

Método de los coeficientes indeterminados

A la hora de calcular el polinomio interpolador a mano se pueden seguir distintos caminos. Se puede calcular mediante el método de Lagrange, de Newton o resolviendo un sistema de ecuaciones o una matriz.

Mediante resolución de un sistema de ecuaciones: a este método se le denomina el método de los coeficientes indeterminados.

Hay que tener en cuenta cuales son los valores que conocemos (valores de entrada), estos son:

- El **soporte**, vector que contiene los puntos de nuestro eje x, de forma general $S\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$, ejemplo, el soporte= $\{1,3,5\}$ (llamamos n a la longitud de ese vector soporte, el grado del polinomio será n-1).

encontrar el polinomio interpolador que pase por los puntos (1, 2), (2, 3), y (3, 5).

En este ejemplo el soporte es $\{1,2,3\}$, los valores que toma x en cada punto. Nuestra n valdría 3, ya que tenemos 3 valores y por tanto el grado del polinomio será 2.

- Una función $f(x)$ con la cual podemos calcular los valores de “y” para cada una de nuestras s del soporte (sustituyendo s en las x de $f(x)$), o bien directamente $f(s)$, es decir, los **valores de y**.

En el ejemplo anterior el enunciado nos proporciona directamente los valores de $f(s)$, es decir las “y”.

El polinomio interpolador que queremos calcular va a ser de la forma (base canónica): $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 \dots$ hasta el grado correspondiente. Siendo “a” los coeficientes canónicos.

El enunciado nos proporciona el soporte y podemos conocer $f(\text{soporte})$, queremos **obligar al polinomio a pasar por esos puntos (s, f(s))**. ¿Cómo creamos nuestro sistema de ecuaciones?

1. Escribimos la forma general del **polinomio en base canónica**, y del grado correspondiente.

En el ejemplo deducimos que el grado era dos, entonces

El polinomio será de la forma:

$$P(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$$

2. Escribimos tantas ecuaciones como puntos del soporte tengamos, para cada una de ellas, sustituimos un valor de s en el polinomio, es decir intercambiamos la x por nuestro valor s , elevándolo al número que toque, y multiplicado por nuestras incógnitas $a_1, a_2, a_3 \dots$ esta ecuación la igualamos a nuestro valor $f(s)$ correspondiente.

Sustituyendo los puntos en el polinomio $P(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$:

$$1. \text{ Para } (1, 2): a_1(1)^2 + a_2(1) + a_3 = 2 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 2$$

3. Realizamos este paso con cada uno de nuestros valores del soporte, y obtendremos un sistema con tantas ecuaciones e incógnitas como datos del soporte, por ejemplo, si el soporte es $\{1,2,3\}$, obtenemos 3 ecuaciones de 3 incógnitas.

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 2$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 2a_2 + a_3 = 3$$

$$\Rightarrow 9a_1 + 3a_2 + a_3 = 5$$

4. Por último, ya solo toca resolver el problema, ya sea resolviendo directamente el sistema (por Gauss, reducción, sustitución ...) o pasándolo a forma matricial, podemos observar que nuestra primera columna de la matriz siempre se va a corresponder con un valor cualquiera s elevado a 0, por tanto esta columna siempre vale 1 ($x^0 = 1$), siempre y cuando coloquemos en la primera columna las s elevadas a cero.

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

En este caso como hemos colocado los números elevados a cero en la última columna, es la columna 3 la que está rellena con unos.

Si llamamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resolveremos de la siguiente forma:

$$\vec{a} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Al resolverlo **obtendremos los valores de nuestras incógnitas** $a_1, a_2, a_3 \dots$, y con estos valores ya simplemente falta **“construir” el polinomio**, sustituimos dichas incógnitas en nuestra forma general del polinomio $a_1 x^0 + a_2 x^1 + a_3 x^2 \dots$, obteniendo así el polinomio en cuestión. Si queremos comprobar que este polinomio contiene nuestros puntos (s, f(s)), sustituimos s en el polinomio y nos debe dar f(s), ya que es lo que hemos impuesto en el sistema de ecuaciones.

En nuestro ejemplo

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = 2$$

y nuestro polinomio: $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

Ejemplo resuelto a mano

Ejercicio 1.5 (pg. 1)

$f(x)$ $f(-1)=3$ $f(0)=2$ $f(2)=6$ polinomio interpolador?

S $\rightarrow -1, 0, 2 \rightarrow$ polinomio grado 2.

$P_2(x) = ax^2 + a_1x + a_2$

$P(-1) = a + a_1(-1) + a_2 = 3$

$P(0) = a \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 = 2$

$P(2) = a \cdot 4 + a_1 \cdot 2 + a_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{4F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_2 - 6F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$a_2 = 1$

$2 + a_2 = 3 \rightarrow a_2 = 1$

$a_1 = 0$

$a = 2$

$3 - 2 - 6a_1 = 6$

$a_1 = 0$

$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

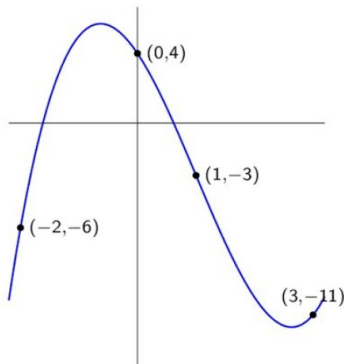
$n-1 \rightarrow$ grado polinomio

$n =$ número coeficientes

$P(x) = 2 + x^2$

Gráficamente el polinomio es:

Ejemplo



Se busca el polinomio P de grado mínimo posible que tome **valores dados** en **puntos dados**:

$$\begin{aligned}P(-2) &= -6, \\P(0) &= 4, \\P(1) &= -3, \\P(3) &= -11.\end{aligned}$$

En este ejemplo, la respuesta es el siguiente polinomio de grado 3:

$$P(x) = 4 - 5x - 3x^2 + x^3.$$

Ejemplo de **programa en R** que **calcula los coeficientes canónicos**:

Función para calcular el polinomio interpolador usando el método de coeficientes indeterminados

```
interpolación _ coeficientes _ indeterminados <- function(X, Y) {
```

```
# X: vector de las coordenadas x de los puntos de interpolación
```

```
# Y: vector de las coordenadas y de los puntos de interpolación
```

```
n <- length(X) # Número de puntos
```

```
# Construir la matriz A del sistema de ecuaciones
```

```
A <- matrix(0, nrow = n, ncol = n) # Matriz de coeficientes (n x n)
```

```
# Llenar la matriz A con las potencias de X
```

```
for (i in 1:n) {
```

```
  for (j in 1:n) {
```

```
    A[i, j] <- X[i]^(j - 1) # Potencias de x_i
```

```
  }
```

```
}
```

```
# Vector b que contiene los valores de Y
```

```
b <- Y
```

```
# Resolver el sistema de ecuaciones  $A * a = b$  para obtener los coeficientes a  
coeficientes <- solve(A, b)
```

```
    return(coeficientes)
}
```

Ejemplo de uso:

Definir los puntos de interpolación

```
X <- c(1, 2, 3) # Puntos en el eje X
```

```
Y <- c(2, 3, 5) # Puntos en el eje Y (valores de la función)
```

Calcular los coeficientes del polinomio interpolador

```
coeficientes <- interpolación _ coeficientes _ indeterminados(X, Y)
```

Mostrar los coeficientes del polinomio

```
print(coeficientes)
```