**Практическая работа №1.
Методы оценки погрешностей**

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: развитие навыков нахождения предельных абсолютных и предельных относительных погрешностей.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ:

Пример 1. Определить какое равенство точнее $\frac{9}{11}=0,818$ или $\sqrt{18}=4,24$

Решение:

1. Находим значение данных выражений с большим числом десятичных знаков:

$$a_1 = \frac{9}{11} = 0,81818... \quad a_2 = 4,2426...$$

2. Затем вычисляем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\Delta a_1 = |0,81818 - 0,818| \leq 0,00019 \quad \Delta a_2 = |4,2426 - 4,24| \leq 0,0027$$

3. Предельные относительные погрешности составляют

$$\delta_{a_1} = \frac{\Delta a_1}{a_1} = \frac{0,00019}{0,818} = 0,00024 = 0,024\% \quad \delta_{a_2} = \frac{\Delta a_2}{a_2} = \frac{0,0027}{4,24} = 0,00064 = 0,064\%$$

4. Так как $\delta_{a_1} < \delta_{a_2}$, то равенство $\frac{9}{11}=0,818$ является более точным

Пример 2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки:

А) в узком смысле $72,353(\pm 0,026)$;

В) в широком смысле $2,3544$, если $\delta=0,2\%$.

Решение:

А) Пусть $72,353(\pm 0,026) = a$. Согласно условию, предельная абсолютная погрешность $\Delta a = 0,026$. В узком смысле это необходимо сравнить с $0,05$ (т.к. после запятой только один нуль). Сравнивая, получаем: $0,026 < 0,05$. Это означает, что в числе $72,353$ верными в узком смысле являются цифры $7,2,3$. По правилам округления найдем

приближенное значение числа $72,353$, сохранив десятые доли и обозначим за $a_1 = 72,4$

$$\text{Далее находим } \Delta^{окр} \text{ (округленное): } \Delta^{окр} = |a_1 - a| = |72,4 - 72,353| = 0,047$$

Затем определяем предельную абсолютную погрешность числа a_1

$$\Delta a_1 = \Delta a + \Delta^{окр} = 0,026 + 0,047 = 0,073$$

Полученная погрешность больше $0,05$; значит, нужно уменьшить число цифр в приближенном в числе до двух:

$$a_2 = 72; \quad \Delta^{окр} = |a_2 - a| = |72 - 72,353| = 0,353;$$

$$\Delta a_2 = \Delta a + \Delta^{окр} = 0,026 + 0,353 = 0,379.$$

Полученное число $(0,379)$ сравниваем с $0,5$ (т.к. после запятой нет нулей).

Получаем, что $\Delta a_2 < 0,05$ откуда следует, что обе оставшиеся цифры верны в узком смысле.

Б) Пусть $a = 2,3544$; $\delta_a = 0,2\%$; тогда $\alpha_a = a * \delta_a = 2,3544 * 0,002 = 0,00471$

По определению погрешности

$$\alpha_a = 0,00471 < 1.$$

$$\alpha_a = 0,00471 < 0,1.$$

$$\alpha_a = 0,00471 > 0,01. \text{ Но } \alpha_a = 0,00471 > 0,001.$$

Это означает, что верными в широком смысле являются три цифры (2, 3, 5). По правилам округления найдем приближенное значение числа, сохранив десятичные доли.
 $a_1 \approx 2,35$; $\alpha_a = 0,0044 + 0,00471 = 0,00911 < 0,01$
 Значит, и в округленном числе 2,35 все три цифры верны в широком смысле.

Пример 3. Вычислить и определить погрешности результата

$$X = \frac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}, \text{ где } m=28,3(\pm 0,02), n=7,45(\pm 0,01), k=0,678(\pm 0,003)$$

Решение: для начала необходимо определить m^2 , n^3 и $\sqrt{k}$. Получаем:

$$m^2 = (28,3)^2 = 800,9; \quad n^3 = (7,45)^3 = 413,5; \quad \sqrt{k} = 1,8234;$$

$$\text{Далее определяем } X \text{ без учета абсолютных погрешностей: } X = \frac{800,9 * 413,5}{1,8234} = 402,200$$

Теперь определяем предельные относительные погрешности для m , n и k :

$$\delta^m = 0,02/28,3 = 0,00071; \quad \delta^n = 0,01/7,45 = 0,00134; \quad \delta^k = 0,003/0,678 = 0,00442$$

Получив эти данные, определим погрешность результата:

$$\delta^x = 2 \delta^m + 3 \delta^n + 0,5 \delta^k, \text{ где } 2 \delta^m \text{ т.к. по условию дано } m^2, \quad 3 \delta^n \text{ т.к. по условию дано } n^3, \quad 0,5 \delta^k \text{ т.к. по условию дано } k^{1/2}$$

$$\text{Таким образом, } \delta^x = 2 \delta^m + 3 \delta^n + 0,5 \delta^k = 2 * 0,00071 + 3 * 0,00135 + 0,5 * 0,00442 = 0,00142 + 0,00405 + 0,00222 = 0,00769 = 0,77\%$$

В заключении определим предельную абсолютную погрешность результата:

$$\Delta^x = X * \delta^x = 402,200 * 0,0077 = 3,096994.$$

$$\text{Ответ: } X = 402,200(\pm 3,097); \quad \delta^x = 0,77\%$$

Пример 4. Вычислить и определить погрешности результата:

$$N = \frac{(n-1) * (m+n)}{(m-n)^2}, \text{ где } n=3,0567(\pm 0,0001), m=5,72(\pm 0,02)$$

Решение:

Для начала находим

$$n-1 = 2,0567(\pm 0,0001) \quad (2,0567 \text{ получается из } 3,0567-1),$$

$$m+n = 5,72(\pm 0,02) + 3,0567(\pm 0,0001) = 8,7767(\pm 0,0201),$$

$$m-n = 5,72(\pm 0,02) - 3,0567(\pm 0,0001) = 2,6633(\pm 0,0201) \quad (\text{погрешности складываются})$$

Далее определяем N без учета абсолютных погрешностей:

$$N = \frac{2,0567 * 8,7767}{2,6633^2} = \frac{2,0567 * 8,7767}{7,0932} = 2,545 \approx 2,55;$$

Теперь определим предельные относительные погрешности для $(n-1)$, $(m+n)$ и $(m-n)^2$.

$$\delta^{(n-1)} = 0,0001/2,0567 = 0,000049;$$

$$\delta^{(m+n)} = 1,0201/8,7767 = 0,0023;$$

$$\delta^{(m-n)^2} = 0,0201/2,6633 = 0,0075, \text{ откуда определим погрешность результата:}$$

$$\delta^N = \delta^{(n-1)} + \delta^{(m+n)} + 2\delta^{(m-n)^2}, \text{ здесь } 2\delta^{(m-n)^2} \text{ т.к. по условию дано } (m-n)^2$$

$$\delta^N = \delta^{(n-1)} + \delta^{(m+n)} + 2\delta^{(m-n)^2} = 0,000049 + 0,0023 + 2*0,0075 = 0,0173 = 1,74\%$$

В заключении определим предельную абсолютную погрешность результата:

$$\Delta^N = N * \delta^N = 2,55 * 0,0173 = 0,044$$

Ответ: $N \approx 2,55(\pm 0,044)$; $\delta^N = 1,74\%$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ:

Задание 1. Определить какое равенство точнее.

1 вариант. $\frac{19}{41} = 0,463$ и $\sqrt{44} = 6,63$;

2 вариант. $\frac{4}{17} = 0,235$ и $\sqrt{10,5} = 3,24$;

3 вариант. $\frac{6}{7} = 0,857$ и $\sqrt{4,8} = 2,19$.

Задание 2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки:

1 вариант. а) в узком смысле $23,543(\pm 0,016)$

б) в широком смысле $2,8546$; $\delta = 0,3\%$.

2 вариант. а) в узком смысле $5,436(\pm 0,0028)$

б) в широком смысле $7,521$; $\delta = 0,12\%$.

3 вариант. а) в узком смысле $2,45431(\pm 0,0003)$

б) в широком смысле $4,571$; $\delta = 0,16\%$.

Задание 3. Вычислить и определить погрешности результата

1 вариант.

а) $X = \frac{\sqrt{a} * b}{c}$, $a = 228,6(\pm 0,06)$, $b = 86,4(\pm 0,02)$, $c = 68,7(\pm 0,5)$.

б) $X = \frac{m * (a + b)}{c - d}$, $m = 4,22(\pm 0,004)$, $a = 13,5(\pm 0,02)$, $b = 3,7(\pm 0,02)$, $c = 34,5(\pm 0,02)$, $d = 23,725(\pm 0,005)$.

2 вариант.

а) $X = \frac{\sqrt{a} * b}{c}$, $a = 3,845(\pm 0,04)$, $b = 16,2(\pm 0,05)$, $c = 10,8(\pm 0,1)$.

б) $X = \frac{(a + b) * m}{(c - d)^2}$, $a = 2,754(\pm 0,001)$, $b = 11,7(\pm 0,04)$, $m = 0,56(\pm 0,005)$, $c = 10,536(\pm 0,002)$, $d = 6,32(\pm 0,008)$.

3 вариант.

$$\text{a) } X = \frac{a^2 * b}{c}, \quad a=3,456(\pm 0,002), b=0,642(\pm 0,0005), c=7,12(\pm 0,004).$$

$$\text{Б) } X = \frac{(a+b)*m}{\sqrt{c-d}}, \quad a=23,16(\pm 0,02), \quad b=8,23(\pm 0,005), \quad c=145,5(\pm 0,08), \quad d=28,6(\pm 0,1), \\ m=0,28(\pm 0,006).$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Что называется абсолютной и относительной погрешностью приближенного числа?
2. Что называется значащей цифрой числа?
3. Что называется верными знаками числа?
4. Сформулировать правила оценки предельных погрешностей при выполнении операций над приближенными числами.