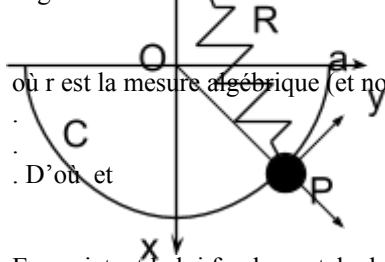


1. Sur le système $(O,)$, P a pour coordonnées $(a,0)$ et Ω a pour coordonnées $(-a \cos \theta, a \sin \theta)$; d'où :
2. s'obtient à partir des coordonnées précédentes ou en raisonnant directement sur le triangle isocèle $OP\Omega$ dont les angles P et Ω valent $\theta/2$.

- 3.
4. où r est la mesure algébrique (et non le module) de la réaction du demi cercle sur la perle.



- 5.
- 6.
7. D'où et
- 8.
9. En projetant la loi fondamentale de la dynamique sur et en utilisant l'expression de la force de la question 4, on obtient :
On peut aussi obtenir cette relation en dérivant l'énergie par rapport au temps.
10. Les positions d'équilibre sont celles pour lesquelles :
- ou bien ;
- ou bien tel que si cette équation a des racines.
11. , compris entre 0 et (soit compris entre 0 et), existe si , ce qui exige et . Donc existe si
Le poids ne doit être, ni trop grand (alors il n'y a qu'une position d'équilibre, qui est stable, en $\theta = 0$), ni trop petit (alors l'action du ressort l'emporte et la position d'équilibre $\theta = 0$ est instable ; lorsqu'on s'en écarte, la perle est appelée au delà de sa position extrême).
12. L'équilibre est stable si et instable si . Comme :
, la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable si (alors, c'est la seule position d'équilibre) et instable si l'inégalité est en sens contraire.
Si θ_1 existe, $\theta = \pm \theta_1$ sont des positions d'équilibre stable, parce que les positions d'équilibres sont alternativement stables et instables. On peut aussi le montrer en examinant le signe de qui est négatif puisque .
13. ; D'où : ;
Les positions d'équilibre sont donc .
Comme , la position d'équilibre $\theta = 0$ est instable.
Comme , les positions d'équilibre $\theta = \pm \theta_1$ sont stables.
L'énoncé complique inutilement la résolution de ce problème en obligeant à intégrer F pour obtenir E_p , puis en dérivant deux fois E_p pour obtenir la dérivée de F . Il est plus simple de ne dériver qu'une fois F .
14. Si ε est petit, une expression approximative de la force au voisinage de la position d'équilibre est : . La loi fondamentale de la dynamique s'écrit qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω telle que .
15. Si on résout naïvement l'énoncé, on trouve une amplitude de ε égale à radian, ce qui est trop grand.
L'énergie cinétique initiale est .
La différence d'énergie potentielle entre le point de départ (minimum) et le point extrême possible (maximum) est , qui est nettement plus petit que l'énergie cinétique initiale. Donc la perle a un mouvement approximativement uniforme jusqu'à ce qu'elle parvienne à l'extrémité du demi cercle. L'énoncé ne permet pas de savoir ce qu'il advient ensuite.
16. . Donc . K' est nettement plus petit que K , car le poids est la force de rappel la plus importante et diminue notablement l'effet du ressort.
17. . Donc . A noter l'irréalisme de la petitesse de a . En l'absence de ressort, le système est équivalent à un pendule de longueur a , donc on aurait $L = a$. Le ressort jouant contre le poids, tout se passe comme si la pesanteur était plus faible, ou, ce qui revient au même, comme si la longueur du pendule était plus grande.
18. .
19. .
20. soit qui au facteur a près est identique à l'équation de la question 9. Il vaut mieux ne pas expliciter la force, la démonstration est alors plus claire.