



# ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΠ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

## Απόσπασμα

Οι εκφωνήσεις των θεμάτων που έχουν αναρτηθεί στην Τράπεζα Θεμάτων με ημερομηνία ανάρτησης και με την ύλη στην οποία αναφέρονται

Γιάννης Ζαμπέλης - Μαθηματικός  
johnzabelis@gmail.com

## Περιεχόμενα

<b>ΘΕΜΑ 2 (15002)</b> Ανάρτηση 05/02/22	2
<b>ΘΕΜΑ 2 (15073)</b> Ανάρτηση 05/02/22	2
<b>ΘΕΜΑ 2 (15186)</b> Ανάρτηση 05/02/22	2
<b>ΘΕΜΑ 4 (15029)</b> Ανάρτηση 05/02/22	3
<b>ΘΕΜΑ 4 (15275)</b> Ανάρτηση 06/02/22	3
<b>ΘΕΜΑ 4 (15273)</b> Ανάρτηση 06/02/22	4
<b>ΘΕΜΑ 2 (15038)</b> Ανάρτηση 04/02/22	4
<b>ΘΕΜΑ 4 (15030)</b> Ανάρτηση 05/02/22	4
<b>ΘΕΜΑ 4 (14985)</b> Ανάρτηση 04/02/22	5
<b>ΘΕΜΑ 4 (15253)</b> Ανάρτηση 06/02/22	5
<b>ΘΕΜΑ 4 (15081)</b> Ανάρτηση 05/02/22	6

**ΘΕΜΑ 2 (15002) Ανάρτηση 05/02/22**

[1.3 Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα – 1.4 Συντεταγμένες στο Επίπεδο]

Δίνονται τα σημεία  $A(0,5)$  και  $\Delta(4,5)$  και τα διανύσματα  $\vec{AB} = (3,-3)$  και  $\vec{AD} = (3,1)$

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο  $\Gamma$  έχει συντεταγμένες  $\Gamma(3,6)$

(Μονάδες 11)

β)  $\vec{AB} \parallel \vec{AD}$

(Μονάδες 14)

**ΘΕΜΑ 2 (15073) Ανάρτηση 05/02/22**

[1.3 Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα – 1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο – 1.5 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων]

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1,2)$  και  $\vec{\beta} = (2,3)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

(Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 2 (15186) Ανάρτηση 05/02/22**

[1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο – 1.5 Εσωτερικό Γινόμενο]

Δίνονται τα σημεία  $A(2,1), B(6,3), \Delta(1,-2)$  και  $\Gamma(9,2)$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο  $M$  του τμήματος  $AB$  έχει συντεταγμένες  $(4,2)$  και το μέσο  $N$  του τμήματος  $\Gamma\Delta$  έχει συντεταγμένες  $(5,0)$

(Μονάδες 8)

β)  $\vec{MN} = (1,-2)$  και  $\vec{\Delta\Gamma} = (8,4)$

γ)  $\overline{MN} \perp \overline{\Delta\Gamma}$

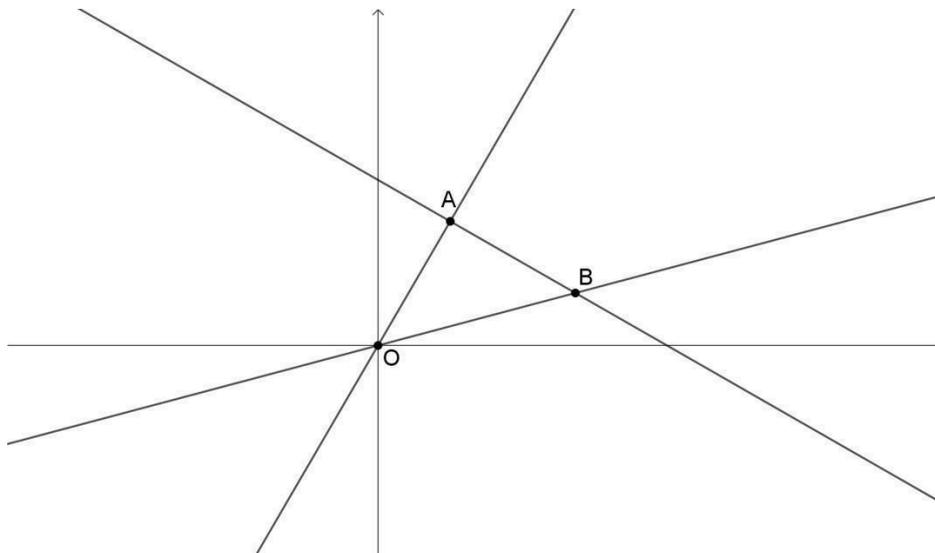
(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 4 (15029) Ανάρτηση 05/02/22**

[1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο - 2.1 Εξίσωση Ευθείας]

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία  $O(0,0), A(1,\sqrt{3}), B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$ .



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία  $\omega$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία  $\varphi$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με  $\hat{A} = 90^\circ$ .

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι  $\varepsilon\varphi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ .

(Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 4 (15275) Ανάρτηση 06/02/22**

[1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο - 2.1 Εξίσωση Ευθείας]

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς θεωρούμε σημείο  $M(2,1)$ .

- α) Μία ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:
- την εξίσωση της. (Μονάδες 2)
  - για ποιες τιμές του  $\lambda$  η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. (Μονάδες 5)
- β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες  $x'$  και  $y'$  στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.
- Να βρείτε, με τη βοήθεια του  $\lambda$ , τα μήκη των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ. (Μονάδες 6)
  - Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 6)
  - Να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται (Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 4 (15273) Ανάρτηση 06/02/22**

[1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο - 2.1 Εξίσωση Ευθείας - 2.3. Εμβαδόν Τριγώνου]

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία Α(3,4), Β(2,5) και Γ(-2,2) και το μεταβλητό σημείο  $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1), \alpha \in \mathbb{R}$ .

- Να αποδείξετε ότι τα Α,Β,Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 5)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.. (Μονάδες 5)
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ. (Μονάδες 7)
- Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει  $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$ . Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά; (Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 2 (15038) Ανάρτηση 04/02/22**

1.5 Εσωτερικό Γινόμενο]

Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  τέτοια ώστε  $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$  και  $\left(\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}, \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}\right) = \frac{\pi}{3}$ .

- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  (Μονάδες 11)
- Να βρείτε τα  $\vec{\alpha}^2$  και  $\vec{\beta}^2$

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι:  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 5$

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 4 (15030) Ανάρτηση 05/02/22**

[2.1 Εξίσωση Ευθείας - 2.3 Εμβαδόν Τριγώνου - 3.1 Ο Κύκλος]

Δίνεται ο κύκλος  $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$  και η ευθεία  $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία ( $\varepsilon$ ) δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουνε δυο ευθείες  $(\eta_1), (\eta_2)$  που είναι παράλληλες στην ευθεία ( $\varepsilon$ ) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των ευθειών  $(\eta_1), (\eta_2)$

(Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 4 (14985) Ανάρτηση 04/02/22**

[2.1. Εξίσωση Ευθείας - 2.3 Εμβαδόν Τριγώνου - 3.; Ο Κύκλος]

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + (4-2k)x - 2(1+k)y + 5 - 2k = 0$  (I)  $\in (-\infty, +\infty)$

α) Να αποδείξετε η (I) παριστάνει κύκλο με κέντρο  $M(k-2, k+1)$  και ακτίνα  $k\sqrt{2}$  για κάθε  $k > 0$

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε  $k > 0$

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon): y = -x - 1$  είναι εφαπτόμενη του παραπάνω κύκλου για κάθε  $k > 0$

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 4 (15253) Ανάρτηση 06/02/22***[2.2. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας]*

Δίνεται η εξίσωση  $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$  (1) όπου  $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu$  η (1) παριστάνει ευθεία  $\varepsilon$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu$  οι ευθείες  $\varepsilon$ :

i. είναι παράλληλες στον  $x'x$

(Μονάδες 4)

ii. είναι παράλληλες στον  $y'y$

(Μονάδες 4)

iii. διέρχονται από το  $(0,0)$

(Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες  $\varepsilon$  που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 4 (15081) Ανάρτηση 05/02/22***[3.1 Κύκλος]*

Δίνεται οι κύκλοι  $C_1 : x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$  και  $C_2 : x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  έχουν κέντρα  $K(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$  και ακτίνες  $\rho_1 = 1, \rho_2 = 3$  αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

β) i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δυο αυτές εφαπτόμενες.

(Μονάδες 7)