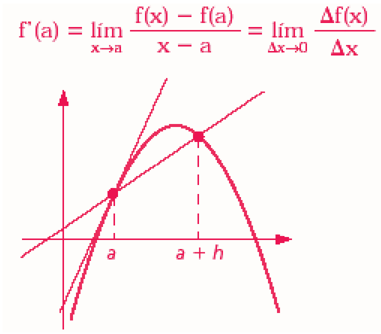


Funtzio baten **DERIBATUA** puntu batean = **ZENBAKIA** = Funtzioko puntuaren zuzen ukitzailearen **MALDA**

Ariketa honen bidez funtzio baten deribatuaren definizioa (puntu batean) lortuko dugu

Hasteko, idatzi hemen zuzen baten ekuazioa, bi puntu hauetatik igarotzen dela jakinda:

$P(x_0, y_0)$ eta $Q(x_1, y_1)$

Zuzen baten ekuazioa (geometrian landu genuena):

GOGORATU:

Bi puntu emenada, $P(x_0, y_0)$ eta $Q(x_1, y_1)$ → $\vec{V}=\left(v_1, v_2\right)=\left(x_1-x_0, y_1-y_0\right)$ *eta*

$$m=\frac{v_2}{v_1}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

eta ekuazio jarraitua kontuan hartuz:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2} \; --> \; \frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

Beraz, bakanduz:

$$y-y_0=\left(y_1-y_0\right)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\left(x-x_0\right)$$

Puntu – malda ekuazioa:

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\left(x-x_0\right)$$

$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_o}(x-x_0) \rightarrow y-y_0 m\cdot(x-x_0)$	**malda=m=**$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_o}$

Helburua y=f(x) funtzio baten puntu zehatz bateko zuzen ukitzailearen ekuazioa lortzea da.

Honetarako kontuan hartu behar ditugun datuak hauek dira:

- Funtzioa: **y=f(x)**
- Funtzioaren puntu **FINKO** bat: $P(x_0, f(x_0))$
- Funtzioaren puntu **mugikor** bat: $Q(x,f(x))$; x edozein balio erreal izanik

Deribazioan erabiltzen den idazkera hurbiltzeko, aldaketa txiki bat egingo dugu aurrean idatzitako ekuazioan

Idatzi, berriz, zuzenaren ekuazioa y=f(x) funtzioaren bi puntu hauek erabiliz:

$P(x_0, \mathbf{f(x_0)})$ eta $Q(\mathbf{x,f(x)})$

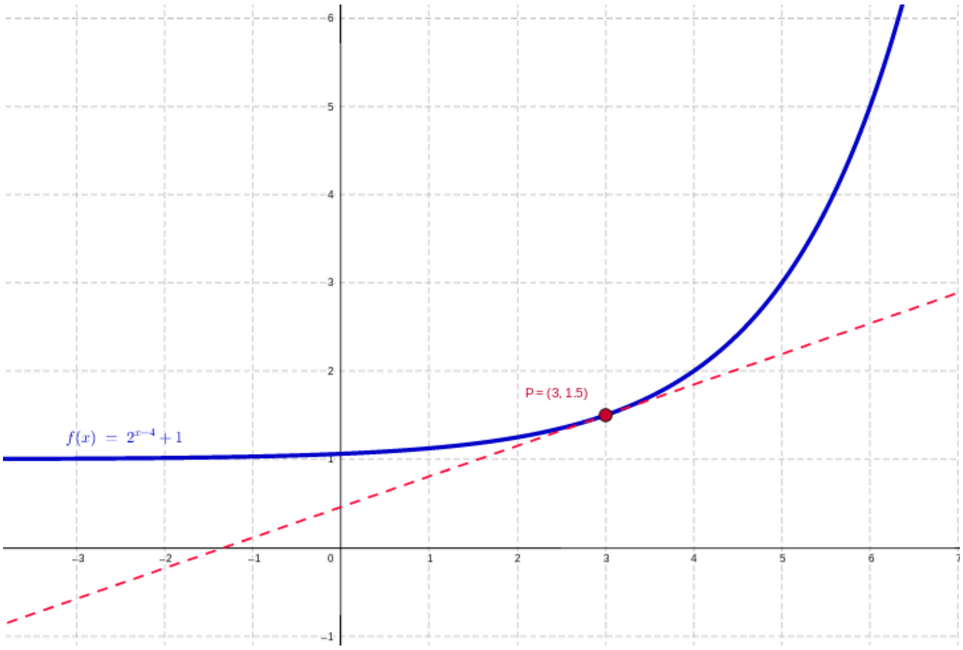
$y-\mathbf{f(x_0)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o}(x-x_0)$	$m=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o}$

Lortutako ekuazioa erabiliko duzu funtzio baten deribatuaren DEFINIZIOA, puntu batean, **zuk zeuk eraikitzeko**. Honetarako funtzio zehatz bat eta bere puntu finko bat erabiliko dituzu

Ariketa:

Funtzioa: $y=f(x)= 2^{x-4}+1$------> Geogebraren [ESTEKA]

Funtzioaren puntu finkoa: P(3, 1.5)



Galdera:

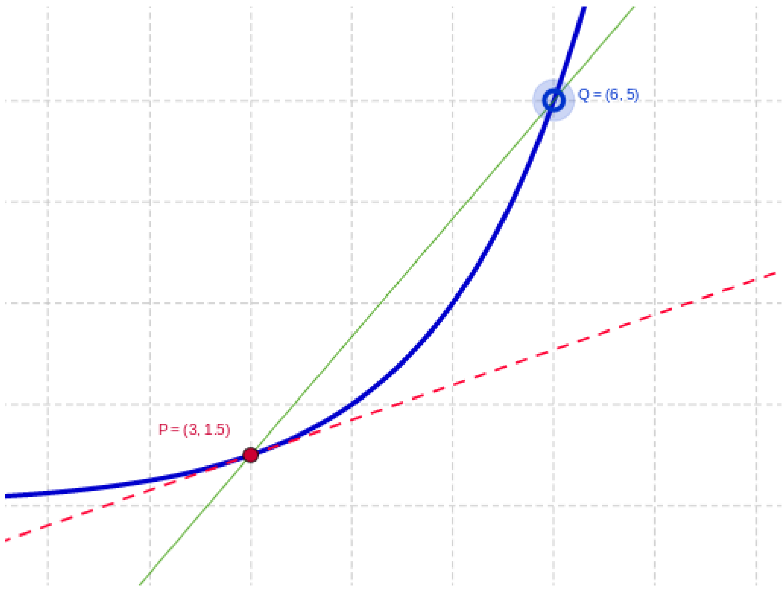
Zein da irudikatuta dagoen zuzenaren ekuazioa? Idaz dezakezu? Zenbat puntu behar duzu ekuazio hori idazteko?

Ezin dugu idatzi, zuzen baten ekuazioa idazteko beti Bi datu behar ditugulako, BI puntu edo puntu bat eta MALDA.

Argi dago ezin dugula idatzi beste puntu bat behar dugulako, eta funtzioarena baldin bada, zuzena ez da UKITZAILEA izango, baizik eta zuzen EBAKITZAILE bat.

Nahi dugun zuzen ukitzailera **hurbiltzeko,** funtzioaren zuzen ebakitzaile batzuen ekuazioak idatziko ditugu (EGON ADI zuzen hauen MALDEKIN)

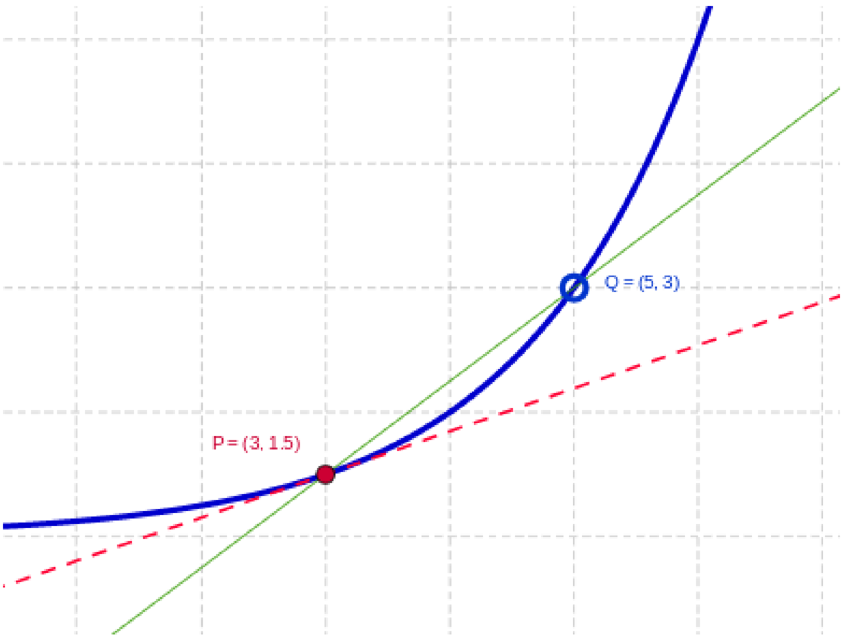
1.zuzen ebakitzailea: P(3,1.5) eta Q(6,5)



1.zuzena:

$y-1,5=\frac{5-1,5}{6-3}(x-3)$	$m_1=\frac{5-1,5}{6-3}=1,17$

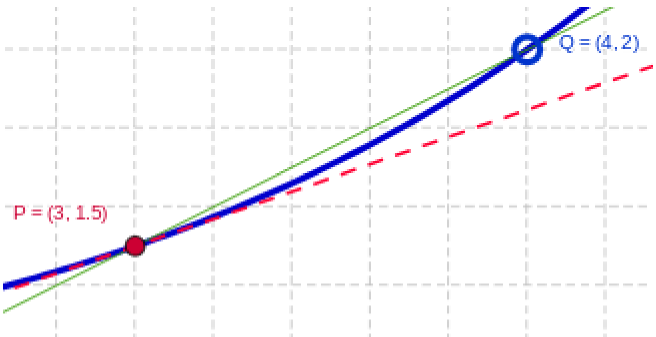
2.zuzen ebakitzailea: P(3,1.5)   eta   Q(5,3)



2.zuzena:

y-1,5=$\frac{3-1,5}{5-3}(x-3)$	m_2=$\frac{3-1,5}{5-3}$=0,75

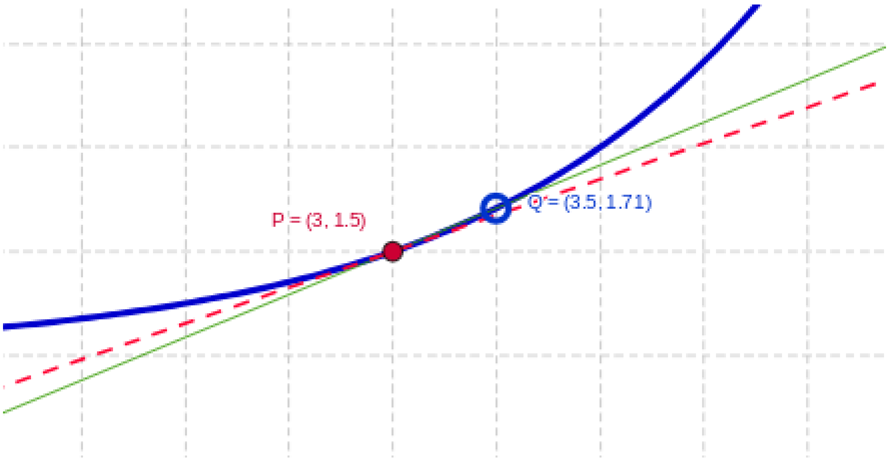
3.zuzen ebakitzailea: P(3,1.5)   eta   Q(4,2)



3.zuzena:

y-1,5=$\frac{2-1,5}{4-3}(x-3)$	m_3=$\frac{2-1,5}{4-3}$=0,5

4.zuzen ebakitzailea: P(3,1.5) eta Q(3.5,1.71)



4.zuzena:

$y-1,5=\frac{1,71-1,5}{3,5-3}(x-3)$	$m_4=\frac{1,71-1,5}{3,5-3}$ $=0,42$

Eta beste batzuk….

5.zuzen ebakitzailea: P(3,1.5) eta Q(3.2 , 1.574) **Gogoratu f(x)=** $2^{x-4}+1$

5.zuzena:

$y-1,5=\frac{1.5743-1,5}{3,2-3}(x-3)$	$m_5=\frac{1.5743-1,5}{3,2-3}=0,3717$

6.zuzen ebakitzailea: P(3,1.5) eta Q(3.01, **1.5035**) **Gogoratu f(x)=** $2^{x-4}+1$

6.zuzena:

$y-1,5=\frac{1.5035-1,5}{3,01-3}(x-3)$	$m_6=\frac{1.5035-1,5}{3,01-3}=0,3501$

Idatzi hemen lortutako malda guztiak (zenbaki horiek) eta begiratu Q puntuaren P puntura hurbiltzerantz zein ZENBAKIRA hurbiltzen diren, zenbaki hori zunzen UKITZAILEAren MALDA da eta m_0 adierazten da

x=6	x=5	x=4	x=3.5	x=3.2	x=3.01
m_1= 1,17	m_2=0,75	m_3= 0,5	m_4=0,42	m_5= 0,3715	**m_6=0,3501**

Galdera:
Zein da m_0 balioa?

m_0=0,35

Zaila da "asmatzea" m_0, baina ikusi dugu kalkulatutako malden "hurbilketa" bat dela, hau da zenbaki batzuen LIMITEA dela.

Modu zehatz batera kakulatzeko, hau da egingo duguna, Q puntu orokor bat hartuko dugu: Q(x,f(x)) eta berriz idatziko ditugu bi hauek:

P(**3**,1.5) eta Q(x,f(x))

7.Zuzen ebakitzaile orokorra:

$y-1,5=\frac{f(x)-1,5}{x\quad -3}\,(x\ -\ 3)$	$m_x=\frac{f(x)-1,5}{x\quad -3}$

Zuzena ukitzilearen malda kalkulatzeko (m_0) limite hau kalkulatu behar dugu:

$$m_0=\lim_{x\to 3} m_x=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1,5}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-4}+1-1,5}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-4}-0,5}{x-3}=0,35$$

(*) limite honen kalkulua , prozedura, ez dugu eman. sinestu behar duzue. 2.mailan landu egiten da.

Zuzena ukitzailea:

y-1,5=$0,35\ (x - 3)$	$m_0=0,35$

Kalkulatu duzun maldari , zunzen ukitzailearen maldari, **izen berezi bat** eman diote. Hain zuzen **funtzioaren deribatua x=3 puntuan** eta horrela adierazten da:

$$\mathbf{m_0=f'(3)}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1{,}5}{x-3}=0{,}35$$

<u>Ariketa</u>:

Kalkulatu **f(x)=** x^2+4 funtzioa izanik , funtzioarekiko zuzenaren ukitzailearen malda puntu haueta, lortutako :

a) x= 1

$$m=f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+4)-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Sol: f'(1)=2 ----> m=2>0, zuzen ukitzailea **gorakorra** da, funtzioa ere gorakorra da x=1 puntuan

b) x=-2

m=f'(-2)= $\lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x)-8}{x+2} =$

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+4-8}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2} =$

$\lim\limits_{x \to -2} (x - 2) = -4$

Sol: f'(-2)=-4----> m=-4<0, zuzen ukitzailea **beherakorra** da, funtzioa ere beherakorra da x=-2 puntuan

c) x=0

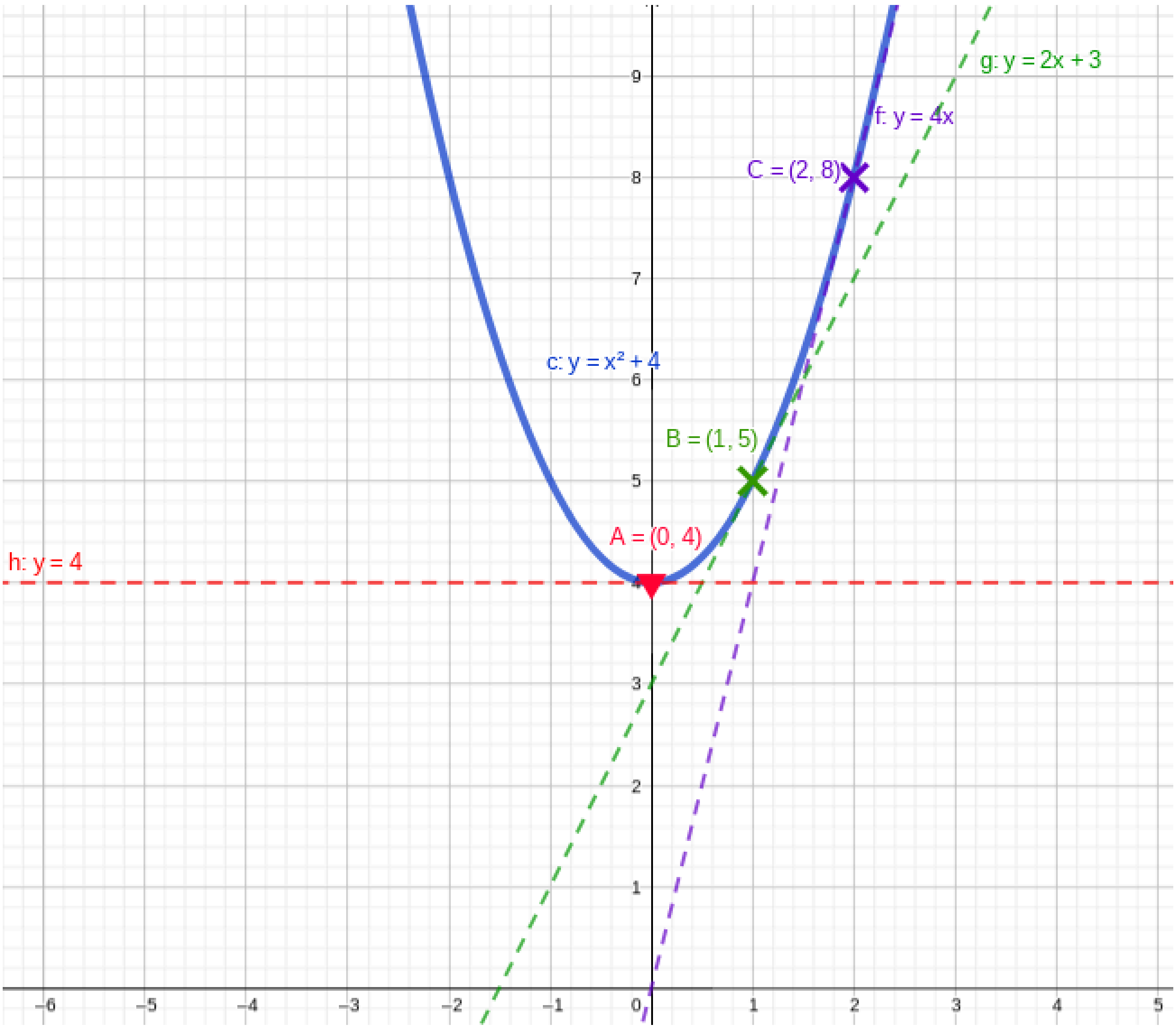
m=f'(0)= $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-4}{x} \quad \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+4-4}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

Sol: f'(0)=0----> m=0, zuzen ukitzailea horizontala, funtzioak puntu singularra du x=0 puntuan, dagokion parabola (2.mailako funtzio polinomiko baten grafikoa paraboloa dela gogoratuz) AHURRA izanik (a=1>0), bere erpina puntu singular minimoa da, eta deribatuaren bidez aurki dezakegu oso modu erraza eta azkarra: **V(0,4)**

Hau da kalkulatu ditugun zuzen ukitzaile guztien egoera funtzioarekiko:

Geogebraren [ESTEKA]


g: y = 2x + 3
f: y = 4x
C = (2, 8)
c: y = x² + 4
B = (1, 5)
A = (0, 4)
h: y = 4