

Electricité-Optique-Mécanique

(OPTION T et TA)

Durée : 4 heures

Premier problème : ELECTROMAGNETISME

Il s'agit d'étudier dans ce problème la propagation transversale d'une onde hertzienne dans la haute atmosphère. Cette onde électromagnétique sera monochromatique, plane et polarisée rectilignement.

On rappelle les notations et valeurs numériques suivantes :

- pulsation de l'onde : ω
- vecteur d'onde : $\vec{k}$
- célérité des ondes dans le vide : $c_0 = 3.10^8$ mètres par seconde
- longueur d'onde dans le vide : $\lambda_0 = \frac{2\pi \cdot c_0}{\omega}$
- perméabilité magnétique du vide : $\epsilon_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Henry par mètre
- permittivité absolue du vide ϵ_0 telle que : $\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c_0^2 = 1$
- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb
- masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kilogramme
- masse du proton : $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kilogramme

On rappelle également la relation : $\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

Dans tout le problème, l'action du champ de pesanteur terrestre sera négligée.

I - Equations générales de l'onde

1°) Ecrire les équations de Maxwell dans un milieu linéaire, homogène et isotrope de permittivité absolue $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ et de perméabilité μ_0 en l'absence de toutes charges électriques libres et de toute densité de courant. Pour ce faire, il suffit d'écrire ces équations comme dans le vide en remplaçant simplement ϵ_0 par ϵ .

2°) Montrer simplement que le champ électrique vérifie une relation vectorielle, dite équation de propagation.

3°) Traduire cette équation lorsque le champ électrique est sinusoïdal et ne dépend que de la coordonnée x et du temps t . En déduire que la relation entre k et ω , appelée relation de dispersion, est :

$$k^2 = \frac{\epsilon_r \omega^2}{c_0^2}$$

4°) Ecrire alors les expressions vectorielles du champ électrique $\vec{E}$ et de l'induction magnétique $\vec{B}$ en fonction de t et de x. Donner également l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de ω , c_0 et ϵ_r .
On choisira pour cela un trièdre orthonormé (0,x,y,z) tel que $\vec{k}$ soit porté par (0,x), $\vec{E}$ par (0,y) et $\vec{B}$ par (0,z) et on notera E_0 l'amplitude du champ électrique.

Dans toute la suite, les équations précédentes seront supposées vérifiées même si la permittivité relative du milieu ϵ_r dépend de la pulsation ω (milieu dispersif).

II - Densité de polarisation du plasma

Dans le vide, une particule de charge q et de masse M, animée de la vitesse v non relativiste ($v \ll c_0$), est soumise à l'action d'une onde plane, monochromatique, polarisée rectilignement comme dans la première partie.

1°) Donner l'expression de la force de Lorentz qui s'exerce sur elle par l'action du champ électrique $\vec{E}$ et de l'induction magnétique $\vec{B}$.

Montrer que l'un de ces deux termes est négligeable.

Dans la suite de cette deuxième partie, on supposera les différentes particules (électrons et protons) soumises au seul champ électrique.

Dans un plasma, milieu ionisé, il existe des molécules neutres, des électrons libres et des ions positifs. Globalement, le milieu est neutre électriquement et est suffisamment "dilué" pour pouvoir négliger les interactions entre les différentes particules.

L'onde plane précédente se propage dans un tel milieu.

2°) Donner l'équation différentielle du mouvement d'une particule de masse M et de charge q soumise à cette onde. Résoudre cette équation en donnant l'amplitude S_0 des oscillations forcées qu'elle subit en fonction de l'amplitude E_0 du champ électrique, de q, de M et de la pulsation ω .

3°) Calculer numériquement les amplitudes des mouvements d'un électron et d'un proton pour un champ électrique d'amplitude $E_0 = 0,2$ Volt par mètre et une longueur d'onde $\lambda_0 = 30$ mètres.

Le plasma peut être considéré comme constitué uniquement de ces protons et électrons qui oscillent : il y a N électrons et N protons par unité de volume.

Soient $\vec{s}_e$ et $\vec{s}_p$ les vecteurs déplacement correspondant à ces deux types de charges.

On appelle polarisation du milieu le vecteur : $\vec{P} = N \cdot e \cdot (\vec{s}_p - \vec{s}_e)$.

4°) Sachant que la précision relative des calculs est de 10^{-2} , discuter l'ordre de grandeur de ce vecteur $\vec{P}$ et montrer que seul le mouvement des électrons intervient : on peut donc considérer dans toute la suite que les ions positifs sont fixes.

III - Pulsation limite du plasma

Dans le milieu étudié précédemment se propage donc une onde électromagnétique plane, monochromatique, polarisée suivant (0,y). Le vecteur polarisation défini dans la deuxième partie peut alors s'exprimer de manière générale en fonction du champ électrique par la relation : $\vec{P} = \epsilon_0(1 - \epsilon_r) \cdot \vec{E}$.

1°) A partir des résultats précédents, donner l'expression de la permittivité relative ϵ_r en fonction de N, ω , m et ϵ_0 puis en fonction de N, e, λ_0 , m et μ_0 ,

Calculer numériquement ϵ_r pour $N = 6,1 \cdot 10^{11}$ électrons par mètre cube et $\lambda_0 = 30$ mètres.

2°) Reprendre l'équation de dispersion trouvée au I-3°. Montrer qu'elle peut alors s'écrire sous la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c_0^2}$$

Donner l'expression de ω_p en fonction de N, e, m et ϵ_0 .

On appelle cette pulsation la pulsation propre du plasma.

3°) Quelle condition doit remplir ω pour qu'il y ait effectivement propagation de l'onde ? Calculer la pulsation limite assurant la propagation pour $N = 6,1 \cdot 10^{11}$ électrons par mètre cube.

IV - Influence du champ magnétique terrestre

L'existence du champ magnétique terrestre complique un peu le phénomène de propagation étudié précédemment.

1°) Etudier très brièvement le mouvement d'une particule de charge q, de masse M, animée d'une vitesse constante $\vec{v}$ dans un champ magnétique uniforme et permanent de vecteur induction $\vec{B}_0$. Déterminer la vitesse angulaire de rotation ω_c de la particule en fonction de q, M et B_0 .

2°) Calculer numériquement la valeur de l'induction magnétique B_0 pour que la pulsation ω_c d'un électron soit $\omega_c = 10^7$ radians par seconde.

L'onde plane étudiée se propage dans le plasma où règne cette induction magnétique B_0 .

3°) La théorie sur le mouvement des charges faite dans la partie II est-elle modifiée lorsque les directions de $\vec{E}$ et $\vec{B}_0$ sont parallèles ou perpendiculaires ?

Dans le cas où cette théorie est modifiée, on montre que la relation de dispersion s'écrit alors :

$$k^2 \cdot c_o^2 = \frac{(w^2 - w_p^2)^2 - w_c^2 \cdot w^2}{w^2 - w_p^2 - w_c^2}.$$

Les pulsations ω_p et ω_c étant celles déterminées précédemment.

4°) Tracer l'allure de la fonction $k^2 \cdot c_o^2(w^2)$ pour les valeurs numériques suivantes :

$\omega_c = 0,82 \cdot 10^7$ radians par seconde et $\omega_p = 4,14 \cdot 10^7$ radians par seconde.

5°) En déduire les valeurs des pulsations des ondes qui peuvent réellement se propager dans le milieu.

V - Calcul de l'altitude de la couche de plasma

Lorsque $k = 0$, les ondes issues de la Terre, émises verticalement suivant $(0,x)$, se réfléchissent totalement sur la couche de plasma située en haute atmosphère.

On constate que lorsque l'émission de l'onde est telle que la direction du champ électrique est parallèle à celle de l'induction magnétique terrestre $\vec{B}_0$, il y a écho (donc réflexion) pour une longueur d'onde émise $\lambda_0 = 42,70$ mètres. Au contraire, lorsque les directions du champ électrique de l'onde et de $\vec{B}_0$ sont perpendiculaires, l'écho se produit pour une longueur d'onde $\lambda_0 = 38,90$ mètres.

1°) Déduire de ces deux mesures le nombre N d'électrons par mètre cube de ce plasma ainsi que la valeur de l'induction magnétique B_0 qui y règne. Les calculs devront être effectués avec précision pour obtenir des résultats satisfaisants.

L'induction magnétique terrestre décroît en fonction de l'altitude suivant la loi :

$$B_o(x) = B_o(0) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Sa valeur au sol est $B_o(0) = 4700 \cdot 10^{-8}$ Tesla et le rayon de la terre est $R = 6360$ kilomètres.

2°) Calculer l'altitude de la couche réfléchissante de plasma. Quel peut être l'intérêt de cette propriété ?

Deuxième problème : MECANIQUE

ETUDE D'UN APPAREIL ELECTROMECHANIQUE VIBRANT

Dans l'entrefer d'un aimant annulaire, où règne une induction magnétique radiale $\vec{B}$ de module constant, se déplace longitudinalement une bobine mobile comportant une longueur de fil l .

Du point de vue électrique, cette bobine est équivalente à une inductance L_0 en série avec une résistance R_0 .

Cette bobine est solidaire d'une membrane ramenée en position centrale par une suspension assimilable à un ressort sans masse de raideur k avec un frottement mécanique fluide de coefficient f_0 . L'ensemble mobile (bobine et membrane) a une masse m .

Le rayonnement des ondes acoustiques par la membrane se modélise par une force de frottement fluide de coefficient f_1 . (En appelant v la vitesse de la membrane, l'ensemble des forces de frottement est assimilable à une force de module $(f_0 + f_1) \cdot v$).

I - Etude Générale

Un générateur de force électromotrice $e(t)$, de résistance interne r , alimente la bobine. Une force extérieure axiale $\vec{F}(t)$, orientée suivant l'axe $x'x$ est appliquée à la membrane. On appelle $i(t)$ l'intensité du courant qui circule dans la bobine. (Voir les figures pour l'orientation des différentes grandeurs).

1°) Calculer la force électromagnétique subie par la bobine. Préciser sa direction et son sens. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de la bobine.

2°) Calculer la force électromotrice induite aux bornes de la bobine se déplaçant à la vitesse v suivant $x'x$. Déterminer l'équation différentielle régissant l'intensité du courant qui circule dans la bobine.

3°) A partir des deux équations précédentes, écrire le système d'équations différentielles en utilisant pour seules variables l'intensité $i(t)$ et la vitesse $v(t)$.

II - Etude en Emetteur

La force électromotrice du générateur $e(t)$ est $e(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t)$. La force mécanique extérieure $\vec{F}(t)$ est nulle.

1°) Montrer qu'il existe un régime permanent pour lequel $i(t)$ et $v(t)$ sont sinusoïdaux de pulsation ω . Soient alors $\underline{I}$ et $\underline{V}$ les amplitudes complexes des représentations complexes de $i(t)$ et $v(t)$.

2°) Eliminer $\underline{V}$ entre les deux équations et en déduire la relation entre E_0 et $\underline{I}$. Montrer que cette relation peut se mettre sous la forme $E_0 = (R + jL\omega)\underline{I}$, avec $L = L_0 + L_1$ et $R = R_0 + r + R_1$.

Déterminer les expressions de L_1 et de R_1 en fonction de ω et des paramètres électriques et mécaniques du système.

On pose :
$$A = \frac{B^2 l^2}{f_0 + f_1} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{k - m\omega^2}{(f_0 + f_1)\omega}$$

Exprimer R_1 et $(L_1\omega)$ en fonction de A et α .

3°) Etudier les variations de R_1 avec ω . Montrer que R_1 présente un maximum pour une valeur ω_0 de ω .

Déterminer ω_0 et $R_1(L_1\omega)$. Tracer la représentation graphique de R_1 en fonction de ω .

4°) Etudier les variations de l'impédance $(L_1\omega)$ en fonction de ω . Montrer que $(L_1\omega)$ s'annule pour une valeur ω'_0 de ω , et passe par deux extremums pour les valeurs ω_1 et ω_2 . Tracer la représentation graphique de $(L_1\omega)$ en fonction de ω .

5°) Eliminer α entre les deux relations de R_1 et $(L_1\omega)$. En déduire le lieu du point de coordonnées $(R_1, L_1\omega)$ dans le plan ayant R_1 comme abscisse et $L_1\omega$ comme ordonnée. Placer sur ce lieu les points représentatifs pour $\omega = \omega_0, \omega'_0, \omega_1, \omega_2$, et $\omega \rightarrow \infty$.

6°) Etudier, à partir des résultats des questions 3 et 4 les variations de R et de $(L\omega)$ en fonction de ω . Tracer sur un même graphe leur représentation graphique en fonction de ω . En déduire l'allure de la représentation graphique du module de l'impédance complexe $\underline{Z} = R + jL\omega$.

7°) Applications numériques

La bobine comporte 50 spires de fil de 0,1 mètre de circonférence.

$$\begin{array}{llll} B = 2 \text{ Teslas.} & R_0 = 4 \text{ ohms} & r = 0. & L_0 = 0,4 \text{ milliHenry.} \\ f_1 = 28 \text{ Newtons.secondes par mètre.} & & f_2 = 0 & \\ m = 20 \text{ grammes.} & & k = 5 \cdot 10^3 \text{ Newtons par mètre.} & \end{array}$$

Calculer $\omega_0, \omega'_0, \omega_1, \omega_2$, et A . Evaluer le module de $\underline{Z}$ à 10% près pour les 4 pulsations calculées ainsi que pour $\omega = 10 \omega_0$.

III - Etude en Récepteur

Le générateur est remplacé par une résistance pure de valeur r . La force extérieure est

$$\vec{F}(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \text{ étant le vecteur unitaire de l'axe } x'x$$

1°) Montrer qu'il existe un régime permanent pour lequel $i(t)$ et $v(t)$ sont sinusoïdaux de pulsation ω .

2°) Eliminer I entre les deux équations et en déduire la relation entre F_0 et V . Par analogie avec la partie II on pose $F_0 = Z_m V$ où Z_m est l'impédance mécanique du système.

On appelle Z^{m_0} l'impédance mécanique obtenue pour $B = 0$. Montrer que Z_m se déduit de Z^{m_0} par l'introduction de deux facteurs supplémentaires :

- un coefficient de frottement f_2
- une raideur k_2

Donner les expressions de f_2 et k_2 .

3°) Etudier les variations de f_2 en fonction de ω . Tracer sa représentation graphique.

4°) Etudier les variations de (k_2/ω) en fonction de ω . Introduire une pulsation ω_3 caractérisant ces variations. Tracer sa représentation graphique.

5°) Par analogie avec la question II 2°), on pose $D = \frac{B^2 I^2}{R_0 + r}$.

Proposer une expression β fonction de ω permettant d'exprimer simplement f_2 et (k_2/ω) en fonction de D et β .

Eliminer β entre ces deux expressions et en déduire le lieu géométrique du point de coordonnées $(f_2, k_2/\omega)$ dans le plan ayant f_2 en abscisse et k_2/ω en ordonnée.

6°) Avec les valeurs numériques du II 7°), calculer ω_3 ainsi que les valeurs caractéristiques de f_2 et de k_2/ω . En déduire l'allure de la représentation graphique du module de Z_m en fonction de ω .

