



REPUBLIKA E SHQIPËRISË

MINISTRIA E ARSIMIT DHE SPORTIT

DREJTORIA E PËRGJITHSHME E ARSIMIT PARAUNIVERSITAR
DREJTORIA RAJONALE E ARSIMIT PARAUNIVERSITAR Durrës
ZYRA VENDORE ARSIMORE KAMËZ

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

KL XII

PERGJIGJET

1. Transformojmë shprehjen e dhënë si vijon

$$\begin{aligned}A &= (n^2 + 5n)(n^2 + 5n + 10) + 24 \\&= (n^2 + 5n)(n^2 + 5n) + 10(n^2 + 5n) + 24 \\&= (n^2 + 5n)^2 + 2 \cdot 5 \cdot (n^2 + 5n) + 25 - 1 \\&= (n^2 + 5n + 5)^2 - 1 \\&= (n^2 + 5n + 5 - 1)(n^2 + 5n + 5 + 1) \\&= (n^2 + 5n + 4)(n^2 + 5n + 6) \\&= (n + 1)(n + 4)(n + 2)(n + 3) \\&= (n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)\end{aligned}$$

2. Te zgjidhet sistemi $\{2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512 \log \log \sqrt{xy} = \log 2 + 1\}$ e rishkruajme ne formen

$$\{2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2^9 \log \log \sqrt{xy} = \log 20$$

Nga ekuacioni (1) marrim $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$

Nga ekuacioni (2) marrim $\sqrt{xy} = 20$

Formojme systemin e ri $\{\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \sqrt{xy} = 20$ ne te cilin duke ngritur ne katror tedy anet e secilit ekuacion si dhe duke bere zevendesimet e ndryshoreve marrim ekuacionin :

$$x^2 - 41x + 400 = 0$$

te cilin pasi ta zgjidhim do te marrim

$x_1 = 16$ prej nga del $y_1 = 25$

$x_2 = 25$ prej nga del $y_2 = 16$

3.

Nga $\triangle ABC$ dhe $\triangle ACD$ sipas teoremës së kosinuset, rrjedh se

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \angle(BAC)$$

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 - 2|AC| \cdot |CD| \cdot \cos \angle(ACD)$$

prej nga rrjedh se

$$2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \angle(BAC) = |AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2 \quad (1)$$

$$2|AC| \cdot |CD| \cdot \cos \angle(ACD) = |CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2 \quad (2)$$

Meqë $\angle(BAC) = \angle(ACD)$ (si kënde ndërrueses), Pse ?

Atehere : $\cos \angle(BAC) = \cos \angle(ACD)$.

Duke pasur parasysh këte barazim, duke pjesëtuar anë për anë barazimin (1) me (2).

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2}{|CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2} \quad (*)$$

Ngjashëm, nga $\triangle ABD$ dhe $\triangle BCD$ sipas teoremës së kosinuset, rrjedh se

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB| \cdot |BD| \cdot \cos \angle(ABD)$$

$$|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 - 2|BD| \cdot |CD| \cdot \cos \angle(BDC)$$

prej nga rrjedh se

$$2|AB| \cdot |BD| \cdot \cos \angle(ABD) = |AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2 \quad (3)$$

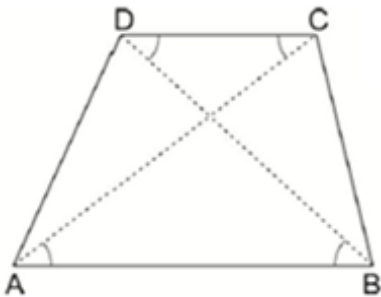
$$2|BD| \cdot |CD| \cdot \cos \angle(BDC) = |CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2 \quad (4)$$

Meqë $\angle(ABD) = \angle(BDC)$ (si kënde ndërrueses), Pse ? Atehere : $\cos \angle(ABD) = \cos \angle(BDC)$.

Duke pasur parasysh këte barazim, duke pjesëtuar anë për anë barazimin (3) me (4).

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2}{|CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2} \quad (**)$$

Barazimet (*) dhe (**) janë pikërisht barazimet e kërkuara.



4. Polinomi $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + a$ kalon nga pika me koordinata $(2; 0)$ dhe plotepjestohet me $(x - 1)$.

- Po te zevendesojme $x=2$ ne $P(x)$ gjejme

$$\begin{aligned} P(2) &= 0 && \text{ose} \\ 2^4 + 2^3 - 7 \cdot 2^2 - 2 + a &= 0 \end{aligned}$$

Nga ku gjeme $a = 6$

Pra $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

- Per te gjetur te gjitha zgjidhjet e $P(x) = 0$ shohim se kemi gjetur deri tani rrenjet

$x_1=2$ Pse ? dhe $x_2=1$ meqe $P(x)$ plotepjestohet me $(x-1)$

- Mund te provohet fare lehte qe edhe numri $x_3 = -1$ eshte nje rrenje
- Provoni qe rrenje per $P(x) = 0$ eshte edhe numri $x_4 = -3$

Prate gjitha rrenjet e ekuacionit $P(x) = 0$ jane :

$$x_1=2 \quad x_2=1 \quad x_3=-1 \quad x_4=-3$$

5.

- Vijën e parë $y^2 = 4 - x^2$ ($y > 0$) e rishkruajme :

$$x^2 + y^2 = 4$$

e cilaparaqet rrethin me qendër në $O(0;0)$ dhe rreze 2

- Vija e dytë $y = |x|$
është e përbërë nga dy gjysëmdrejtëza $y=x$ dhe $y=-x$
që janë përgjysmoret e kuadrateve të I dhe të II ne planin koordinativ

- Figura e formuar nga nderpreja e tre vijave

$$x^2 + y^2 = 4 \quad y=x \quad \text{dhe} \quad y=-x$$

ka suprine sa $\frac{1}{4}$ e suprines se rrethit me rreze 2 Pse ?

Arsyeto si del ky perfundim ?

- Pra nga llogaritjet del $S = \pi$

6. Që të ketë kuptim $C_{n,k}$ duhet që $k \leq n$,

$$\text{pra } x^2 + 2 \leq 3x$$

Nese e zgjidhim kete inekuacion te fuqise se dyte
do te marrin intervalin e zgjidhjes : $1 \leq x \leq 2$

Meqënëse k dhe $n \in \mathbb{N}$ rrjedh që $x \in \mathbb{N}$. Pse ?

Atehere ne mosbarazimin $1 \leq x \leq 2$ marrim si zgjidhje vetem

$$x=1, \text{ ose } x=2$$

$$\begin{array}{l} \text{Atehere: nese } \boxed{x=1} \text{ del } n=3x=3*1=3 \text{ pra } \boxed{n=3} \\ k= x^2 + 2 = 1+2=3 \text{ pra } \boxed{k=3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{nese } \boxed{x=2} \text{ del } n=3x=3*2=6 \text{ pra } \boxed{n=6} \\ k= x^2 + 2 = 4+2=6 \text{ pra } \boxed{k=6} \end{array}$$

Pra çiftet $(n;k)$ janë: $(3;3)$ dhe $(6;6)$. Vlera e $C_{n,k}=1$.