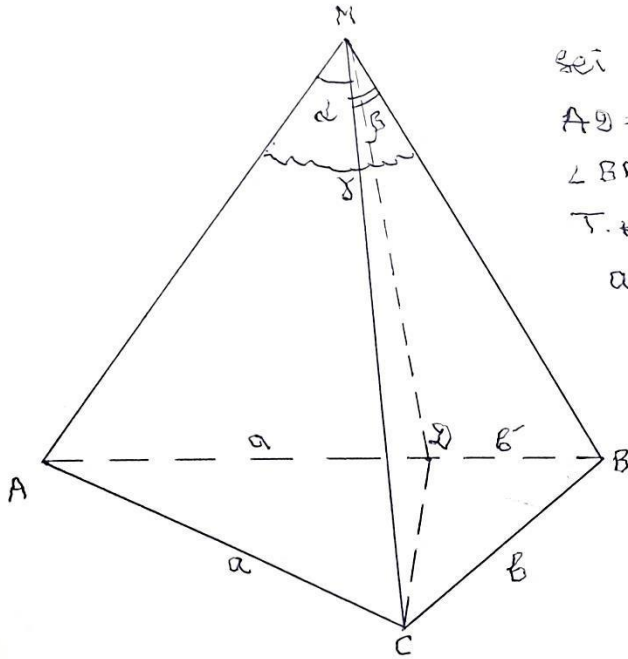


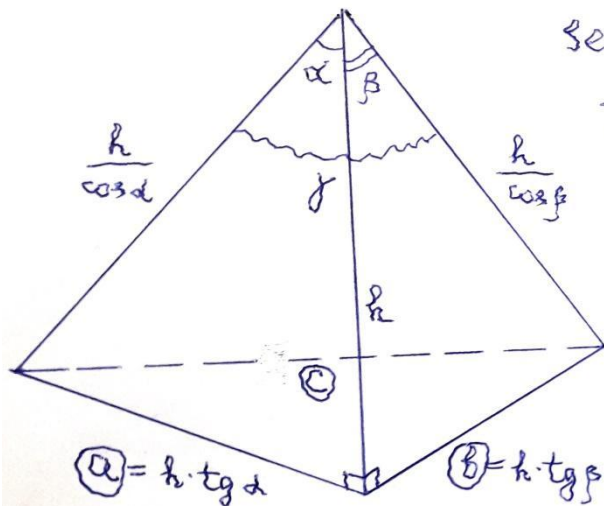
## «Каждый угол при вершине трёхгранного угла меньше суммы двух других углов»

«Обычное» доказательство:



Let  $\alpha < \gamma$  and  $\beta < \gamma$ ; let  $\angle MAC = \angle MAB$ ;  
 $AD = a = AC \rightarrow \triangle ADM = \triangle ACM$  and  $\angle AMD = \alpha$ ,  
 $\angle BMD = \gamma - \alpha$  and  $b' = AB - AC < BC = b$ ;  
 Т.к. в  $\triangle$ -ах  $MCB$  и  $MDB$  стороны  $BM$ -общая,  
 а стороны  $MC$  и  $MD$  равны, то,  
 с учётом  $b' < b$  получаем, что  
 $\angle BMD = \gamma - \alpha < \angle BMC = \beta$ , т.е.  $\gamma < \alpha + \beta$

Одно из «тригонометрических» доказательств:



Let  $\alpha < \gamma$  and  $\beta < \gamma \Rightarrow \gamma < \alpha + \beta$   
 Т.к.  $c < a + b$ , то  $c^2 < (a + b)^2$ ,  
 $\frac{h^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{h^2}{\cos^2 \beta} - \frac{2 \cos \gamma \cdot h^2}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} < h^2 (\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta)$ ,  
 $1 + \tan^2 \alpha + 1 + \tan^2 \beta - \frac{2 \cos \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} <$   
 $< \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \frac{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ ,  
 $\cos \gamma > \cos(\alpha + \beta)$   
 $\cos \gamma \notin [0; 1] \Rightarrow \gamma < \alpha + \beta$

Простейшие следствия.

1. Сумма всех плоских углов при вершинах грани тетраэдра (т.е. сумма всех плоских углов при любых трёх вершинах тетраэдра) больше  $360^\circ$ .

1. Сумма плоских углов при вершине трёхгранного угла меньше  $360$  градусов.

(предположив противное, из неравенства  $\alpha + \beta + \gamma > 360^\circ$  получим, что сумма всех плоских углов при вершинах основания меньше  $720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$  (!?))

3. Хотя бы при одной из вершин тетраэдра все плоские углы острые.

(предположив противное и складывая неравенства  $\alpha + \beta + \gamma > 2\gamma > 180^\circ$  при каждой из четырёх вершин тетраэдра, получим, что сумма углов всех четырёх треугольников – граней тетраэдра – больше  $720^\circ$  (!?))