

ENSI 93 - Epreuve commune Physique 1 - 4 heures

Partie I : thermodynamique

I.1

a) Pour n moles de gaz parfait, $dU = nC_v dT$, $dH = d(U + PV) = nC_p dT$ et $PV = nRT$; donc $dH = n(C_v + R)dT$ soit $C_p - C_v = R$ (relation de Mayer, qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer).

b) Les deux relations $C_p = C_v + R$ et $C_p/C_v = \gamma$ permettent d'exprimer C_p et C_v :
 $C_v = R/(\gamma - 1)$ et $C_p = \gamma R/(\gamma - 1)$

b) Le rapport γ étant constant, la relation $dU = C_v dT = nRdT/(\gamma - 1)$ s'intègre en :
 $U = nRT/(\gamma - 1) - U_0$

I.2

a) $dU = TdS - PdV$ donc $dS = dU/T + (P/T)dV$

b) $PV = nRT$ donc $T = PV/nR$; d'autre part, $dU = nRdT/(\gamma - 1) = d(PV)/(\gamma - 1)$. En reportant dans l'expression de dS on obtient une expression ne dépendant que de P et V :

$$dS = nR \left[\frac{d(PV)}{(\gamma - 1)PV} + \frac{dV}{V} \right] = \frac{nR}{(\gamma - 1)} \left(\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} \right) = \frac{nR}{(\gamma - 1)} d \ln(PV^\gamma)$$

$$dS = nR/(\gamma - 1) d \ln(PV^\gamma)$$

c) Par intégration entre l'état de référence (P_0, V_0, S_0) et l'état (P, V, S) on obtient la relation :

$$S - S_0 = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{PV^\gamma}{P_0 V_0^\gamma}$$

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma \exp \frac{(\gamma - 1)(S - S_0)}{nR}$$

d) La relation précédente s'écrit :
 donc l'entropie S constante le second membre, qui est une fonction croissante de S car γ est supérieur à 1, est une constante. La relation demandée (loi de Laplace) est donc vérifiée.

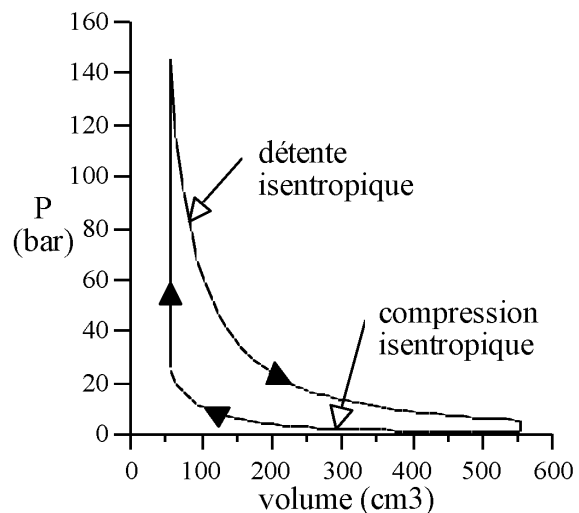
I.3

a) La compression de $V_0 \rightarrow V_1$ et la détente de $V_1 \rightarrow V_0$ sont adiabatiques et réversibles donc isentropiques.

b) La combustion est instantanée donc isochore, et non réversible. D'après le second principe lors de cette phase $dS > 0$ car $Q_c > 0$, donc le produit PV^γ et par conséquent P augmentent : $P_2 > P_1$.

c) Enfin après l'ouverture de la soupape de l'échappement la transformation est isochore.

d) On en déduit l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron : deux isentropiques et deux isochores. Le sens de parcours (sens des aiguilles d'une montre) correspond bien à un cycle moteur.



b) h La compression est isentropique (car adiabatique et réversible) donc d'après I.2.d : $P_1 V_1^\gamma = P_0 V_0^\gamma$ soit $P_1 = P_0 (V_0/V_1)^\gamma = P_0 \rho^\gamma$. D'autre part $T_1/T_0 = (P_1 V_1)/(P_0 V_0)$ d'après la relation $PV = nRT$; en utilisant l'expression précédente de P_1 on en déduit $T_1 = T_0 \rho^{(\gamma-1)}$.

h En procédant de même pour la détente isentropique $(P_2, V_1, T_2) \rightarrow (P_3, V_0, T_3)$, on obtient $P_3 V_0^\gamma = P_2 V_1^\gamma$ soit $P_3 = P_2 (V_1/V_0)^\gamma = P_0 \rho^{-\gamma}$, et $T_3 = T_2 \rho^{(1-\gamma)}$.

$$P_1 = P_0 \rho^\gamma ; T_1 = T_0 \rho^{(\gamma-1)} ; P_3 = P_0 \rho^{-\gamma} ; T_3 = T_2 \rho^{(1-\gamma)}.$$

c) h La quantité de chaleur Q_c est fournie au gaz à volume constant, il s'agit d'une transformation isochore au cours de laquelle la température passe de T_1 à T_2 . D'après le premier principe, $\Delta U = n C_v \Delta T = nR/(\gamma-1) (T_2 - T_1) = Q_c$, car C_v capacité calorifique molaire à volume constant est constante. Par conséquent l'expression de T_2 est :

$$T_2 = T_1 + (\gamma-1) Q_c/nR$$

d) h Au cours du cycle le fluide échange du travail avec l'extérieur lors de la compression et de la détente isentropiques, tandis que les échanges de chaleur ont lieu lors des deux transformations isochores.

h L'expression du premier principe appliqué au cycle est : $0 = \Delta U = W + Q_c + Q_{\tilde{c}}$, où W désigne le travail total reçu par le fluide, Q_c la chaleur reçue par le gaz lors de la combustion et $Q_{\tilde{c}}$ la chaleur échangée lors du refroidissement isochore du gaz à l'ouverture de la soupape d'échappement ($Q_{\tilde{c}} < 0$ car le gaz cède de la chaleur). Le travail utile fourni par le fluide vaut $-W$, il est égal au travail moteur du gaz durant la détente diminué du travail qu'il est nécessaire de lui fournir lors de la compression. La quantité de chaleur Q_c n'est pas récupérable par le moteur et n'intervient donc pas directement dans le bilan.

h Le rendement η est alors égal à $-W/Q_c$, soit en tenant compte de l'expression du premier principe $\eta = (Q_c + Q_{\tilde{c}}) / Q_c = 1 + Q_{\tilde{c}} / Q_c = 1 - |Q_{\tilde{c}}| / Q_c$.

h La chaleur $Q_{\tilde{c}}$ est échangée lors de la transformation isochore $(P_0, V_0, T_3) \rightarrow (P_0, V_0, T_0)$ donc $Q_{\tilde{c}} = n C_v (T_0 - T_3)$. On exprime T_3 en fonction de T_0 en utilisant les expressions de T_3 et T_1 en fonction de T_2 , T_0 , ρ et γ (I.3.b) et celle de T_2 en fonction de T_1 et Q_c (I.3.c) : $T_3 = T_2 \rho^{(1-\gamma)} = (T_1 + (\gamma-1) Q_c/nR) \rho^{(1-\gamma)} = T_0 + (\gamma-1) Q_c \rho^{(1-\gamma)} / nR$. En reportant dans l'expression de $Q_{\tilde{c}}$ on trouve finalement $Q_{\tilde{c}} = - Q_c \rho^{(1-\gamma)}$, soit :

$$\eta = 1 - \rho^{(1-\gamma)}$$

I.4

a) h $P_1 = P_0 \rho^\gamma$; $T_1 = T_0 \rho^{(\gamma-1)}$; $P_0 = 10^5$ Pa ; $T_0 = 50^\circ\text{C} = 323$ K ; $\rho = 10$; $\gamma = 7/5$:

$$T_1 = 811 \text{ K} = 538^\circ\text{C} ; P_1 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 25 \text{ bar}$$

b) h $\eta = 1 - \rho^{(1-\gamma)}$ donc $\eta = 0,602$.

h Calcul du nombre de moles de gaz admis dans le cylindre : $n = P_0 V_0 / R T_0$

$V_0 - V_1 = 500 \text{ cm}^3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, $V_0/V_1 = 10$, donc $V_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $P_0 = 10^5$ Pa, $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, $T_0 = 323$ K, soit $n = 2,07 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

$Q_c = 2,07 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \times 80 \text{ kJ.mol}^{-1} = 1656 \text{ J}$

donc le travail fourni au piston par le gaz au cours d'un cycle vaut $W = \eta Q_c = 996 \text{ J}$

c) h Un cycle correspond à deux tours : en partant du point mort haut le premier tour comprend les étapes admission et compression, le second tour les étapes détente et échappement. Le moteur effectue

par conséquent $2400 \text{ cycles} \cdot \text{min}^{-1}$ soit $40 \text{ cycles} \cdot \text{s}^{-1}$, en fournissant un travail de 996 J par cycle. Sa puissance est donc

$$P = 996 \text{ J} \times 40 \text{ s}^{-1} = 39,86 \text{ kW}$$

I.5

a) Le rapport a/V^2 est la **pression interne** qui a pour origine les interactions attractives entre les molécules du gaz. $a \equiv \text{Pa} \cdot (\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1})^2 \equiv \text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$ (l'équation est donnée pour une mole de gaz, V correspond par conséquent au volume molaire).

Le coefficient b est le **covolume**, qui correspond au volume propre des molécules qui ne sont pas rigoureusement ponctuelles. b s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

Pour n moles de gaz occupant le volume V , le volume molaire vaut V/n . Il suffit donc de remplacer V par V/n dans l'équation initiale pour obtenir

$$(P - a \cdot n^2 / V^2) \cdot (V/n - b) = RT \text{ ou encore } (P - a \cdot n^2 / V^2) \cdot (V - nb) = nRT$$

Il s'agit de reprendre la démonstration classique des relations de Clapeyron :

pour une transformation réversible impliquant une mole de gaz,
 $\delta Q_{rev} = C_v dT + l dV$ et $\delta W_{rev} = -P dV$.

D'après le premier principe, l'énergie interne est une fonction d'état. L'application du théorème de Schwartz à la différentielle exacte $dU = \delta Q_{rev} + \delta W_{rev} = C_v dT + (l - P) dV$ conduit à la

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

relation (1)

D'après le second principe, l'entropie est une fonction d'état. L'application du théorème de Schwartz à la différentielle exacte $dS = \delta Q_{rev} / T = (C_v/T) dT + (l/T) dV$ conduit à la relation (2)

$$\left(\frac{\partial C_v / T}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial l / T}{\partial T} \right)_V, \text{ soit } \left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - l / T$$

Par comparaison de ces deux relations on obtient $l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$, puis en remplaçant l par son

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V$$

expression dans (1)

La différentiation de l'équation de Van der Waals à volume constant donne :

$$(V - nb) \frac{dP}{dT} = nR, \text{ donc } \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = nR / (V - nb), \text{ qui ne dépend pas explicitement de la}$$

température. Par conséquent la deuxième seconde par rapport à T est nulle, de même que $\left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T$:

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = 0$$

Corrigé ENSI 93 Physique 1

c) h Pour n moles de gaz, $dS = \delta Q_{rev}/T = (nC_v/T) dT + (l/T) dV$. D'après la question précédente, pour le gaz de Van der Waals $l = nRT/(V-nb)$, donc $dS = n(C_v/T dT + R/(V-nb) dV)$.

h Le long d'une isentropique, $dS = n(C_v/T dT + R/(V-nb) dV) = 0$, d'où l'équation différentielle $dT/T = -(R/C_v) \cdot dV/(V-nb)$. R , C_v , n et b étant des constantes, l'intégration entre l'état (T, V) et un état de référence (T_0, V_0) situé sur la même isentropique donne :

$$\ln(T/T_0) = -(R/C_v) \ln\left(\frac{V-nb}{V_0-nb}\right), \text{ soit } T(V-nb)^{R/C_v} = \text{cste} \text{ le long d'une isentropique.}$$

d) h Compte tenu de l'expression de l , $dU = nC_v dT + (l-P) dV$ s'écrit : $dU = nC_v dT + (nRT/(V-nb) - P) dV$. En exprimant P en fonction de T et V à partir de l'équation de Van der Waals : $P = nRT/(V-nb) - a n^2/V^2$, on obtient la relation :

$$dU = nC_v dT + a n^2/V^2 dV$$

h Les coefficients C_v , a et n étant constants, l'intégration entre l'état de référence (T_0, V_0, U_0) et l'état (T, V, U) conduit à l'expression de U :

$$U - U_0 = nC_v (T - T_0) + a n^2 (V_0^{-1} - V^{-1})$$

e) La démarche est identique à celle de la question I.3.

h Pour la compression isentropique la nouvelle relation entre T_0, V_0, T_1 et V_1 s'écrit d'après I.5.c) :

$$T_0(V_0 - nb)^{R/C_v} = T_1(V_1 - nb)^{R/C_v} \quad \text{soit} \quad T_1/T_0 = \left(\frac{V_0 - nb}{V_1 - nb}\right)^{R/C_v}$$

$$T_3/T_2 = \left(\frac{V_1 - nb}{V_0 - nb}\right)^{R/C_v}$$

h De même pour la détente isentropique on a . Ces relations sont identiques à celles obtenues pour le gaz parfait en remplaçant les volumes V_0 et V_1 par $V_0 - nb$ et $V_1 - nb$, R/C_v étant égal à $\gamma - 1$ si la valeur de C_v est inchangée.

h Pour les deux transformations isochores, les relations entre les températures et les chaleurs échangées sont identiques à celles valables pour un gaz parfait, puisque d'après I.5.d) $\Delta U = Q_c = nC_v \Delta T$ pour une transformation isochore ($V_0 = V$). Donc en utilisant les mêmes notations qu'en I.3 $T_2 = T_1 + Q_c/C_v$ et $Q_{oc} = C_v (T_0 - T_3)$.

h Le rendement est toujours égal à $1 + Q_{oc}/Q_c$. On trouve donc à partir des résultats précédents une expression similaire à celle obtenue pour le gaz parfait :

$$\eta_w = 1 - \left(\frac{V_1 - nb}{V_0 - nb}\right)^{R/C_v} = 1 - \left(\frac{\rho^{-1} - bn/V_0}{1 - bn/V_0}\right)^{R/C_v}$$

f) h Pour calculer n il faut en toute rigueur résoudre l'équation de Van der Waals $(P\hat{V} - an^2/V^2)(V-nb) = nRT$. Cependant les termes an^2/V^2 et nb constituant de petites corrections, n peut-être approximé par $n = PV/RT$ à condition de vérifier $P \gg an^2/V^2$ et $V \gg nb$.

h La valeur approchée de n a été calculée en considérant l'état initial ($P_0 = 10^5$ Pa, $V = 5/9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $T_0 = 323$ K) en I.4 : $n = 2.07 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

Corrigé ENSI 93 Physique 1

On vérifie alors que $an^2/V_0^2 = 1,89 \text{ Pa} \ll P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et $nb = 7,96 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \ll V_0 = 5,55 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ (la résolution numérique donne $n = 2,0707 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ contre $2,0698 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ pour la valeur approchée).

h La capacité calorifique molaire C_v est celle du gaz parfait d'où $C_v = R/(\gamma-1)$ et $R/C_v = \gamma-1$.

$$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0 - nb}{V_1 - nb} \right)^{R/C_v} = T_0 \left(\frac{1 - nb/V_0}{\rho^{-1} - nb/V_0} \right)^{\gamma-1}$$

D'après I.5.e) . On trouve $T_1 = 815,6 \text{ K} = 542,1^\circ \text{C}$. En reportant cette valeur dans l'équation de Van der Waals écrite pour l'état (P_1, V_1, T_1) on obtient $P_1 = 25,4 \text{ bar}$.

h Le calcul de η_w à partir du résultat de I.5.e) donne $\eta_w = 0,604$.

Les résultats obtenus sont sensiblement égaux aux résultats obtenus dans l'approximation du gaz parfait, l'écart sur le rendement étant de 0,3%. Ceci s'explique par le caractère correctif des coefficients a et b (le terme nb/V_0 vaut $1,437 \cdot 10^{-3}$).

Partie II : Mécanique

II.1

a) h On applique le théorème de la résultante cinétique au piston de masse m_1 , en translation rectiligne d'accélération $\mathbf{a}_1$, soumis à son poids (négligé d'après l'hypothèse) et aux forces $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{R}$:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}$$

b) h Le piston est en translation selon Oy donc $\mathbf{a}_1 = a_1 \mathbf{e}_y$ et la vitesse de glissement du piston par rapport au cylindre est colinéaire à Oy. Le mouvement s'effectuant sans frottement, la composante de $\mathbf{R}$ colinéaire à la vitesse de glissement donc à $\mathbf{e}_y$ est nulle. Enfin d'après l'hypothèse $\mathbf{F} = -F \mathbf{e}_y$. Par conséquent la projection du théorème de la résultante cinétique sur Oy s'écrit : $m_1 a_1 y = F_1 y - F$, soit

$$F_1 y = F + m_1 a_1 y$$

II.2

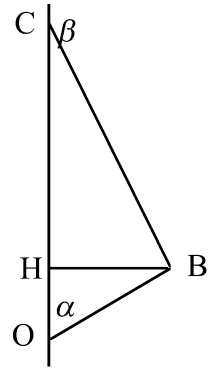
a) h D'après le schéma la distance HB s'exprime selon : $HB = \lambda d |\sin \beta| = d/2 |\sin \alpha|$

L'orientation des angles α et β étant opposée, on en déduit en valeur algébrique

$$\sin \alpha = -2\lambda \sin \beta$$

b) h La position de C est totalement déterminée par y_c , ($x_c = 0$). En valeur algébrique $y_c = \overline{OC} = \overline{OH} + \overline{HC} = (d/2) \cos \alpha + \lambda d \cos \beta$

$$y_c = d \left(\frac{\cos \alpha}{2} + \lambda \cos \beta \right)$$



c) h Compte tenu de l'hypothèse $\lambda \gg 1$, la relation $\sin \beta = -\sin \alpha / (2\lambda)$ peut être réécrite : $\beta \approx \sin \beta \approx -\sin \alpha / (2\lambda)$, d'autre part $\cos \beta \approx 1$ au premier ordre (pour λ grand, la bielle reste très voisine de la position verticale).

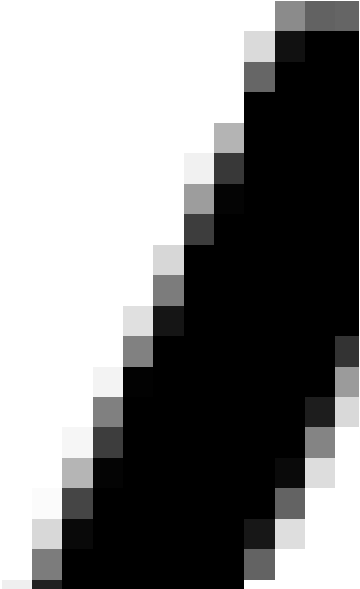
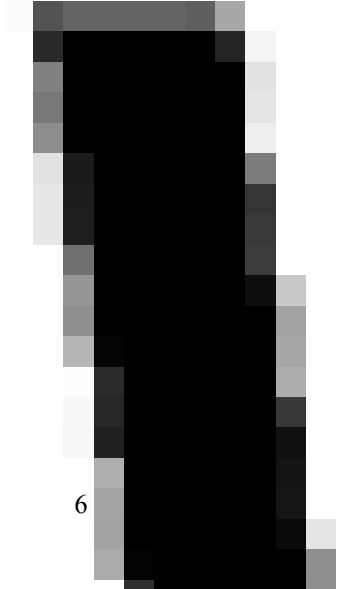
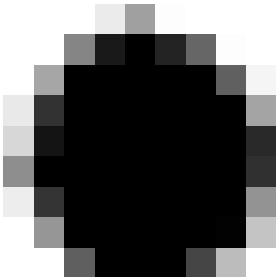
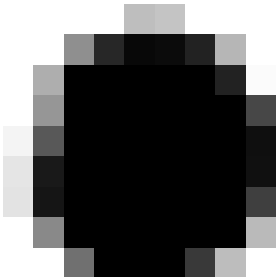
L'expression de y_c se simplifie en $y_c \approx d/2 \cos \alpha + \lambda d$.

En dérivant on trouve successivement : $v_{1y} = -d/2 \dot{\alpha} \sin \alpha = -d/2 \omega \sin \alpha$, puis

$a_{1y} = -d/2 (\sin \alpha d\omega/dt + \cos \alpha \omega^2)$. En régime permanent $d\omega/dt = 0$, l'accélération vaut finalement

$$a_{1y} = -d\omega^2/2 \cos \alpha$$

Pour ceux qui ne sont pas convaincus, il est possible de dériver l'expression exacte de y_c soit $\dot{y}_c = -d(\dot{\alpha}/2 \sin \alpha + \lambda \dot{\beta} \sin \beta) = -(d/2) \sin \alpha (\dot{\alpha} - \dot{\beta})$ en utilisant $\sin \beta = -\sin \alpha / (2\lambda)$ puis



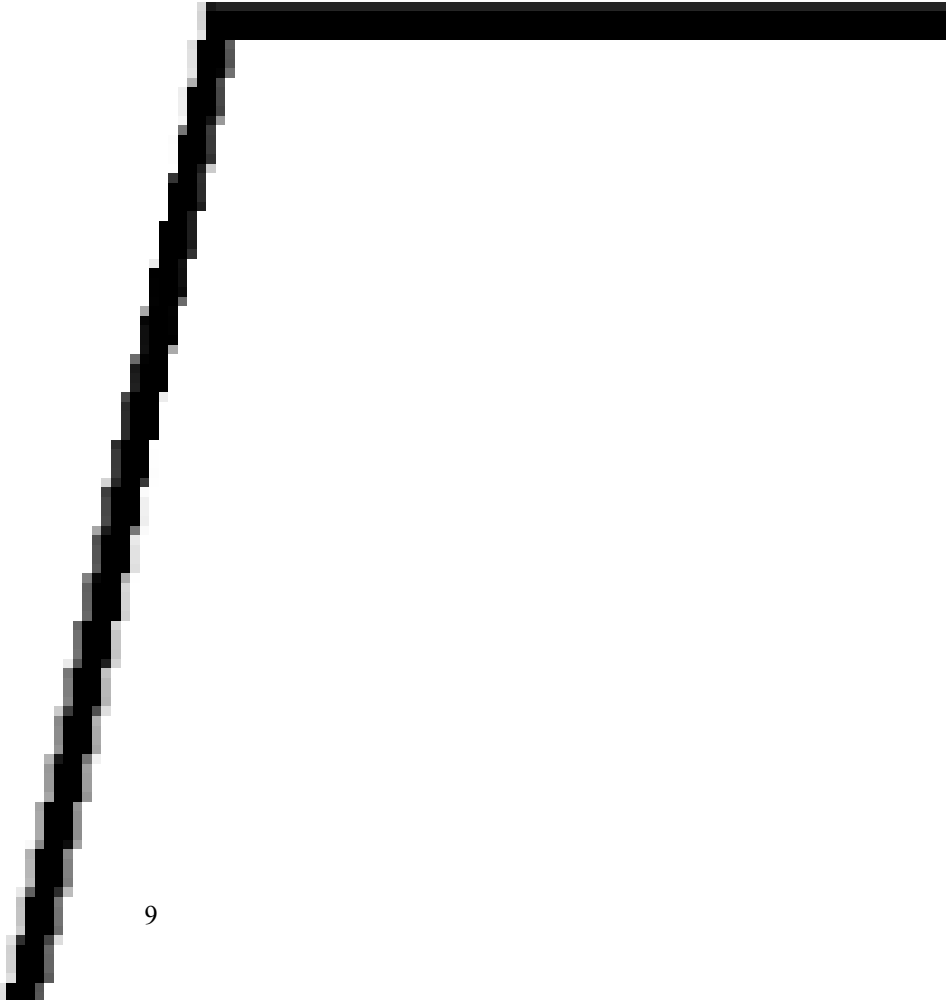
Corrigé ENSI 93 Physique 1

puisque $\omega = d\alpha/dt$ est constant.

Corrigé ENSI 93 Physique 1

D'autre part la relation $\sin \beta = -\sin \alpha(2\lambda)$ conduit à

■



, puis $\beta^2 \cos \beta - \beta^2 \sin \beta = -(\alpha^2 \cos \alpha - \alpha^2 \sin \alpha) / (2\lambda)$. Comme $\lambda \gg 1$, $|\beta| \ll |\alpha|$ et $|\beta| \ll \alpha^2$. Par conséquent tous les termes sont négligeables devant le terme en ω^2 dans l'expression précédente de $\mathcal{M}$; on retrouve ainsi l'expression de aI_y .

d) h D'après le résultat précédent, l'amplitude de aI_y est égale à $d\omega^2/2$.

AN : $d = 86 \text{ mm} = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; $\omega = 4800 \text{ tours/min} = 2\pi \cdot 4800/60 \text{ rad.s}^{-1}$

$$d\omega^2/2 = 10864 \text{ m.s}^{-2} \text{ } \hat{=} 1107 \text{ g}$$

h Les matériaux constituant le piston doivent posséder de bonnes qualités mécaniques pour résister aux contraintes provoquées par les accélérations élevées (acier trempé puis alliages spéciaux). L'ordre de grandeur de l'accélération du piston reste accessible aux technologies classiques; on rencontre des accélérations nettement plus élevées dans les turbines (turbines des centrales hydrauliques, thermiques et nucléaires; turbines des turbotrains et des hélicoptères, turboréacteurs pour lesquels les ailettes sont réalisées en titane). Les accélérations les plus fortes se rencontrent probablement dans les ultracentrifugeuses utilisées en biologie permettant d'atteindre des accélérations de l'ordre de $500000g$. Les rotors ont un diamètre de l'ordre de 15 cm et les vitesses angulaires maximales sont de l'ordre de $800 \text{ } \hat{=} 1000 \text{ tours/seconde}$. La technologie de ces appareils est nettement plus délicate: les rotors sont en titane ou en aluminium; ils sont placés dans des enceintes blindées (cause de l'énergie cinétique dissipée en cas d'éclatement) sous vide (la vitesse périphérique étant souvent supérieure à celle du son dans l'air).

II.3

a) h Si μ désigne la masse linéique de la barre, et x la position du point courant de la barre par

$$I_2 = J_{Gz} = \int_{-\lambda d/2}^{\lambda d/2} \mu x^2 dx = m_2 (\lambda d)^2 / 12$$

rapport à G, (résultat de cours).

b) h Le moment cinétique de la barre en G est égal au moment cinétique barycentrique. Dans son référentiel barycentrique, la barre a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Gz , qui est également un axe de symétrie de la barre, dont le vecteur rotation vaut $\omega \mathbf{b} = d\beta/dt \mathbf{e}_z$ ($\omega \mathbf{b}$ est différent du vecteur rotation ω du vilebrequin).

h Par conséquent $\mathbf{L}_2 = J_{Gz} d\beta/dt \mathbf{e}_z$. On peut retrouver la direction de $\mathbf{L}_2$ en remarquant que le mouvement se fait dans le plan Gxy de telle sorte que les vecteurs $\mathbf{GM}$ ou $\mathbf{M}$ est un point de la barre et $\mathbf{vM}$ sont orthogonaux à $\mathbf{e}_z$ et leur produit vectoriel colinéaire à $\mathbf{e}_z$.

h La valeur de $d\beta/dt$ a été calculée en II.2.c : $d\beta/dt = -\omega \cos \alpha / (2\lambda \cos \beta) \hat{=} -\omega \cos \alpha / 2\lambda$ car $|\beta| \ll 1$ d'où l'expression de $\mathbf{L}_2$:

$$\mathbf{L}_2 = -(1/24) m_2 d^2 \omega \cos \alpha \mathbf{e}_z$$

c) h La bielle est soumise aux actions de contact avec le cylindre et avec le vilebrequin et à son poids, négligeable par hypothèse. Les actions exercées par la bielle sur le cylindre et sur le vilebrequin sont $\mathbf{F}_1$ appliquée en C et $\mathbf{F}_2$ appliquée en B; d'après le théorème de l'action et de la réaction, la bielle subit les actions $-\mathbf{F}_1$ en C et $-\mathbf{F}_2$ en B.

h Les théorèmes de la résultante cinétique dans le référentiel galiléen Oxyz et du moment cinétique barycentrique appliqués à la bielle s'écrivent donc :

$$m_2 \mathbf{aG} = -\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$$

$$d\mathbf{L}_2/dt = \mathbf{GC} \wedge (-\mathbf{F}_1) + \mathbf{GB} \wedge (-\mathbf{F}_2)$$

d) h Il est possible de calculer $\mathbf{a}_2$ à partir de l'expression de la vitesse de G, en utilisant par exemple $\mathbf{vG} = \mathbf{vC} + \omega \mathbf{b} \wedge \mathbf{CG}$, puisque $\mathbf{vC}$ et $\omega \mathbf{b}$ sont connus. En fait il est plus simple d'écrire $\mathbf{OG} =$

Corrigé ENSI 93 Physique 1

$(\mathbf{OC} + \mathbf{OB}) / 2$, soit, O étant un point fixe du référentiel galiléen dans lequel on étudie le mouvement, $\mathbf{a}_G = (\mathbf{a}_C + \mathbf{a}_B) / 2 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_B) / 2$.

D'après II.2.c, $\mathbf{a}_1 = -d\omega^2/2 \cos\alpha \mathbf{e}_y$. Le point B a un mouvement circulaire autour de Oz de rayon $d/2$ et de vitesse angulaire ω , donc $\mathbf{a}_B = -d\omega^2/2 \mathbf{e}_r = -d\omega^2/2(\cos\alpha \mathbf{e}_y - \sin\alpha \mathbf{e}_x)$. En combinant les deux résultats :

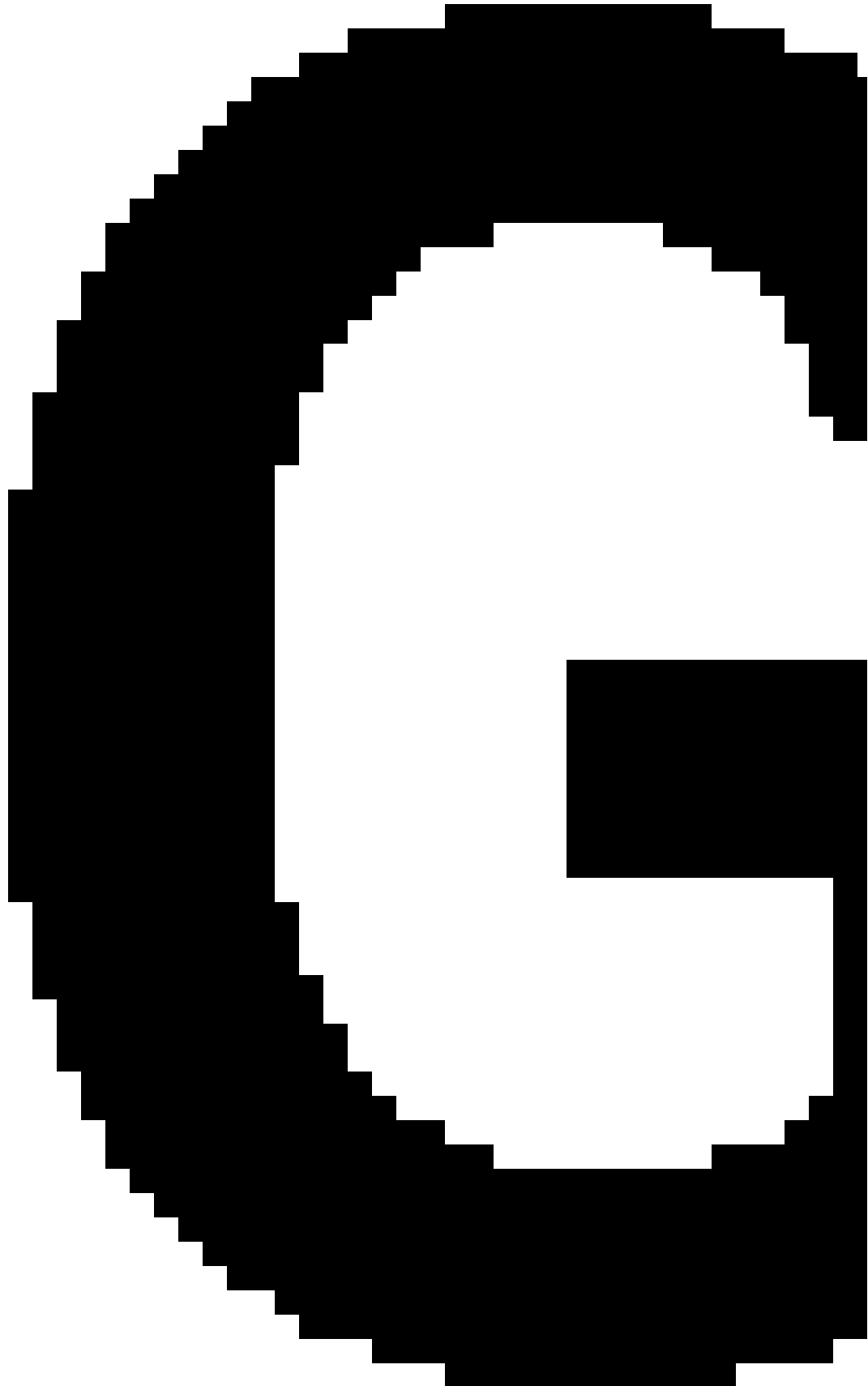


Corrigé ENSI 93 Physique 1

e) On explicite les relations vectorielles du II.3.c. L'accélération $\mathbf{a}_G$ est donnée par la relation précédente ; la dérivation de $\mathbf{L}^2$ conduit à $d\mathbf{L}^2/dt = (1/24) m d^2 \omega^2 \sin^2 \alpha \mathbf{e}_z$.

Corrigé ENSI 93 Physique 1

Les vecteurs $\mathbf{GC}$ et $\mathbf{GB}$ vérifient $\mathbf{GB} = -\mathbf{GC} = (Ad/2)(\sin\beta\mathbf{ex} - \cos\beta\mathbf{ey})$. Par conséquent



Corrigé ENSI 93 Physique 1

On aboutit après simplifications aux trois équations scalaires :



Corrigé ENSI 93 Physique 1

h En reportant la valeur de F_{1y} calculée en II.1.c), puis celle de a_{1y} calculée en II.2.c), on en déduit l'expression de F_{2y} :

$$F_{2y} = (m_2 d\omega^2 \cos\alpha)/2 - F - m_1 a_{1y} = (m_1 + m_2)(d\omega^2 \cos\alpha)/2 - F$$

h En supposant que les différentes composantes de **F1** et **F2** sont du même ordre de grandeur, la troisième équation se simplifie car $\cos\beta \approx 1$ et $|\sin\beta| \ll 1$. F_{1x} et F_{2x} vérifient alors :



Corrigé ENSI 93 Physique 1

soit $F_{2x} = -(m_2 d \omega^2 \sin \alpha) / 6$. Le terme en $\sin \beta$ est bien négligeable puisque les 4 composantes ont pour ordre de grandeur $m_2 d \omega^2$.
Finalement,

$$\begin{aligned} F_{2x} &= F_{0x} \sin \alpha \text{ ou } F_{0x} = -m_2 d \omega^2 / 6 \\ F_{2y} &= F_{0y} \cos \alpha + F_0 \text{ ou } F_{0y} = (m_1 + m_2) d \omega^2 / 2 \text{ et } F_0 = -F \end{aligned}$$

II.4

$$\mathbf{M} = \mathbf{OB} \wedge \mathbf{F}_2 = \frac{d}{2} \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_{0x} \sin \alpha \\ F_{0y} \cos \alpha + F_0 \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{d}{4} [(F_{0x} + F_{0y}) \sin 2\alpha + 2F_0 \sin \alpha] \mathbf{e}_z$$

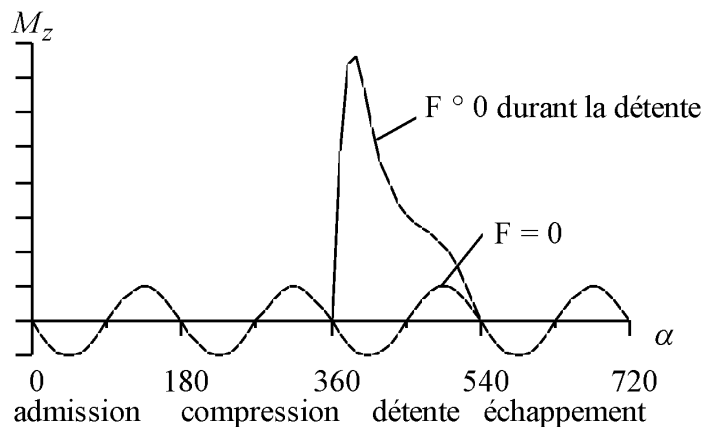
a)

soit en exprimant F_{0x} , F_{0y} et F_0 :

$$\mathbf{M} = -\frac{d}{4} \left[\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{3} \right) d \omega^2 \sin 2\alpha - 2F \sin \alpha \right] \mathbf{e}_z$$

b) h Pour $F = 0$, $M_z = -(d/4)(m_1/2 + m_2/3) \sin 2\alpha$ est proportionnel à $\sin 2\alpha$, d'où l'allure du graphique M_z

c) h Si F n'est non nulle que durant la détente, seule la partie du diagramme correspondante est modifiée. Au début et à la fin de cette phase, $\sin \alpha = \sin 2\alpha = 0$, il n'y a donc pas de discontinuité de M_z .



d) h J_{Oz} désignant le moment d'inertie du vilebrequin par rapport à Oz , le théorème du moment cinétique scalaire appliqué au vilebrequin s'écrit, en négligeant les frottements : $J_{Oz} d\omega/dt = M_z$ ou encore $d\omega/dt = M_z/J_{Oz}$. Pour minimiser les variations de la vitesse de rotation du vilebrequin, caractérisées par $d\omega/dt$, que causent les irrégularités de M_z , il faut par conséquent augmenter J_{Oz} . Concrètement le vilebrequin est solidaire d'un volant d'inertie de moment d'inertie élevé.

e) h AN : $m_1 = 0,5 \text{ kg}$, $m_2 = 1,2 \text{ kg}$, $F = 0$.

$$M_z = (m_1/2 + m_2/3)(d\omega)^2/4 = 303,7 \text{ N.m}$$

II.5

a) h Le vilebrequin est soumis à l'action de la bielle $\mathbf{F}_2$, à la réaction du palier $\mathbf{F}_3$ et à son poids, qui est négligé par hypothèse.

b) h Le principe fondamental de la dynamique appliqué au vilebrequin s'écrit $m_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$, soit $\mathbf{F}_3 = m_3 \mathbf{a}_3 - \mathbf{F}_2$. Les masselottes ont un mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse angulaire ω , donc $\mathbf{a}_3 = -r\omega^2 \mathbf{ur} = r\omega^2 (\sin \alpha \mathbf{ex} - \cos \alpha \mathbf{ey})$. Par conséquent :

$$\mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} (-m_3 r \omega^2 - F_{0x}) \sin \alpha \\ (m_3 r \omega^2 - F_{0y}) \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(m_3 r - m_2 d / 6) \omega^2 \sin \alpha \\ (m_3 r - (m_1 + m_2) d / 2) \omega^2 \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

c) h Pour annuler à tout instant la norme de $\mathbf{F}_3$, il faut vérifier les deux égalités $m_2 d / 6 = m_3 r$ et $(m_1 + m_2) d / 2 = m_3 r$, et par conséquent $m_2 d / 6 = (m_1 + m_2) d / 2$.

Corrigé ENSI 93 Physique 1

h Cette $\vec{Z}_{\text{galit}}$ est $\vec{Z}_{\text{equivalente}}$ $\hat{=} \vec{L}_{\vec{Z}_{\text{galit}}} - 2m_2 = 3m_1$, qui n'est pas réalisable puisque les masses sont positives.

d) h Puisque les composantes non nulles F_{3x} et F_{3y} sont proportionnelles $\hat{=} \sin\alpha$ et $\cos\alpha$, le module de $\mathbf{F}_3$ est constant si $\vec{L}_{\vec{Z}_{\text{galit}}}$:

$$|m_3 r - m_2 d/6| = |m_3 r - (m_1 + m_2)d/2|$$

est vérifié, c'est $\hat{=}$ dire si $m_3 r - m_2 d/6 = - (m_3 r - (m_1 + m_2)d/2)$. En effet les deux facteurs ne peuvent pas être de même signe, car alors $\vec{L}_{\vec{Z}_{\text{galit}}}$ se ramènerait comme précédemment $\hat{=} -2m_2 = 3m_1$.

h En réarrangeant les termes, on obtient finalement

$$m_3 r = (m_1/4 + m_2/3)d$$

h En reportant on trouve $\mathbf{F}_3 = - (m_1/4 + m_2/6)d\omega^2 (\sin\alpha \mathbf{e}_x + \cos\alpha \mathbf{e}_y)$; $\mathbf{F}_3$ fait l'angle $-(\pi/2 + \alpha)$ avec $\mathbf{e}_x$, et tourne donc dans le sens inverse de la vitesse angulaire $-\omega$.