

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (4 điểm)

(1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ 9x^3 = xy^2 + 70(x - y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

(2) Giải phương trình

$$11\sqrt{5-x} + 8\sqrt{2x-1} = 24 + 3\sqrt{(5-x)(2x-1)}. \quad x = 1$$

Câu II. (2 điểm)

(1) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn

$$x^2y^2 - 16xy + 99 = 9x^2 + 36y^2 + 13x + 26y. \quad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$$

2) Với a, b là những số thực dương thỏa mãn

$$2 \leq 2a + 3b \leq 5, \quad 8a + 12b \leq 2a^2 + 3b^2 + 5ab + 10.$$

Chứng minh rằng

$$3a^2 + 8b^2 + 10ab \leq 21.$$

Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O) . Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác $\widehat{BAC}$. Lấy các điểm M, N thuộc (O) sao cho các đường thẳng CM và BN cùng song song với đường thẳng AD .

(1) Chứng minh rằng $AM = AN$.

(2) Gọi giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng AC, AB lần lượt là E, F . Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM, AN . Chứng minh rằng các đường thẳng EQ, FP và AD đồng quy.

Câu IV. (1 điểm)

Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)} + \frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)} + \frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)} \geq 4.$$

-----HẾT-----

Đáp án tham khảo:

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (4.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7, \\ 9x^3 = xy^2 + 70(x - y). \end{cases}$$

b) Giải phương trình

$$11\sqrt{5-x} + 8\sqrt{2x-1} = 24 + 3\sqrt{(5-x)(2x-1)}.$$

Lời giải. a) Từ hệ phương trình đã cho, ta có

$$9x^3 = xy^2 + 10(x-y)(x^2 + xy + y^2) = xy^2 + 10x^3 - 10y^3.$$

Do đó $x^3 + xy^2 - 10y^3 = 0$, hay

$$(x - 2y)(x^2 + 2xy + 5y^2) = 0.$$

Ta có $x^2 + 2xy + 5y^2 = (x + y)^2 + 4y^2 \geq 0$, ngoài ra dấu bằng không thể xảy ra vì nếu không sẽ có $x = y = 0$, không thỏa mãn. Do đó $x^2 + 2xy + 5y^2 > 0$. Từ đây, ta có $x = 2y$.

Bây giờ, thay $x = 2y$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $7y^2 = 7$. Do đó $y = 1$ (tương ứng, $x = 2$) hoặc $y = -1$ (tương ứng, $x = -2$). Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (x, y) là $(2, 1)$ và $(-2, -1)$.

b) Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$. Đặt $a = \sqrt{5-x}$ và $b = \sqrt{2x-1}$ ($a, b \geq 0$). Khi đó, ta có $2a^2 + b^2 = 9$. Ngoài ra, từ phương trình đã cho, ta cũng có

$$11a + 8b = 24 + 3ab = 15 + 2a^2 + b^2 + 3ab = 15 + (2a + b)(a + b).$$

Vì $11a + 8b = 3(2a + b) + 5(a + b)$ nên từ đây, ta dễ dàng phân tích được

$$(2a + b - 5)(a + b - 3) = 0.$$

Suy ra $2a + b = 5$ hoặc $a + b = 3$.

• **Trường hợp 1: $2a + b = 5$.** Vì $2a^2 + b^2 = 9$ nên trong trường hợp này, ta có $2a^2 + (5 - 2a)^2 = 9$, tức $2(a - 2)(3a - 4) = 0$. Do đó $a = 2$ (tương ứng, $x = 1$) hoặc $a = \frac{4}{3}$ (tương ứng, $x = \frac{29}{9}$).

• **Trường hợp 2: $a + b = 3$.** Vì $2a^2 + b^2 = 9$ nên trong trường hợp này, ta có $2a^2 + (3 - a)^2 = 9$, tức $3a(a - 2) = 0$. Do đó $a = 0$ (tương ứng, $x = 5$) hoặc $a = 2$ (tương ứng, $x = \frac{29}{9}$).

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = 1$, $x = \frac{29}{9}$ và $x = 5$. □

Bài 2 (2.0 điểm).

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn

$$x^2y^2 - 16xy + 99 = 9x^2 + 36y^2 + 13x + 26y.$$

- b) Xét các số thực dương a, b thay đổi thỏa mãn đồng thời các điều kiện $2 \leq 2a + 3b \leq 5$ và $8a + 12b \leq 2a^2 + 3b^2 + 5ab + 10$. Chứng minh rằng

$$3a^2 + 8b^2 + 10ab \leq 21.$$

Lời giải. a) Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$x^2y^2 + 20xy + 99 = 9(x + 2y)^2 + 13(x + 2y),$$

hay

$$(xy + 10)^2 = 9(x + 2y)^2 + 13(x + 2y) + 1.$$

Do $(xy + 10)^2$ là số chính phương nên từ đây, ta suy ra $9(x + 2y)^2 + 13(x + 2y) + 1$ là số chính phương. Mặt khác, ta lại có

$$9(x + 2y)^2 + 13(x + 2y) + 1 > 9(x + 2y)^2 + 6(x + 2y) + 1 = (3x + 6y + 1)^2$$

và

$$9(x + 2y)^2 + 13(x + 2y) + 1 < 9(x + 2y)^2 + 18(x + 2y) + 9 = (3x + 6y + 3)^2$$

nên $9(x + 2y)^2 + 13(x + 2y) + 1 = (3x + 6y + 2)^2$, tức $x + 2y = 3$. Vì x, y là các số nguyên dương nên từ đây, ta có $x = y = 1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có duy nhất một cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn yêu cầu là $(1, 1)$.

b) Giả thiết thứ hai của bài toán có thể được viết lại thành $4(2a + 3b) \leq (a + b)(2a + 3b) + 10$. Đặt $x = a + b$ và $y = 2a + 3b$ thì ta có $x > 0$, $2 \leq y \leq 5$ và $4y \leq xy + 10$.

Với chú ý rằng $3a^2 + 8b^2 + 10ab = (a + 2b)(3a + 4b)$ và $a + 2b = y - x$, $3a + 4b = y + x$, ta thấy bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành $(y - x)(y + x) \leq 21$, hay

$$x^2 + 21 \geq y^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $x^2 + \frac{4}{25}y^2 \geq \frac{4}{5}xy \geq \frac{4}{5}(4y - 10)$. Suy ra

$$x^2 \geq \frac{4}{5}(4y - 10) - \frac{4}{25}y^2.$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4}{5}(4y - 10) - \frac{4}{25}y^2 + 21 \geq y^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $\frac{1}{25}(29y + 65)(5 - y) \geq 0$ (đúng vì $2 \leq y \leq 5$). Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. $\square$

Bài 3 (3.0 điểm). Cho tam giác ABC có $\angle BAC$ là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O) . Trên cạnh BC , lấy điểm D sao cho AD là phân giác của góc BAC . Lấy các điểm M, N (M khác C , N khác B) thuộc đường tròn (O) sao cho các đường thẳng CM và BN cùng song song với đường thẳng AD .

- Chứng minh rằng $AM = AN$.
- Gọi E, F lần lượt là các giao điểm của đường thẳng MN với hai đường thẳng AC, AB . Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM và AN . Chứng minh rằng ba đường thẳng EQ, FP và AD đồng quy.

Lời giải. a) Gọi K là giao điểm thứ hai của AD và (O) . Xét đường tròn (O) , ta có

$$\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BK} = \angle BAK = \angle CAK = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{CK} \implies BK = CK. \quad (1)$$

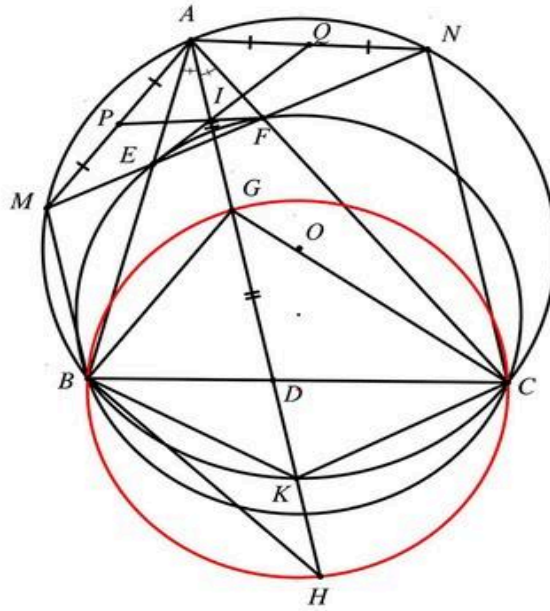
Mà $BM \parallel AD \parallel CN$ nên

$$\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AM} = \angle ABM = \angle BAK = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BK} \implies AM = BK. \quad (2)$$

Tương tự, ta cũng có

$$AN = CK. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra $AM = AN$.



b) Vì tứ giác $ACBM$ nội tiếp và $AM = AN$ (câu **a**)) nên

$$\begin{aligned}\angle BEF = \angle AEM &= \frac{1}{2}\widehat{sdAM} + \frac{1}{2}\widehat{sdBN} = \frac{1}{2}\widehat{sdAN} + \frac{1}{2}\widehat{sdBN} \\ &= \frac{1}{2}\widehat{sdANB} = \angle AMB = 180^\circ - \angle BCA.\end{aligned}$$

Suy ra $\angle BEF + \angle BCF = 180^\circ$. Vậy tứ giác $BCFE$ nội tiếp hay bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi G là trung điểm của AD . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCG cắt lại AD tại H . Ta có hai tam giác AEN và DCA có $\angle AEN = \angle DCA$ (vì tứ giác $BCFE$ nội tiếp) và $\angle ANE = \frac{1}{2}\widehat{sdAM} = \frac{1}{2}\widehat{sdCK} = \angle DAC$ nên hai tam giác này đồng dạng. Chú ý EQ và CG theo thứ tự là trung tuyến của hai tam giác đồng dạng này nên các tam giác AEQ và DCG đồng dạng. Suy ra $\angle AEQ = \angle DCG$. Do đó nếu gọi I là giao điểm của EQ và AD thì ta có $\angle AEI = \angle AEQ = \angle DCG = \angle BCG = \angle BHG = \angle BHI$. Suy ra tứ giác $BEIH$ nội tiếp. Do đó hai tam giác AEI và AHB đồng dạng. Suy ra

$$AI \cdot AH = AB \cdot AE. \quad (4)$$

Chứng minh tương tự, nếu gọi I' là giao điểm của FP và AD thì ta cũng có

$$AI' \cdot AH = AC \cdot AF. \quad (5)$$

Mặt khác, theo câu **b)** bài toán, để có hai tam giác AEF và ACB đồng dạng nên

$$AE \cdot AB = AF \cdot AC. \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6), ta suy ra $AI \cdot AH = AI' \cdot AH$. Do đó $AI = AI'$, tức I và I' trùng nhau. Vậy ba đường thẳng AD, EQ và FP đồng quy tại I . $\square$

Bài 4 (1.0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)} + \frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)} + \frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)} \geq 4.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng cộng mẫu, ta có

$$\begin{aligned}\text{VT} &= \frac{(a^2+abc)^2}{ab(ab+2c^2)} + \frac{(b^2+abc)^2}{bc(bc+2a^2)} + \frac{(c^2+abc)^2}{ca(ca+2b^2)} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{ab(ab+2c^2) + bc(bc+2a^2) + ca(ca+2b^2)} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{(ab+bc+ca)^2}.\end{aligned}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc \geq 2(ab + bc + ca),$$

hay

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc \geq (a + b + c)^2.$$

Một cách tương đương, ta chỉ cần chứng minh

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc \geq 9.$$

Trong ba số a, b, c có hai số nằm về cùng phía với 1. Không mất tính tổng quát, giả sử hai số đó là a và b . Khi đó, ta có $(a - 1)(b - 1) \geq 0$. Suy ra $ab \geq a + b - 1 = 2 - c$. Từ đây, ta có

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc &\geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3c(2 - c) = 2(a^2 + b^2) + 6c - c^2 \\ &\geq (a + b)^2 + 6c - c^2 = (3 - c)^2 + 6c - c^2 = 9. \end{aligned}$$

Phép chứng minh được hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □