# Chapitre A8
# Equations

## I. Définitions

Une **équation** est une égalité où au moins un des nombres est désigné par une lettre. Ces nombres écrits en lettres sont les **inconnues** de cette équation. **Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs** des inconnues pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

### Exemples

- L'équation $x + 2 = 0$ admet une solution $x = -2$.
- L'équation $x \times 0 = 1$ n'admet pas de solution.
- L'équation $x \times 0 = 0$ admet une infinité de solutions : tous les nombres réels conviennent.
- L'équation $x^2 = 4$ admet deux solutions : 2 et $-2$.

Une **équation du premier degré à une inconnue** est une équation qui **peut** se mettre sous la forme $ax + b = 0$ où a et b sont des **constantes** et $x$ est une **inconnue**.

Pour résoudre une telle équation, on isole les termes contenant l'**inconnue** d'un côté et les **constantes** de l'autre en utilisant la règle suivante :

**Règle**

Soit a, b et c des nombres réels, on peut affirmer :

- $a = b$ si et seulement si $a + c = b + c$
- $a = b$ si et seulement si $a - c = b - c$
- $a = b$ si et seulement si $a \times c = b \times c$ $(c \neq 0)$
- $a = b$ si et seulement si $a : c = b : c$ $(c \neq 0)$

### Remarque

$5 \times 0 = 3 \times 0$ et pourtant $5 \neq 3$

### Exemple

On veut résoudre l'équation suivante :

$$5x + 2 = 3x - 85x + 2 - 3x = 3x - 8 - 3x2x + 2 - 2 = -8 - 2\frac{2x}{2} = \frac{-10}{2}x = -5$$

### Vérification

$$5x + 2 = 5 \times (-5) + 2 = -25 + 2 = -23$$

$$3x - 8 = 3 \times (-5) - 8 = -15 - 8 = -23$$

L'équation admet une solution $x = -5$.

## II. Equations produit

En troisième, on étudie certaines équations du second degré à une inconnue, les **équations produit**.
Ces équations peuvent se mettre sous la forme :
$(ax + b)(cx + d) = 0$ où a, b, c et d sont des **constantes** et $x$ est l'**inconnue**.
Pour résoudre ces équations, on utilise la propriété suivante :

**Propriété**
Le **produit** de deux nombres est nul si (et seulement si) l'un de ses **facteurs** est nul.

**Exemple** on veut résoudre l'équation

$$(5x + 2)(3x - 7) = 0$$

**Solution (rédaction type brevet)**

$$(5x + 2)(3x - 7) = 0$$

Un produit est nul si (et seulement si) l'un de ses facteurs est nul.
Donc

$5x + 2 = 05x + 2$ ou $3x - 7 = 03x - 7$ .

L'équation admet deux solutions $\frac{-2}{5}$ et $\frac{7}{3}$.

**Remarque**
En seconde, la dernière phrase sera écrite avec sa notation mathématique :

$$S = \left\{-\frac{2}{5}; \frac{7}{3}\right\}$$

**Cas particuliers**

- On veut résoudre l'équation suivante :

$$3x(4x - 8) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Donc

$3x = 0x = ($ ou $4x - 8 = 04x - 8$ .

L'équation admet deux solutions 0 et 2.

- On veut résoudre l'équation $(3x + 1)^2 = 0$

$$(3x + 1)(3x + 1) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Donc

$$3x + 1 - 1 = 0 - 1 \frac{3x}{3} = \frac{-1}{3} x = \frac{-1}{3}$$

L'équation admet une seule solution (double) $-\frac{1}{3}$.

**Equations et identités remarquables**

- On veut résoudre l'équation $(2x + 1)^2 = 25$.

$$(2x + 1)^2 - 25 = 25 - 25$$

$$(2x + 1)^2 - 5^2 = 0$$

On utilise la troisième identité remarquable
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = 2x + 1$ et $b = 5$.
Donc $(2x + 1 - 5)(2x + 1 + 5) = 0$

$$(2x - 4)(2x + 6) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
$2x - 4 = 0x$ ou $2x + 6 = 0x = -3$
L'équation admet deux solutions 2 et $-3$.

- On veut résoudre l'équation

$$(2x - 3)^2 = (x + 4)^2$$

$$(2x - 3)^2 - (x + 4)^2 = (x + 4)^2 - (x + 4)^2$$

$$(2x - 3)^2 a^2 - - (x + 4)^2 b^2 = 0$$

$$[\,((2x - 3)\,a - - (x + 4)\,b\,]\,)\,[\,((2x - 3)\,a + + (x + 4)\,b\,]\,) = 0$$

$$[2x - 3 - x - 4][2x - 3 + x + 4] = 0$$

$$(x - 7)(3x + 1) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
$x - 7 = 0x = 7$ ou $3x + 1 = 0x = -\frac{1}{3}$
L'équation admet deux solutions 7 et $-\frac{1}{3}$.

## III. Problèmes

### Problème 1

On considère un rectangle ABCD. On sait que la longueur mesure 2 cm de plus que la largeur.
**1.** Sachant que le périmètre du rectangle est de 17,2 cm, quelles sont les dimensions du rectangle ?
**2.** Sachant que l'aire du rectangle est de 8 $cm^2$, quelles sont les dimensions du rectangle ?

**Solution**

**1.** Soit $x$ la largeur du rectangle. $x + 2$ est la longueur du rectangle. Le périmètre du rectangle ABCD vaut :

$$2x + 2(x + 2) = 17,2 \quad 2x + 2x + 4 = 17,2 \quad 4x + 4 - 4 = 17,2 - 4 \quad \frac{4x}{4} = \frac{13,2}{4} \quad x = 3,3$$

Dans ce cas, la largeur du rectangle ABCD vaut 3,3 cm et sa longueur égale 5,3 cm.

$$2\times 3,3 + 2\times 5,3 = 17,2$$

**2.** Soit $x$ la largeur du rectangle. $x + 2$ est la longueur du rectangle. L'aire du rectangle ABCD vaut :

$$x(x + 2) = 8$$

**1ère méthode**

On remarque que $x = 2$ est une solution. On sait qu'une telle équation (du second degré) peut avoir deux solutions : on remarque que $x = -4$ est aussi solution mais ne convient pas car les longueurs ne peuvent être négatives. La largeur du rectangle ABCD vaut 2 cm et sa longueur égale 4 cm.

**2ème méthode**

On utilise le tableur de la calculatrice pour trouver les 2 valeurs.

**3ème méthode (méthode de seconde)**

$x(x + 2) = 8x^2 + 2x - 8 = 8$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

$x + 4 = 0x = -4$ ou $x - 2 = 0x = 2$

L'équation admet deux solutions -4 et 2. La première solution est incompatible avec le problème. On retrouve les résultats trouvés précédemment.

**Problème 2**

On veut calculer la longueur CD.

**Solution**

On pose $x = CD$

**Montrons que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.**

**Je sais que** les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (AE).

**Or,** si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

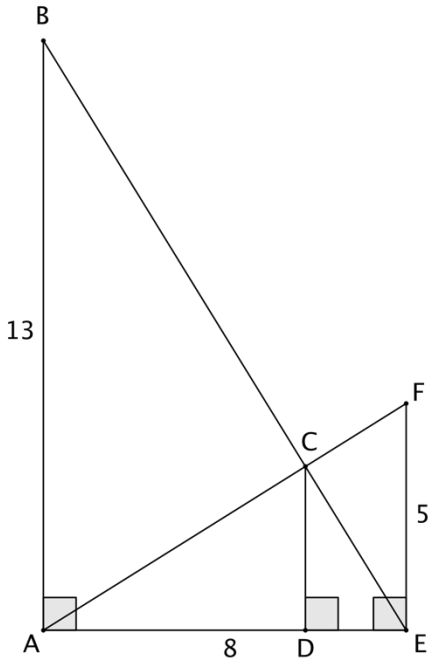
**Donc** les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

**De plus,** les points E, C, B et E, D, A sont alignés.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès

$$\frac{EC}{EB} = \frac{ED}{EA} = \frac{CD}{BA}$$

$$\frac{EC}{EB} = \frac{ED}{8} = \frac{x}{13}$$




**Je sais que** les droites (EF) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (AE).

**Or,** si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

**Donc** les droites (EF) et (CD) sont parallèles.

**De plus,** les points A, D, E et A, C, F sont alignés.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{EF}$$

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{8} = \frac{x}{5}$$

On remarque que

$$\frac{ED}{8} + \frac{AD}{8} = \frac{ED+AD}{8} = \frac{AE}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

On en déduit que

$$\frac{x}{13} + \frac{x}{5} = 1 \frac{x\times5}{13\times5} + \frac{x\times13}{5\times13} = 1 \frac{5x}{65} + \frac{13x}{65} = 1 \frac{18x}{65} = 1x = \frac{65}{18}$$

On déduit que $CD = \frac{65}{18}$

## IV. Inéquations

Une **inéquation** est une inégalité où certains nombres sont désignés par des lettres nommées **inconnues**.

Résoudre une telle inéquation, c'est trouver **tous les nombres** vérifiant l'inégalité.

**Exemple :** en troisième, on étudie uniquement les inéquations du 1er degré à une inconnue, du type :

$$3x + 5 < 2x + 2$$

On distingue deux types d'inégalités :

- Les inégalités strictes (< ou >) ;
- Les inégalités larges ($\leq$ ou $\geq$).

« $x < 2$ » désigne un nombre $x$ **strictement inférieur** à 2.

« $x \geq 2$ » se lit « $x$ est **supérieur ou égal** à 2 ».

Pour résoudre une inéquation, on utilise le même procédé qu'une équation. Dans le cas d'une inéquation du 1er degré à une inconnue, on isole les termes en $x$ d'un côté en utilisant la règle suivante :

**Règle**

Soit a, b et c des nombres réels.

- Si $a < b$ alors $a + c < b + c$.
- Si $a < b$ alors $a - c < b - c$.
- Si $a < b$ et si $c > 0$, alors $a \times c < b \times c$.
- Si $a < b$ et si $c > 0$, alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Si $a < b$ et si $c < 0$, alors $a \times c > b \times c$.
- Si $a < b$ et si $c < 0$, alors $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

**Remarque**

$2 < 3$ mais $2 \times (-3) > 3 \times (-3)$.

**Exemple 1 (rédaction type brevet)**

On veut résoudre l'inéquation $3x + 7 \leq x - 3$.

**Solution**

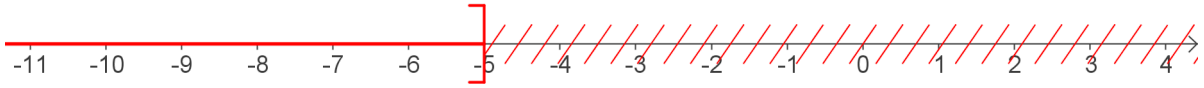
$$3x + 7 - x \leq x - 3 - x$$

$$2x + 7 - 7 \leq -3 - 7 \frac{2x}{2} \leq \frac{-10}{2} x \leq -5$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $-5$.

$$S = ]-\infty; -5]$$

**Représentation graphique**




**Remarque**

$-5$ est solution de l'inéquation : le crochet est donc **tourné vers l'ensemble des solutions** (ici, vers la gauche).

**Exemple 2**

On veut résoudre l'inéquation :

$$-4x+3>5$$

**Solution :**

$$-4x+3-3>5-3-4x>2\frac{-4x}{-4}<\frac{2}{-4}x<-0,5$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à -0,5.

$$S=]-\infty;-0,5[$$

**Représentation graphique**




**Remarque**

$-0,5$ n'est pas solution de l'inéquation donc le crochet est tourné vers **l'extérieur** par rapport aux solutions (ici vers la droite).