.0283

9

Giá trị của  $F(X)$  luôn tăng đến  $+\infty \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm  $\Rightarrow$  Đáp án chính xác là D

**Bài 5-[THPT Nhân Chính – Hà Nội 2017]**

Cho phương trình  $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{3}}(1-\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x-2\sqrt{x}+2)$ . Số nghiệm của phương trình là ;

- A. 2 nghiệm      B. Vô số nghiệm      C. 1 nghiệm      D. Vô nghiệm

GIẢI

Phương trình  $\Leftrightarrow 2\log_2 x + \log_{\frac{1}{3}}(1-\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x-2\sqrt{x}+2) = 0$  (điều kiện  $0 \leq x \leq 1$ ).

Sử dụng MODE 7 với Start 0 End 1 Step 0.1  
 $w72i2\$Q)\$+ia1R3\$\$1psQ)\$\$pa1R2\$\$is2\$\$Q)p2sQ)\$+2==0=1=0.1=$

X	F(X)
0.6	-1.001
0.7	-0.189
0.7	0.5821

0.6

Ta thấy có 1 nghiệm duy nhất thuộc khoảng  $(0.6; 0.7) \Rightarrow$  Đáp án chính xác là C

**Bài 6-[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]**

Tìm số nghiệm của phương trình  $\log(x-2)^2 = 2\log x + \log_{\sqrt{10}}(x+4)$

- A. 3      B. 2      C. 0      D. 1

GIẢI

- Phương trình  $\Leftrightarrow \log(x-2)^2 - 2\log x - \log_{\sqrt{10}}(x+4) = 0$  (điều kiện  $x \geq 0$ ). Sử dụng MODE 7 với Start 0 End 4.5 Step 0.25  
 $w7g(Q)p2)d)p2gQ))pis10\$\$Q)+4==0=4.5=0.25=$

X	F(X)
0	ERROR
0.5	0.4334
0.5	-0.352

0.25

Trên đoạn  $[0; 4.5]$  có 1 nghiệm

- Tiếp tục MODE 7 với Start 4.5 End 9 Step 0.25  
 $C==4.5=9=0.25=$

	X	F(X)
1	4.75	-2.369
2	4.75	-2.358
3	5	-2.352

Math

4.5

Trên khoảng này không thu được nghiệm nào. Để chắc chắn hơn ta thử lần cuối với Start 9 End 28 Step 1

C=9=28=1=

	X	F(X)
1	9	-2.446
2	10	-2.486
3	11	-2.526

Math

9

Cũng không thu được nghiệm  $\Rightarrow$  Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất  $\Rightarrow$  Đáp án chính xác là C.