BÀI 4. TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ

1.Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm : Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và một điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm M là đường thẳng d có phương trình : $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

2.Lệnh Casio : qy

Bài 1-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{x}-\ln x$ tại điểm có hoành độ bằng 2

A. $\frac{1}{2}-\ln 2$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{1}{4}$

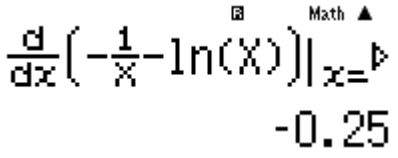
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

◎ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

◎ Sử dụng máy tính Casio để tính hệ số góc tiếp tuyên tại điểm có hoành độ bằng 2 $\Rightarrow k=f'(2)$

qypa1RQ)$phQ))$2=



◎ Ta thấy $k=f'(2)=-0.25=-\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Bài 2-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y=-2x+1$ **B.** $y=3x-2$ **C.** $y=2x+1$ **D.** $y=-3x-2$

GIẢI

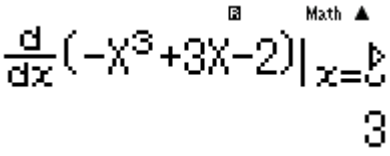
❖ **Cách 1 : CASIO**

◎ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

- M là giao điểm của đồ thị (C) và trục tung $\Rightarrow$ M có tọa độ $(0;-2)$

  Tính $f'(0)=0$

  qypQ)^3$+3Q)p2$0=



- Thế vào phương trình tiếp tuyến có $y=3(x-0)-2 \Leftrightarrow y=3x-2$

  $\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

<u>Bài 3</u>-[Thi thử chuyên Nguyễn Thị Minh Khai lần 1 năm 2017]

Số tiếp tuyến với đồ thị (C) : $y=x^3-3x^2+2$ đi qua điểm $M(1;0)$ là :

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

  Trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

- Thế $f'(x_0)$ vào phương trình tiếp tuyến được $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$

  Tiếp tuyến đi qua điểm $M(1;0)$ $\Rightarrow 0=(3x_0^2-6x_0)(1-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$

  $\Leftrightarrow -2x_0^3+6x_0^2-6x_0+2=0$

  Sử dụng máy tính với lệnh MODE 5 để giải phương trình bậc 3 trên

  w5p4p2=6=p6=2=



- Ta thấy có 1 nghiệm x_0 $\Rightarrow$ Chỉ có 1 tiếp tuyến duy nhất.

  $\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

<u>Bài 4</u>-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

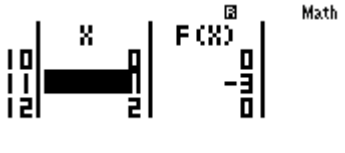
Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C) . Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) với hệ số góc nhỏ nhất

A. $y=-3x+3$ **B.** $y=-3x-3$ **C.** $y=-3x$ **D.** $y=0$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M\left(x_0;y_0\right)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0$
  Trong đó hệ số góc $k=f'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của k bằng chức năng MODE 7
  w73Q)dp6Q)==p9=10=1=



1

  Ta thấy $f'\left(\min\right)=f'\left(1\right)=-3\Rightarrow x_0=-3$ $\Rightarrow y_0=1^3-3.1^2+2=0$
- Thế vào phương trình tiếp tuyến có $y=-3\left(x-1\right)+0\Leftrightarrow y=-3x+3$
  $\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Bài 5-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ (C) Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của (C) đến một tiếp tuyến bất kì của (C). Giá trị lớn nhất d có thể đạt được là :

A. $3\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : T. CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M\left(x_0;y_0\right)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0$
  Trong đó hệ số góc $k=f'\left(x_0\right)=-\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}$.
  Thế k,y_0 vào phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=-\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{x_0+2}{x_0+1}$
  $\Leftrightarrow\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}x+y-\dfrac{x_0}{\left(x_0+1\right)^2}-\dfrac{x_0+2}{x_0+1}=0$
- Hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên giao điểm hai tiệm cận là $I\left(-1;1\right)$.
  Áp dụng công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng ta có :

$$h=d\left(I;\left(d\right)\right)=\frac{\left|\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\left(-1\right)+1-\dfrac{x_0}{\left(x_0+1\right)^2}-\dfrac{x_0+2}{x_0+1}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\right)^2+1^2}}$$

  Dùng máy tính Casio với lệnh MODE 7 để tính các giá trị lớn nhất này.

w7aqcap1R(Q)+1)d$+1paQ)R(Q)+1)d$paQ)+2RQ)+1Rs(a1R(Q)+1)d$)d+1==
p9=10=1=



- Ta thấy $h(\max)=\sqrt{2}$

  $\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

<u>Bài 6</u>-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (H), M là điểm bất kì và $M\in(H)$. Tiếp tuyến với (H) tại M tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích bằng :

A. 4 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 2

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

  Trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}$.

  Thế k,y_0 vào phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$ (d)

- Hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=2$ và giao điểm 2 tiệm cận là $I(1;2)$

  Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến d và tiệm cận đứng $\Rightarrow E\left(1;\dfrac{2x_0}{x_0-1}\right)$

  Gọi F là giao điểm của tiếp tuyến d và tiệm cận ngang $\Rightarrow F(2x_0-1;2)$

- Độ dài $IE=\left|\overrightarrow{IE}\right|=\sqrt{(1-1)^2+\left(\dfrac{2x_0}{x_0-1}-2\right)}=\dfrac{2}{|x_0-1|}$

  Độ dài $IF=\sqrt{(2x_0-1-1)^2+(2-2)^2}=2|x_0-1|$ Áp dụng công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng ta có :

- Diện tích ΔIEF $=\dfrac{1}{2}IE.IF=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{|x_0-1|}.2|x_0-1|=2$ $\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -1 có hệ số góc bằng :

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Bài 2-[Thi thử chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017]

Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d:\mathrm{y}=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

A. $(0;1),(2;3)$ **B.** $(1;0),(-3;2)$ **C.** $(-3;2)$ **D.** $(1;0)$

Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành có phương trình là :

A. $y=3x$ **B.** $y=3x-3$ **C.** $y=x-3$ **D.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x-16$

A. $y=9x+16$ **B.** $y=9x+12$ **C.** $y=9x-10$ **D.** $y=9x-12$

Bài 5-[Thi thử Group nhóm toán Facebook lần 5 năm 2017]

Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C):y=\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

A. $M(-2;0)$ **B.** $M\left(-3;-\frac{16}{3}\right)$ **C.** $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$ **D.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{9}{8}\right)$

Bài 6-[Thi tốt nghiệm THPT năm 2012]

Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=x_0$ biết $f''(x_0)=-1$

A. $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\dfrac{5}{4} \\ y=3x+\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=3x-\dfrac{5}{4} \\ y=-3x+\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\dfrac{5}{4} \\ y=3x-\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x+\dfrac{5}{4} \\ y=3x+\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

[redacted]

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -1 có hệ số góc bằng :

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{6}$ **C.** $-\dfrac{1}{3}$ **D.** $-\dfrac{1}{6}$

GIẢI

- Hệ số góc của tiếp tuyến là đạo hàm tại tiếp điểm $\Rightarrow k=f'(-1)=-\dfrac{1}{3}$

qyaQ)+1R2Q)p1$$p1=

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{X+1}{2X-1}\right)\Big|_{X=-1}$ Math ▲

$-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 2-[Thi thử chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017]

Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d:\mathrm{y}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

A. $(0;1),(2;3)$ **B.** $(1;0),(-3;2)$ **C.** $(-3;2)$ **D.** $(1;0)$

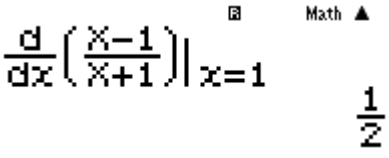
GIẢI

- Đề bài hỏi các điểm M nên ta dự đoán có 2 điểm , lại quan sát thấy đáp án **B** được cấu tạo từ đáp án **C** và **D** nên ta ưu tiên thử đáp án D trước.

- Tiếp tuyến song song với d nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng hệ số góc của d và bằng $\frac{1}{2}$

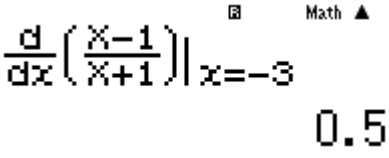
Tính $f'(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Điểm $M(1;0)$ là một tiếp điểm

qyaQ)p1RQ)+1$$1=



Tính $f'(-3)=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Điểm $M(-3;2)$ là một tiếp điểm

!!op3=



$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

<u>Bài 3</u>-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành có phương trình là :

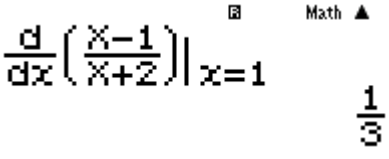
A. $y=3x$ **B.** $y=3x-3$ **C.** $y=x-3$ **D.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$
- M là giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành $\Rightarrow M(1;0)$ $\Rightarrow x_0=1;y_0=0$

Tính hệ số góc $k=f'(1)$

qyaQ)p1RQ)+2$$1=



Thay vào ta có tiếp tuyến $y=\frac{1}{3}(x-1)+0\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x-16$

A. $y=9x+16$ **B.** $y=9x+12$ **C.** $y=9x-10$ **D.** $y=9x-12$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-3$

- Tiếp tuyến song song với $y=9x-16$ nên có hệ số góc $k=9\Leftrightarrow 3x_0^2-3=9\Leftrightarrow x_0=\pm 2$

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=2\Rightarrow$ Tiếp tuyến : $y=9(x-2)+2\Leftrightarrow y=9x-16$ Tính hệ số góc $k=f'(1)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 5-[Thi thử Group nhóm toán Facebook lần 5 năm 2017]

Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C):y=\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

A. $M(-2;0)$ **B.** $M\left(-3;-\frac{16}{3}\right)$ **C.** $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$ **D.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{9}{8}\right)$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=x_0^2-1$

- Tiếp tuyến vuông góc với $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ nên có hệ số góc $k.\left(-\frac{1}{3}\right)=-1\Leftrightarrow k=3\Leftrightarrow x_0^2-1=3\Leftrightarrow x_0=\pm 2$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

<u>Bài 6</u>-[Thi tốt nghiệm THPT năm 2012]

Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2\left(C\right)$. Viết phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ $x=x_0$ biết $f''\left(x_0\right)=-1$

A. $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\frac{5}{4} \\ y=3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=3x-\frac{5}{4} \\ y=-3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\frac{5}{4} \\ y=3x-\frac{5}{4} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x+\frac{5}{4} \\ y=3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M\left(x_0;y_0\right)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0$ với hệ số góc $k=f'\left(x_0\right)=x_0^4-4x_0$
- Ta có $f''\left(x\right)=3x_0^2-4$ $\Rightarrow 3x_0^2-4=-1\Leftrightarrow x_0^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=1;y_0=-\frac{7}{4} \\ x_0=-1;y_0=-\frac{7}{4} \end{array}\right.$

Với $x_0=1$ Tính hệ số góc $k=f'\left(1\right)$

qya1R4$Q)^4$p2Q)d$1=

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}X^4-2X^2\right)\Big|_{X=1}$

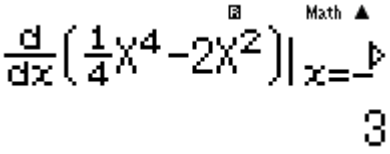
-3

Thay vào ta có tiếp tuyến $y=-3\left(x-1\right)-\frac{7}{4}\Leftrightarrow y=-3x+\frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Với $x_0 = -1$ Tính hệ số góc $k = f'(1)$

!!!p=



Thay vào ta có tiếp tuyến $y = 3(x+1) - \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = 3x + \frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D.**