

I.

1° Soit $\vec{\sigma}_{tige}$ le moment cinétique en O de la tige : $\frac{d\vec{\sigma}_{tige}}{dt} = \vec{OM} \wedge -m\vec{R}$. La tige ayant une masse négligeable, ce moment cinétique est négligeable, donc $\vec{R}$ est parallèle à $\vec{OM}$.

$$\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ r\dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_z = mr^2\dot{\phi}$$

2° Le moment cinétique en O du mobile est

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{OM} \wedge (m\vec{g} + m\vec{R}) = \vec{OM} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\sigma_z}{dt} = 0. \text{ Donc } r^2\dot{\phi} = C$$

3° D'après le théorème du moment cinétique, reste constant au cours du temps.

Dans la suite, nous supposons cette constante non nulle, ce qui interdit à r de s'annuler et à z d'atteindre les valeurs extrêmes a priori possibles, $-a$ et a . Cela implique aussi que $\dot{\phi}$, ne pouvant s'annuler, garde un signe constant, donc que le mobile tourne toujours dans le même sens autour de Oz. L'énoncé ne fait pas cette hypothèse, en

III 2° il suppose $\dot{\phi}_0 \geq 0$, ce qui rend la discussion plus compliquée.

II.

1° $E_c = \frac{1}{2} m(\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$

2° $E_p = mgz$

3° $E_m = E_c + E_p$ reste constant au cours du temps.

4° $E_m = \frac{1}{2} m(\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2} mK \Rightarrow K = \dot{\phi}^2 + \frac{C^2}{r^2} + \dot{z}^2 + 2gz$

5°

$$r^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow 2r\dot{r} + 2z\dot{z} = 0 \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{z^2\dot{z}^2}{r^2}$$

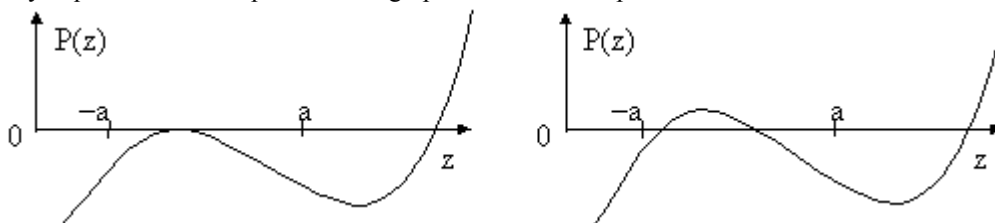
$$K = \frac{z^2\dot{z}^2}{r^2} + \frac{C^2}{r^2} + \dot{z}^2 + 2gz = \frac{a^2\dot{z}^2 + C^2}{a^2 - z^2} + 2gz$$

6° En isolant $a^2\dot{z}^2$, on obtient $a^2\dot{z}^2 = (a^2 - z^2)(K - 2gz) - C^2 = P(z)$

7° Pour déterminer les racines de $P(z) = 0$, cherchons les informations dont nous disposons sur le signe de $P(z)$:

- $P(z)$ de degré 3 a au plus trois zéros
- $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = +\infty$
- $P(a) = -C^2 < 0$
- au cours du mouvement $a^2\dot{z}^2 \geq 0$, donc il existe un domaine de z situé dans $-a < z < a$ pour lequel $P(z) \geq 0$
- $P(-a) = -C^2 < 0$

Il n'y a que deux formes possibles du graphe de $P(z)$ compatibles avec ces faits :



Le graphe de droite est le cas général : $P(z)$ possède trois zéros, deux compris entre $-a$ et a , qu'on appellera z_0 et z_1 , et un supérieur à a , qu'on appellera z_2 . Le graphe de gauche correspond au cas particulier où il y a une racine double ; le mouvement est alors circulaire horizontal.

Il ne faut pas répondre que, puisque $P(z)$ est de degré impair, il a au moins un zéro, car ce zéro est z^2 , alors que dans la suite on considère que c'est z_0 .

III.

1° Si $\dot{z} = 0$, $\ddot{z} = -\frac{z\dot{z}}{r} = 0$, tandis que $r\dot{\phi} \neq 0$: la vitesse, qui est orthoradiale, et la trajectoire sont tangentes à un cercle $z = cste$.

2° $C = r_0^2 \dot{\phi}_0^2$ $K = r_0^2 \dot{\phi}_0^2 + 2gz_0$.

3°

$$\begin{aligned} P(z) &= (a^2 - z^2)(r_0^2 \dot{\phi}_0^2 + 2gz_0 - 2gz) - r_0^4 \dot{\phi}_0^2 = (a^2 - z^2 - r_0^2)r_0^2 \dot{\phi}_0^2 + (a^2 - z^2)(2gz_0 - 2gz) \\ &= (z_0^2 - z^2)r_0^2 \dot{\phi}_0^2 + 2g(a^2 - z^2)(z_0 - z) = (z_0 - z)Q(z) \\ Q(z) &= 2g(a^2 - z^2) + (z + z_0)r_0^2 \dot{\phi}_0^2 \end{aligned}$$

4° Comme $z_0 < a$, $Q(-a) = r_0^2 \dot{\phi}_0^2 (z_0 - a) < 0$; comme $-a < z_0$, $Q(a) = r_0^2 \dot{\phi}_0^2 (z_0 + a) > 0$; $Q(z)$ étant un polynôme du second degré, il a une racine et une seule dans l'intervalle $-a, a$.

5° Comme $a^2 \dot{\phi}_0^2 \geq 0$, le raisonnement de II 7° montre que z reste entre z_0 et z_1 . En $z = z_1$,

$$Q(z_1) = 2g(a^2 - z_1^2) + (z_1 + z_0)r_0^2 \dot{\phi}_0^2 = 0 \Rightarrow \dot{\phi}_0^2 = \frac{-2g(a^2 - z_1^2)}{(z_1 + z_0)(a^2 - z_0^2)} > 0 \Rightarrow z_1 + z_0 < 0$$

6° Factorisons $z_1 - z$ dans $Q(z)$:

$$\begin{aligned} Q(z) &= 2g(a^2 - z^2) + (z + z_0) \frac{-2g(a^2 - z_1^2)}{(z_0 + z_1)} = \frac{2g[(a^2 - z^2)(z_0 + z_1) - (z + z_0)(a^2 - z_1^2)]}{z_0 + z_1} \\ &= \frac{2g[a^2(z_1 - z) - z^2 z_1 - z^2 z_0 + z_1^2 z + z_1^2 z_0]}{z_0 + z_1} = \frac{2g[a^2(z_1 - z) + z z_1(z_1 - z) + z_0(z_1^2 - z^2)]}{z_0 + z_1} \\ &= \frac{2g(z_1 - z)[a^2 + z z_1 + z_0(z + z_1)]}{z_0 + z_1} = 2g(z_1 - z) \left(z + \frac{a^2 + z_0 z_1}{z_0 + z_1} \right) = 2g(z_1 - z)(z - z_2) \end{aligned}$$

$$z_2 = -\frac{a^2 + z_0 z_1}{z_0 + z_1}$$

Autre méthode :

z_1 et z_2 sont les racines de $Q(z) = 2g(a^2 - z^2) + (z + z_0)r_0^2 \dot{\phi}_0^2 = 0$, où d'après 5° $r_0^2 \dot{\phi}_0^2 = \frac{-2g(a^2 - z_1^2)}{(z_1 + z_0)}$; ils sont donc les racines de :

$$Q(z) = 2g(a^2 - z^2) - (z + z_0) \frac{2g(a^2 - z_1^2)}{(z_1 + z_0)} = 0$$

$$z^2 + \frac{a^2 - z_1^2}{z_1 + z_0} z - a^2 + \frac{a^2 - z_1^2}{z_1 + z_0} z_0 = 0$$

En utilisant la somme (on peut aussi utiliser le produit) des racines de cette équation du second degré :

$$z_1 + z_2 = -\frac{a^2 - z_1^2}{z_1 + z_0} \Rightarrow z_2 = -\frac{a^2 + z_1 z_0}{z_1 + z_0}$$

7° Pour que la trajectoire soit circulaire, il faut que $z_1 = z_0$, soit d'après III 5°

$$\dot{\phi}_0^2 = \frac{-2g(a^2 - z_1^2)}{(z_1 + z_0)(a^2 - z_0^2)} = -\frac{g}{z_0} \Rightarrow v_{0C} = \sqrt{\frac{g(z_0^2 - a^2)}{z_0}}$$

Pour que le point atteigne le plan de l'équateur, il faut que $z_1 > 0$; or z_1 est racine de $Q(z) = 0$, $Q(-a) < 0$ et $Q(a) > 0$; donc la condition est :

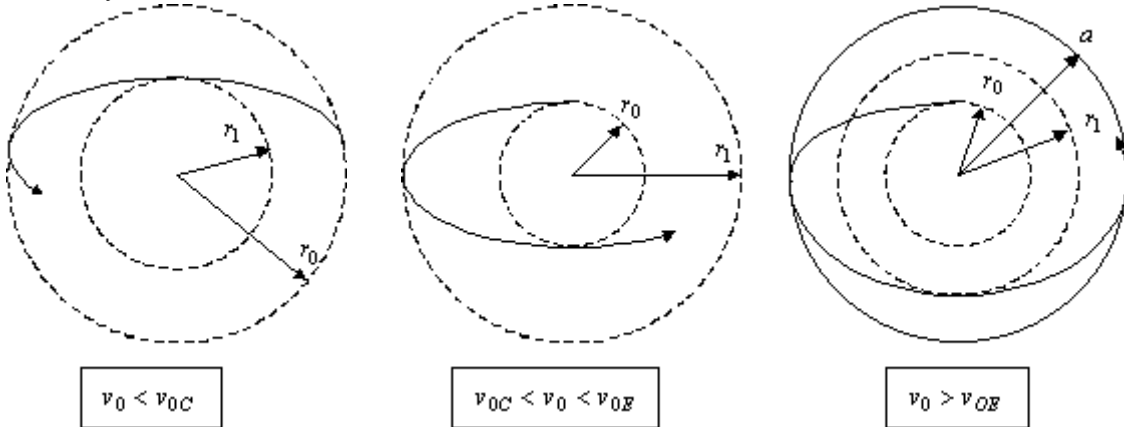
$$Q(0) < 0$$

$$2ga^2 + z_0 r_0^2 \phi_0^2 < 0$$

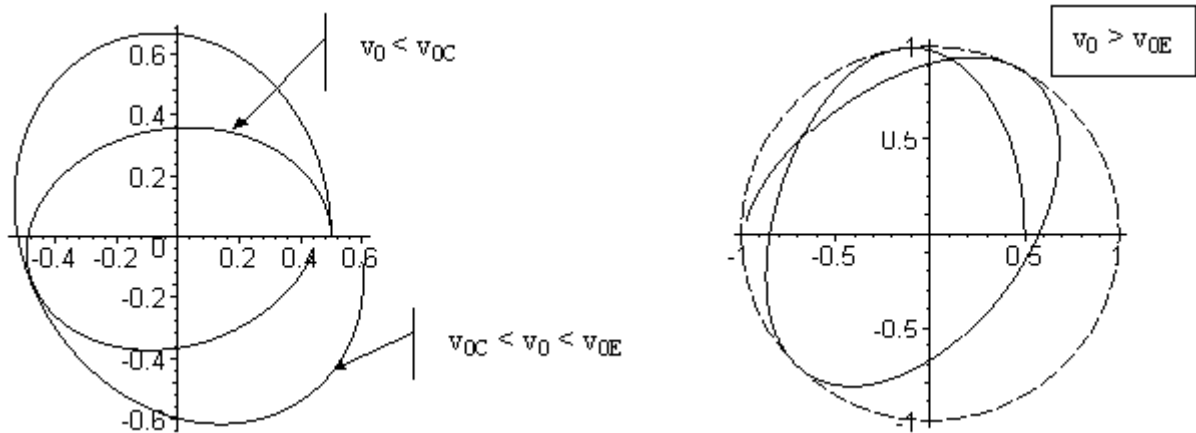
$$v_0^2 = r_0^2 \phi_0^2 > -\frac{2ga^2}{z_0}$$

$$v_0 > v_{OE} = \sqrt{-\frac{2ga^2}{z_0}}$$

8° On peut imaginer la projection de la trajectoire sur le plan horizontal comme formée de parties tangentes aux cercles de rayons les valeurs extrêmes de r , soit r_0 , r_1 et éventuellement a .



Un calcul précis (voir annexe) pour $z_0 = -\sqrt{3}a/2$ donne les courbes suivantes, où les distances sont graduées en unités de r/a :



On voit qu'un feston correspond à plus d'un demi tour et que la trajectoire n'est pas fermée.

IV.

$$a^2 \ddot{\phi}^2 = P(z) \Rightarrow a \frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{P(z)} \quad dt = \pm \frac{adz}{\sqrt{P(z)}}$$

1°

$$r^2 \dot{\phi} = C \quad d\phi = \frac{Cdt}{r^2} = \pm \frac{aCdz}{(a^2 - z^2)\sqrt{P(z)}}$$

2°

$$\frac{T}{2} = \left| \int_{z_0}^{z_1} \frac{adz}{\sqrt{P(z)}} \right| ; \quad \frac{\Phi}{2} = \left| \int_{z_0}^{z_1} \frac{aCdz}{(a^2 - z^2)\sqrt{P(z)}} \right|$$

3°

N.B. Il faut prendre la valeur absolue de l'intégrale, car on ne sait pas si z_0 est inférieur ou supérieur à z_1 .

V.

1°

$$z - z_2 = \frac{a^2 + zz_1 + z_0(z + z_1)}{z_0 + z_1} = \frac{a^2 + (-a + u)(-2a + u_0 + u_1) + (-a + u_0)(-a + u_1)}{-2a + u_0 + u_1}$$

$$= \frac{4a^2 - 2a(u + u_0 + u_1) + O(u^2)}{-2a + u_0 + u_1} = 2a \frac{1 - \frac{u + u_0 + u_1}{2a} + O(u^2)}{1 - \frac{u_0 + u_1}{2a}} \approx 2a(1 - u/2a + O(u^2))$$

$$(z - z_2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2a}}(1 + u/4a + O(u^2))$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad l = \frac{1}{4a\sqrt{2a}}$$

2°

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2 - z^2} = \frac{1}{a^2 - (-a + u)^2} = \frac{1}{2au - u^2} = \frac{1}{2au}(1 - u/2a)^{-1} = \frac{1}{2au}(1 + u/2a + O(u^2))$$

$$m = \frac{1}{2a} \quad n = \frac{1}{4a^2}$$

3°

$$(z_2 - z)^{-1/2} \times r^{-2} = \frac{1}{\sqrt{2a}}(1 + u/4a + O(u^2)) \frac{1}{2au}(1 + u/2a + O(u^2)) = \frac{1 + 3u/4a + O(u^2)}{(2a)^{3/2}u}$$

$$p = \frac{1}{(2a)^{3/2}} \quad q = \frac{3}{2(2a)^{5/2}}$$

4°

$$\frac{T}{2} = \left| \int_{z_0}^{z_1} \frac{adz}{\sqrt{(z_0 - z)2g(z - z_1)(z - z_2)}} \right| = \frac{a}{\sqrt{2g}} \left| \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{du}{\sqrt{(u - u_0)(u_1 - u)}} \frac{1}{\sqrt{2a}}(1 + u/4a + O(u^2)) \right] \right|$$

$$T = \left| \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{u_0}^{u_1} \frac{(1 + u/4a + O(u^2))du}{\sqrt{(u - u_0)(u_1 - u)}} \right|$$

5°

$$C^2 = r_0^4 \oint^2 = (a^2 - z_0^2) \times - \frac{2g(a^2 - z_1^2)}{z_0 + z_1} = \frac{2g(2au_0 - u_0^2)(2au_1 - u_1^2)}{2a - u_0 - u_1} = 4agu_0u_1 \frac{(1 - u_0/2)(1 - u_1/2)}{(1 - u_0/2 - u_1/2)}$$

$$C^2 = 4agu_0u_1 + O(u^4) \quad C = \sqrt{4agu_0u_1}(1 + O(u^2))$$

$$\frac{C}{a^2 - z^2} = \frac{C}{2au - u^2} = \sqrt{\frac{g}{a}} \frac{\sqrt{u_0u_1}}{u} (1 + \frac{u}{2a} + O(u^2))$$

6° L'intégrant de Φ est celui de T multiplié par

$$\Phi = \left| \int_{u_0}^u \frac{\sqrt{u_0u_1}}{u} (1 + \frac{u}{2a} + O(u^2)) \frac{(1 + u/4a + O(u^2))du}{\sqrt{(u - u_0)(u_1 - u)}} \right| = \sqrt{u_0u_1} \left| \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{u} \frac{(1 + 3u/4a + O(u^2))du}{\sqrt{(u - u_0)(u_1 - u)}} \right|$$

VI.

$$I_n = \int_{u_0}^{u_1} \frac{u^n du}{\sqrt{(u - u_0)(u_1 - u)}} \quad I_{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{u_0u_1}}; \quad I_0 = \pi; \quad I_1 = \frac{(u_0 + u_1)\pi}{2}$$

1° Comme :

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}(I_0 + I_1/4a) = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left(1 + \frac{u_0 + u_1}{8a} \right)$$

$$\Phi = \sqrt{u_0u_1}(I_{-1} + 3I_0/4a) = \pi + \frac{3\pi\sqrt{u_0u_1}}{4a}$$

$$\Delta\Phi = \frac{3\pi\sqrt{u_0u_1}}{4a}$$

2°

3° Nature de la trajectoire.

D'après la loi fondamentale de la dynamique, $m\ddot{\vec{R}} + m\vec{g} = m\vec{a}$ ou :

$$m\ddot{x} = mR_x$$

$$m\ddot{y} = mR_y$$

$$m\ddot{z} = mR_z - mg$$

Comme $\ddot{\vec{R}}$ est parallèle au rayon vecteur, $\frac{R_x}{x} = \frac{R_y}{y} = \frac{R_z}{z}$.

En outre, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Pour les petites oscillations, en développant ces équations jusqu'à l'ordre 1 en x, y , on obtient :

$$z \approx -a \quad mR_z \approx mg \quad mR_x \approx -\frac{mgx}{a} \quad mR_y \approx -\frac{mgy}{a}$$

$$\ddot{x} + \frac{gx}{a} = 0 \quad \ddot{y} + \frac{gy}{a} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a}} \quad x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \quad y = Y_m \cos(\omega t + \varphi')$$

A cet ordre, la projection de la trajectoire sur le plan horizontal est une ellipse fixe parcourue avec la période $2\pi\sqrt{a/g}$.

Lente rotation de cette ellipse.

$$\frac{\Delta\Phi}{T} \approx \frac{3}{4} \sqrt{\frac{u_0 u_1 g}{a^3}}$$

Si on pousse les calculs à l'ordre suivant, l'ellipse tourne lentement :

$$u_0 = a - z_0 = a - \sqrt{a^2 - r_0^2} = a - a \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right)^{1/2} \approx a - a \left(1 - \frac{r_0^2}{2a^2}\right) = \frac{r_0^2}{2a}$$

Pour des festons proches du fond de la cuvette

et $u_1 \approx \frac{r_1^2}{2a}$, donc $\frac{\Delta\Phi}{T} \approx \frac{3r_0 r_1 g}{8a^{5/2}}$. Pour réussir de façon convaincante l'expérience du pendule de Foucault, il faudrait que ce terme soit petit devant $\omega \sin \lambda = 11^\circ/h$.

4° Si $r_1 \rightarrow 0$, on remarque que $\Delta\Phi \rightarrow 0$ et surtout que $T \rightarrow \pi \sqrt{\frac{a}{g} \left(1 + \frac{u_0}{8a}\right)}$. Or

$$u_0 = a - z_0 = a - \sqrt{a^2 - r_0^2} = a - a \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right)^{1/2} \approx a - a \left(1 - \frac{r_0^2}{2a^2}\right) = \frac{r_0^2}{2a} \quad T \approx \pi \sqrt{\frac{a}{g} \left(1 + \frac{r_0^2}{16a^2}\right)}$$

. On retrouve la

$$T' \approx 2\pi \sqrt{\frac{a}{g} \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16}\right)}$$

formule de Borda car $r_0/a = \sin \theta_m$ est voisin de l'amplitude angulaire θ_m du pendule et une période du pendule correspond à deux festons : $T' = 2T$.

Annexe 1 : tracé numérique des trajectoires.

Pour calculer numériquement les projections sur l'horizontale des trajectoires, il est malaisé d'utiliser les équations différentielles de l'énoncé, car elles comportent des racines carrées. Il est préférable d'opérer comme suit.

$$r^2 \dot{\phi} = r_0 v_0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{r_0 v_0}{a^2 - z^2} = \dot{\phi}_0 \frac{a^2 - z_0^2}{a^2 - z^2}$$

Exprimons la conservation du moment cinétique :

En utilisant $r^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow r\dot{z} + z\dot{r} = 0$, exprimons le carré de la vitesse :

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = \frac{z^2 \dot{z}^2}{r^2} + \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \dot{z}^2 = \frac{a^2 \dot{z}^2 + r_0^2 v_0^2}{a^2 - z^2}$$

Exprimons la conservation de l'énergie, ce qui donne le résultat de II 6° :

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0 = \frac{1}{2} m \frac{a^2 \dot{z}^2 + r_0^2 v_0^2}{a^2 - z^2} + m g z$$

$$a^2 \dot{z}^2 = (v_0^2 + 2 g z_0 - 2 g z)(a^2 - z^2) - r_0^2 v_0^2$$

Dérivons par rapport au temps et éliminons la solution parasite $\dot{z} = 0$:

$$2 a^2 \dot{z} \ddot{z} = -2(v_0^2 + 2 g z_0) z \dot{z} - 2 g a^2 \dot{z} + 6 g z^2 \dot{z}$$

$$a^2 \ddot{z} = -(v_0^2 + 2 g z_0) z - g a^2 + 3 g z^2$$

$$v_0^2 = (a^2 - z_0^2) \dot{\phi}_0^2$$

D'où le système différentiel en $\phi(t), z(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{z} = \frac{g(3z^2 - 2z_0 z - a^2) - (a^2 - z_0^2) \dot{\phi}_0^2 z}{a^2} \\ \dot{\phi} = \dot{\phi}_0 \frac{a^2 - z_0^2}{a^2 - z^2} \end{cases}$$

qu'on résout numériquement et dont on trace les courbes en coordonnées polaires $\sqrt{a^2 - z^2}, \phi$, soit en langage maple :

```
> a:=1:g:=1:
```

```
graphe:=proc(z0,derphi0,duree,couleur)
```

```
local K,eq1,eq2,ci,sol,phi,z:
```

```
global a,g:
```

```
eq1:=diff(z(t),t,t)=g*((3*z(t)^2-2*z(t)*z0)/a^2-1)-(1-z0^2/a^2)*derphi0^2*z(t);
```

```
eq2:=diff(phi(t),t)=derphi0*(a^2-z0^2)/(a^2-z(t)^2);
```

```
ci:=z(0)=z0,D(z)(0)=0,phi(0)=0;
```

```
sol:=dsolve({eq1,eq2,ci},{z(t),phi(t)},numeric);
```

```
plots[odeplot](sol,[sqrt(a^2-z(t)^2)*cos(phi(t)),sqrt(a^2-z(t)^2)*sin(phi(t))],0..duree,numpoints=200,color=couleur);
```

```
end:
```

```
>
```

```
zi:=-evalf(sqrt(3)/2):derphi0C:=sqrt(-g/zi);derphi0E:=sqrt(-2*g*a^2/zi/(a^2-zi^2));
```

```
> liste:=[0.7,0.85,1,1.2,1.4]:
```

```
couleurgraphe:=proc(i);
```

```
if i<3 then green elif i=3 then blue else red fi
```

```
end:
```

```
>
```

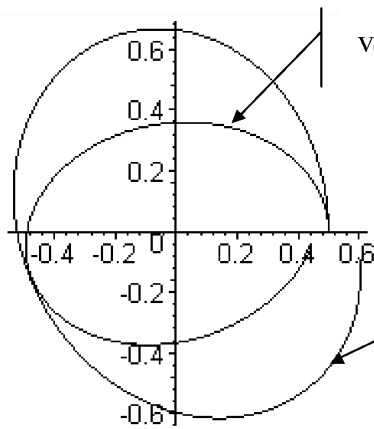
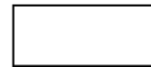
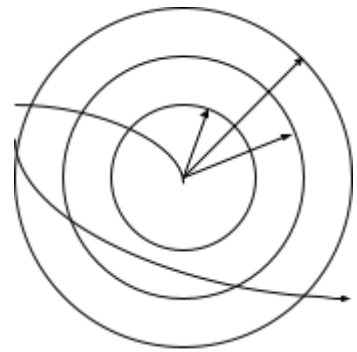
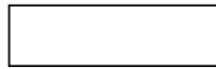
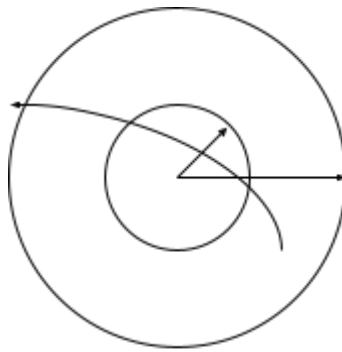
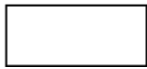
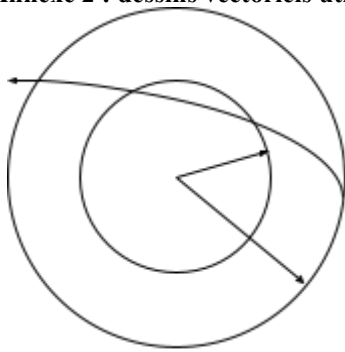
```
plots[display]({seq(graphe(zi,derphi0C*liste[i],5.7,couleurgraphe(i)),i=1..5)},scaling=constrained);
```

```
>
```

```
plots[display]({seq(graphe(zi,derphi0E*liste[i],5,couleurgraphe(i))
```

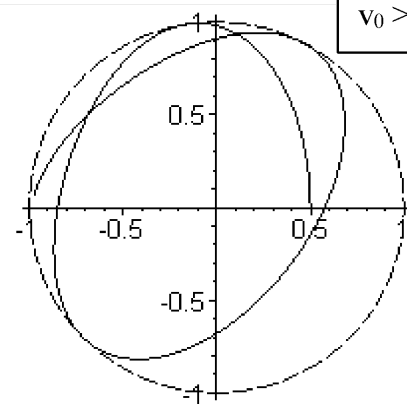
```
),i=1..5),plots[polarplot](1,color=black,linestyle=3)},scaling=constrained);  
>  
plots[display]({graphe(zi,derphi0C*0.7,5.7,black),graphe(zi,derphi0C*1.4,5.7,black)},scaling=constrained);  
>  
plots[display]({graphe(zi,derphi0E*1.4,5.7,black),plots[polarplot](1,color=black,linestyle=3)},scaling=constrained);  
>
```

Annexe 2 : dessins vectoriels utilisés.



$v_0 < v_{0C}$

$v_{0C} < v_0 < v_{0E}$



$v_0 > v_{0E}$

