

الموضوع الأول

التمرين 1

1- لتكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين بحيث $PGCD(a+b, ab) = p$ حيث p عدد أولي

أ- بين أن p يقسم a^2 لاحظ أن $a^2 = a(a+b) - ab$
 ب- استنتج أن p يقسم a

2- ليكن a و b عددين طبيعيين بحيث $a \leq b$

أ. حل الجملة $\begin{cases} PGCD(a, b) = 5 \\ PPCM(a, b) = 170 \end{cases}$

ب. استنتج حلول الجملة $\begin{cases} PGCD(a+b, ab) = 5 \\ PPCM(a, b) = 170 \end{cases}$

تمرين 2:

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس و المباشر $(o, \vec{u}, \vec{v})$

1- نريد حل في c المعادلة (E) $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$

أ. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المعادلة (E) تكتب

$$(z - 2)(z^2 + az + b) = 0$$

ب. حل (E)

2- لتكن (H) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z تحقق $z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$

أ. نسمي x و y الجزء الحقيقي و التخيلي للاحقة z للنقطة M

بين أن النقطة M تنتمي الى (H) إذا و فقط اذا كان $x^2 - y^2 = 4$

ب. لتكن A ، B و C النقط ذات اللواحق على الترتيب 2 ، $-3-i\sqrt{5}$ و $-3+i\sqrt{5}$. تحقق أن A ، B و C تنتمي الى (H).

3- لتكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{4}$

أ. عين لواحق B ، A' و C' صور A ، B و C على الترتيب بالدوران r

ب. نسمي M' صورة M ذات اللاحقة z بالدوران r . و نسمي z' لاحقة M' . الجزأين الحقيقي و التخيلي لـ z هما x و y و لـ z' هما x' و y' . نسمي (H') مجموعة النقط من المستوي ذات السابقة (H) بالتحويل r .

- عبر عن x و y بدلالة x' و y'

- باستعمال السؤال 2 أ برهن أن 'M' ينتمي الى ('H') إذا وفقط إذا كان $x'y' = -2$
- 4- أنجز شكلا تضع عليه النقط 'A، B، C، A'، B'، C' المنحني ('H') ثم المنحني (H)
- التمرين 3:**
- الجزء الأول

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر:

- النقط $A(0,0,3)$ ، $B(2,0,4)$ ، $C(-1,1,2)$ و $D(1,-4,0)$

- المستويات: (P_1) $7x + 4y - 3z + 9 = 0$ و (P_2) $x - 2y = 0$

- المستقيمت (Δ_1) و (Δ_2) المعرفة بجملة المعادلات الوسيطة على الترتيب

$$\begin{cases} x = 7 + 2t' \\ y = 8 + 4t', t' \in R \\ z = 8 - t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -8 + 2t, t \in R \\ z = -10 + 5t \end{cases}$$

لكل سؤال اقتراح واحد من بين الأربعة صحيحا .

	a	b	c	d
1. المستوي (P_1) هو:	المستوي (ABC)	المستوي (BCD)	المستوي (ACD)	المستوي (ABD)
2. المستقيم (Δ_1) يشمل	النقطة A	النقطة B	النقطة C	النقطة D
3. الوضعية النسبية (P_1) و (Δ_2)	(Δ_2) توازي تماما (P_1)	(Δ_2) محتوي في (P_1)	(Δ_2) يقطع (P_1)	(Δ_2) عمودي على (P_1)
4. الوضعية النسبية (Δ_1) و (Δ_2)	(Δ_1) يوازي تماما (Δ_2)	(Δ_1) و (Δ_2) منطبقان	(Δ_1) و (Δ_2) متقاطعان في نقطة	(Δ_1) و (Δ_2) لا ينتميان لنفس المستوي
5. تقاطع (P_1) و (P_2) هو المستقيم ذو التمثيل الوسيطي:	$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}$

الجزء الثاني

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستقيم (D) يشمل $A(0,0,3)$ و شعاع توجيه له $\vec{u}(1,0,-1)$ و المستقيم (D') يشمل النقطة $B(2,0,4)$ و شعاع توجيه له $\vec{v}(0,1,1)$

الهدف هو أثبات وجود مستقيم وحيد عمودي على كل من (D) و (D') ثم تعينه ثم استخلاص خاصية له.

1. نعتبر نقطة M تنتمي الى (D) و نقطة 'M تنتمي الى (D') معرفتين بـ $\vec{AM} = a\vec{u}$ و $\vec{BM} = b\vec{v}$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

عبر عن احداثيات M و 'M ثم الشعاع $\vec{MM'}$ بدلالة a و b
2. بين أن المستقيم (MM') عمودي على كل من (D) و (D') اذا وفقط اذا كانت الثنائية حلا للجملة

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases}$$

3. حل الجملة . استنتج احداثيات النقط الوحيدة M و 'M و التي نسميها H و 'H بحيث (HH') عمودي على كل من (D) و (D') . بين أن $HH' = \sqrt{3}$ وحدة طول.

4. نعتبر نقطة M كيفية من المستقيم (D) و نقطة 'M كيفية من (D') .
أ. باستعمال الإحداثيات المحصل عليها في السؤال 1 بين أن:

$$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3$$

ب. استنتج أن المسافة MM' تكون أصغر ما يمكن عندما تكون M في H و 'M في 'H
التمرين 4:

ليكن n عدد طبيعي نسمي n عاملي العدد الطبيعي الذي نرمز له بالرمز n! و المعروف بـ $0! = 1$ و $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ من أجل $n \geq 1$

1- أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $n! \geq 2^{n-1}$

ب- باستعمال الآلة الحاسبة أوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $n! \geq 10^7$

2- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

أ. أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

ب. بين أن المتتالية (u_n) مزايده تماما .

ج. بين أن $u_n \leq 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}}$

د. بين أن $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$

و. استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ 3

هـ. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة (لا يطلب حساب النهاية)

3- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ. أحسب v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3

ب. بين أن (v_n) من أجل $n \geq 2$ متتالية متناقصة تماما

إستنتج أن $(u_n)_{n \geq 2}$ و $(v_n)_{n \geq 2}$ متتاليتين متجاورتين.

نسمي L نهايتهما المشتركة
ج. أعط قيمة مقربة الى 10^{-2} لـ L (يمكن استعمال السؤال 1. ب

د. نفرض في هذا السؤال ان L عدد ناطق أي يوجد عددين طبيعيين p و q بحيث $L = \frac{p}{q}$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 فإن $u_n \leq L \leq v_n$ أي

$$u_n \leq \frac{p}{q} \leq v_n \quad \text{و خصوصا} \quad u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q$$

- بين أنه يوجد عدد طبيعي a بحيث $\frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a}{q!} + \frac{1}{q!}$

- بين أن $a < p(q-1)! < a+1$

- استنتج تناقضا. ماذا تستخلص.

التمرين 5:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على N^* بـ:

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

الجزء 1

1- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in N^*$ $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$

2- استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

3- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة

الجزء 2

لتكن الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1- أ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم الحصر $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$

ب. تحقق أن $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n)$

ج. استنتج أنه من أجل كل عدد $n \in N^*$: $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$

2- نعتبر المتتالية (S_n) معرفة على N^* بـ:

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$

ب. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن -1

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \quad \text{لدينا}$$

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)} \quad \text{ج. استنتج المساواة :}$$

د. باستعمال الأسئلة السابقة عين نهاية:

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$$

لما n يؤول الى $+\infty$

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

و. تحقق أنه من اجل $n \geq 1$ لدينا:

3- هـ. عين نهاية المتتالية (u_n)