

1.- (prueba extraordinaria) Considera las matrices

$$A = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ m \ 0 \ 1 \ 1 \ 1), \ B = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \text{ y } C = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)$$

(a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $AX + 2B = 3C$?

Resolución

Restando $2B$ en los dos miembros, $AX = 3C - 2B$.

$\det A = m$. Luego, si $m \neq 0$, existe A^{-1} y multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, en los dos miembros:

$$A^{-1}AX = A^{-1}(3C - 2B) \Rightarrow X = A^{-1}(3C - 2B).$$

Por tanto, la ecuación tiene solución para $m \neq 0$

(b) Resuelve la ecuación matricial dada para $m = 1$.

Resolución

Para $m = 1$, $A = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)$; $\det A = 1 \neq 0$

$$X = A^{-1}(3C - 2B) = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t (3C - 2B) = \frac{1}{1} (1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1)^t [3(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) - 2(1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)]$$

$$X = (1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1)(1 \ -2 \ -2 \ 0 \ 1 \ -2 \ 3 \ 0 \ 3) = (1 \ -2 \ -2 \ -1 \ 3 \ 0 \ 3 \ -1 \ 5)$$

2.- (prueba extraordinaria) Considera las matrices $A = (-2 \ -2 \ 1 \ -2 \ 1 \ -2 \ 1 \ -2 \ -2)$ y

$$X = (x \ y \ z)$$

(a) Calcula los valores de λ , para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

Resolución

$$A + \lambda I = (-2 \ -2 \ 1 \ -2 \ 1 \ -2 \ 1 \ -2 \ -2) + \lambda(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) = (\lambda - 2 \ -2 \ 1 \ -2 \ \lambda + 1 \ -2 \ 1 \ -2 \ \lambda - 2)$$

$$\det(A + \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) + 4 + 4 - \lambda - 1 - 4\lambda + 8 - 4\lambda + 8 =$$

$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4 + 4 - \lambda - 1 - 4\lambda + 8 - 4\lambda + 8 = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$$

Factoricemos usando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} 3 & 1 & -3 & -9 & 27 \\ \hline & 1 & -6 & -12 & 0 \end{array} \text{ . Nos queda } (\lambda - 3)(\lambda^2 - 9) = 0, \text{ de donde } \lambda = 3 \text{ ó } \lambda = -3$$

Luego, para $\lambda = 3$ ó $\lambda = -3$ la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

(b) Resuelve el sistema $AX = 3X$ e interpreta geoméricamente el conjunto de todas sus soluciones.

Resolución

Restando $3X$, en los dos miembros, $AX - 3X = 0$; $(A - 3I)X = 0$.

Sacando factor común X , por la derecha, $(A - 3I)X = 0$.

$$B = A - 3I = (-2 \ -2 \ 1 \ -2 \ 1 \ -2 \ 1 \ -2 \ -2) - 3(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) = (-5 \ -2 \ 1 \ -2 \ -2 \ -2 \ 1 \ -2 \ -5)$$

$$; X = (x \ y \ z); 0 = (0 \ 0 \ 0)$$

Nos queda el sistema en forma matricial, $BX = 0$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ y $B^* = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

Al ser $\det B = -50 + 4 + 4 + 2 + 20 + 20 = 0$ y $|-2 \ 1 \ -2 \ -2| = 6 \neq 0$, $\text{rg } B = 2$.

$$B^* = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} - f_1 \ f_2: \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix} - f_3 \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} f_1$$

Como $|0 \ 1 \ -1 \ 2| = 1 \neq 0$, $\text{rg } B^* = 2$. Luego, $\text{rg } B^* = \text{rg } B = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\{y + 2z = 0 \quad -x + 2y + 5z = 0\}$.

En la 1ª ecuación, $y = -2z$; en la 2ª ecuación, $x = 2y + 5z = 2(-2z) + 5z = z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k \quad y = -2k \quad z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

Las soluciones corresponden a los puntos de una recta, la recta $\{y + 2z = 0 \quad -x + 2y + 5z = 0\}$

3.- Determina razonadamente los valores de m para los que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x + 2y + z = m \\ x + 2y + 4z = m \end{cases}$ tiene más de una solución.

Resolución

Reorganizando los términos

$\begin{cases} (2-m)x + y + z = 0 \\ x + (2-m)y + z = 0 \\ x + 2y + (4-m)z = 0 \end{cases}$. Al ser un sistema homogéneo, según el teorema de Rouché-Fröbenius, tendrá más de una solución si el determinante de la matriz de coeficientes,

$A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix}$ es cero.

$$\det A = (4-m)(4-4m+m^2) + 1 + 2 - 2 + m - 4 + 2m - 4 + m =$$

$$= 16 - 16m + 4m^2 - 4m + 4m^2 - m^3 + 1 + 2 - 2 + m - 4 + 2m - 4 + m = -m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0$$

Factoricemos usando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -1 & 8 & -16 & 9 \\ \hline & 1 & 7 & -9 & 0 \end{array} \quad \text{Nos queda } (m-1)(-m^2 + 7m - 9) = 0,$$

$$\text{de donde } m = 1 \quad \text{ó} \quad -m^2 + 7m - 9 = 0 \quad ; \quad m^2 - 7m + 9 = 0 \quad ; \quad m = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Luego, para $m = 1$ ó $m = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$ el sistema tiene más de una solución.

4.-

(a) Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 vale -2
¿Cuánto vale el determinante de la matriz 4A?

Resolución

Al ser A de orden 3, $\det(4A) = 4^3 \cdot \det A = 64 \cdot (-2) = -128$

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de λ la matriz $3B + B^2$ no tiene inversa?

Resolución

$$3B + B^2 = 3(1 \ 2 \ 0 \ \lambda \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -2) + (1 \ 2 \ 0 \ \lambda \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -2)(1 \ 2 \ 0 \ \lambda \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -2) = (3 \ 6 \ 0 \ 3\lambda \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ -6) +$$

$$3B + B^2 = (2\lambda + 4 \ 8 \ 2 \ 4\lambda \ 2\lambda + 1 \ 1 \ \lambda \ 1 \ -1); \det(3B + B^2) = -4\lambda^2 - 10\lambda - 4 + 8\lambda + 8\lambda - 4\lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda - 4 + 32\lambda =$$

$$= -8\lambda^2 + 34\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 17\lambda + 4 = 0; \lambda = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm 15}{8} \quad \lambda = 4 \quad \lambda = \frac{1}{4}$$

Luego, para $\lambda = 4$ ó $\lambda = \frac{1}{4}$ la matriz $3B + B^2$ no tiene inversa

5.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$,
halla la matriz X que cumple
que $AX = (BA^t)^t$.

Resolución

Como $\det A = -2 + 3 = 1 \neq 0$, existe A^{-1} . Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, en los dos miembros,

$$A^{-1}AX = A^{-1}(BA^t)^t = A^{-1}(A^t)^t B^t = A^{-1}AB^t = B^t \Rightarrow X = B^t = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 & 0 & -1 & 4 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

6.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m^2 & 1 & 1 & m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

Resolución

$$\det A = 1 + m - m - m^2 = 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \quad \text{ó} \quad m = -1.$$

Luego, para $m \neq 1$ y $m \neq -1$ la matriz A tiene inversa

(b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 2$.

Resolución

Para $m = 2$, $\det A = 1 - 2^2 = -3 \neq 0$ sabemos que existe la inversa de A. Además, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{-1}{3} (1 \ -2 \ -2 \ -1 \ -1 \ 2 \ 0 \ 3 \ -3)^t = \frac{-1}{3} (1 \ -1 \ 0 \ -2 \ -1 \ 3 \ -2 \ 2 \ -3) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

7.- (prueba ordinaria) Sean C_1 , C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula indicando las propiedades que utilices:

(a) El determinante de A^3 .

Resolución

Como el determinante del producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, entonces $\det(A^3) = [\det A]^3 = 5^3 = 125$

(b) El determinante de A^{-1} . **Resolución** $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{5}$

(c) El determinante de $2A$. **Resolución** Al ser A de orden 3, entonces $\det(2A) = 2^3 \cdot \det A = 8 \cdot 5 = 40$

(d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2 .

Resolución

$$\det(3C_1 - C_3, 2C_3, C_2) = \det(3C_1, 2C_3, C_2) - \det(C_3, 2C_3, C_2) = 3 \cdot 2 \det(C_1, C_3, C_2) - 0 = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$$

8.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my - z = -2 + 2m \\ mx - y + 4z = 5 + 2m \\ 6x - 10y - z = -1 \end{cases}$$

(a) Discute las soluciones del sistema según los valores de m .

Resolución

$$\text{Reorganizando los términos } \begin{cases} x - my - z = -2 + 2m \\ mx - y + 4z = 5 + 2m \\ 6x - 10y - z = -1 \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 \\ m & -1 & 4 \\ 6 & -10 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2 + 2m \\ m & -1 & 4 & 5 + 2m \\ 6 & -10 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 - 12m + 10m - 6 + 20 - m^2 = -m^2 - 2m + 15 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}, \quad m = 3 \text{ o } m = -5$$

– Si $m \neq 3$; $m \neq -5$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si $m = 3$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & -10 & -1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 + 2 \cdot 3 \\ 3 & -1 & 4 & 5 + 2 \cdot 3 \\ 6 & -10 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 3f_1, f_3 - 6f_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & 16 & 11 \\ 0 & -8 & -7 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & 16 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $m = -5$, la matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -2 - 5 \\ -5 & -1 & 4 & 5 - 5 \\ 6 & -10 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + 5f_1, f_3 - 6f_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & -24 & -1 & -25 \\ 0 & -40 & -7 & -41 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \cdot (-1/24), f_3 \cdot (-1/40)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1/24 & 25/24 \\ 0 & -1 & -7/40 & -41/40 \end{pmatrix}$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 8$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

(b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

Para $m = 3$ sabemos que el sistema es compatible indeterminado. La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 8 & 5 & 11 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases} -x + 3y + z = 2 \\ 8y + 5z = 11 \end{cases}$. En la 2ª ecuación, $y = \frac{11 - 5z}{8}$;

$$\text{en la 1ª ecuación } x = 3y + z - 2 = 3 \frac{11 - 5z}{8} + z - 2 = \frac{33 - 15z + 8z - 16}{8} = \frac{17 - 7z}{8}$$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = \frac{17-7k}{8} \ y = \frac{11-5k}{8} \ z = k \}$, con $k \in \mathbb{R}$

9.- Considera la matriz $M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde x es un número real.

(a) ¿Para qué valores de x existe $(M(x))^{-1}$? Para los valores de x obtenidos, calcula la matriz $(M(x))^{-1}$.

Resolución

$\det [M(x)] = 2^x > 0$. Luego, para cualquier valor de x existe $(M(x))^{-1}$.

$$[M(x)]^{-1} = \frac{1}{[M(x)]} (\text{adj } [M(x)])^t = \frac{1}{2^x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2^x & 0 & 0 & -x2^x & 2^x \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2^x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2^x & -x2^x & 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^x} & 0 & 0 & 0 & 1 & -x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Resuelve, si es posible, la ecuación $M(3) \cdot M(x) = M(5)$.

Resolución

$$\begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Operando,} \\ \begin{pmatrix} 2^{x+3} & 0 & 0 & 0 & 1 & x+3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos, $x+3=5$. Luego, $x=2$. Por tanto, $M(x) = M(2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & m & 3 & 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

(a) ¿Para qué valores de m existe la matriz A^{-1} ?

Resolución

$$\det A = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0; \quad m = \frac{4 \pm 2}{2}, \quad m = 3 \quad m = 1$$

Luego, para $m \neq 3$ y $m \neq 1$ la matriz A tiene inversa

(b) Siendo $m = 2$, calcula A^{-1} y resuelve el sistema $AX = B$.

Resolución

Para $m = 2$, sabemos que existe A^{-1} . Además, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\det A = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 & -12 & -12 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 12 & 2 & -3 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, en los dos miembros, $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$X = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 12 & 2 & -3 & -8 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Resuelve el sistema $AX = B$ para $m = 1$.

Resolución

Para $m = 1$, las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\det A = 0$ y como $|1 \ 0 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f3 - 4f1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f3 = f2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $|1 \ 0 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\{x - z = 1, y + 3z = -1\}$.

En la 1ª ecuación, $x = 1 + z$; en la 2ª ecuación, $y = -1 - 3z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 1 + k, y = -1 - 3k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$.

11.- Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200.

Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

Resolución

Sean x, y, z el nº de espectadores que acudió a las salas A, B y C, respectivamente.

Como la recaudación total fue de 720 €, $3x + 4y + 5z = 720$

Como asistieron 200 espectadores, $x + y + z = 200$

Como si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Luego, $3y + 4x + 5z = 740$

Nos queda el sistema $\{x + y + z = 200, 3x + 4y + 5z = 720, 4x + 3y + 5z = 740\}$. La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 & 3 & 4 & 5 & 720 & 4 & 3 & 5 & 740 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 & 0 & 1 & 2 & 120 & 0 & -1 & -1 & -60 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 & 0 & 1 & 2 & 120 & 0 & 0 & 3 & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 : 3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 & 0 & 1 & 2 & 120 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\{x + y + z = 200, y + 2z = 120, z = 20\}$.

Sustituyendo el valor $z = 20$ en la 2ª ecuación, $y + 2 \cdot 20 = 120$; $y = 80$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $x + 80 + 20 = 200$; $x = 100$

Luego, asistieron 100 espectadores a la sala A, 80 a la sala B y 20 a la sala C.