

Navale 92 - Deuxième composition de physique (option P, 3 heures)

I. Questions préliminaires

1) Dans le vide, en l'absence de charges ($\rho = 0$), l'équation de Poisson, $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$, se réduit à $\Delta V = 0$ (équation de Laplace).

2)

a) La force de pesanteur est négligée, la particule est donc soumise à la seule force magnétique $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$. La vitesse de la particule est constante car la force magnétique ne travaille pas.

Par translation et par rotation autour de $\mathbf{e}_z$, il est toujours possible de choisir un référentiel galiléen dont l'origine coïncide avec la position de la particule au temps $t=0$, et tel que la composante de la vitesse selon Oy soit nulle à $t=0$. Le mouvement est donc entièrement caractérisé par la donnée des composantes selon $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$ de la vitesse initiale (la composante selon $\mathbf{e}_z$ n'est en particulier aucune raison d'être nulle, puisque la direction de $\mathbf{e}_z$ est imposée).

L'équation du mouvement est donnée par le théorème de la résultante cinétique $M \mathbf{\ddot{a}} = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ soit $\mathbf{a} = \epsilon \omega_c \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, où $\epsilon = \text{sign}(q)$ et $\omega_c = |q|B/M$. En projection sur les axes xyz du référentiel supposé galiléen

$$\begin{cases} \ddot{x} = \epsilon \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\epsilon \omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

on obtient :

On en déduit $v_z = v_{z0} = \text{cte}$; $z(t) = v_{z0} t$. La norme de la vitesse étant constante, v_z étant également, la norme de la projection de la vitesse sur xOy , notée $v_\perp$ est constante.

En posant $\rho = x + iy$, le système d'équations en x et y se réduit à $\dot{\rho} = \dot{x} + i\dot{y} = -i\epsilon\omega_c \rho$, équation différentielle du premier ordre qui admet pour solution $\rho = \rho_0 \exp(-i\epsilon\omega_c t)$ soit pour ρ :

$$\rho = \frac{\rho_0}{-i\epsilon\omega_c} (\exp(-i\epsilon\omega_c t) - 1) + \rho_0$$

. Le tracé de ρ dans le plan complexe est identique à celui de $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ dans le plan xOy , l'axe réel correspondant à l'axe Ox , l'axe imaginaire à l'axe Oy .

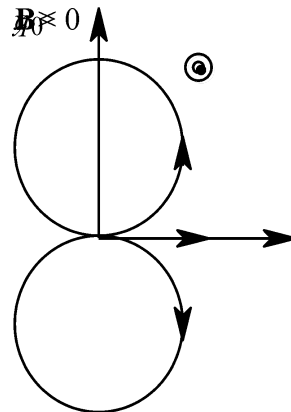
On en déduit qu'en projection sur le plan xOy le mouvement est un $\rho_0 \neq 0$

mouvement circulaire uniforme de rayon $\left| \frac{\rho_0}{-i\epsilon\omega_c} \right| = \left| \frac{v_\perp}{\omega_c} \right|$, parcouru à

la vitesse $v_\perp$, avec la pulsation ω_c (pour s'en convaincre il suffit de représenter l'évolution de ρ dans le plan complexe). Le sens de parcours dépend en particulier du signe de q : direct pour les charges négatives, rétrograde pour les charges positives.

En utilisant les conditions initiales : $\rho_0 = 0$, $\dot{\rho}_0 = v_{x0} = v_\perp$, on obtient finalement $\rho = i\epsilon v_\perp / \omega_c (\exp(-i\epsilon\omega_c t) - 1)$, soit

$$\begin{cases} x = \text{Re}(\rho) = \frac{\epsilon v_\perp}{\omega_c} \sin(\epsilon\omega_c t) = \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y = \text{Im}(\rho) = \frac{\epsilon v_\perp}{\omega_c} (\cos(\epsilon\omega_c t) - 1) = \frac{\epsilon v_\perp}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$$



b) $B = 5 \text{ T}$; $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $M = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$: $\omega_c = 8,78 \text{ rad.s}^{-1}$.

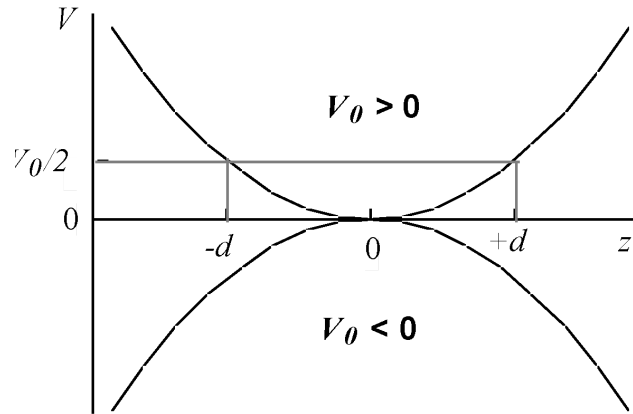
II. Étude du pôle électrostatique

1)

a) En coordonnées cylindriques, V peut s'écrire $V = V_0/(4d^2)(2z^2 - r^2)$. Il ne dépend pas de la variable θ et présente par conséquent la symétrie de révolution d'axe Oz. Le champ électrostatique est le gradient de V . Il ne dépend donc pas de θ et possède également la symétrie de révolution d'axe Oz.

b) La vérification est immédiate après avoir calculé $\nabla^2 V/\nabla x^2 = \nabla^2 V/\nabla y^2 = -V_0/2d^2$ et $\nabla^2 V/\nabla z^2 = V_0/d^2$. Par conséquent $\Delta V = 0$.

c) Le long de l'axe Oz, $x=y=0$, soit $V(z) = (V_0/2)(z/d)^2$. Le graphe représentatif des variations de V est une parabole de sommet ($z=0$, $V=0$) passant par les points ($z=\pm d$, $V=V_0/2$). L'orientation de la parabole dépend du signe de V_0 .



Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

Dans le plan xOy , $z=0$, soit $V(\rho) = -(V_0/4) (\rho/d)^2$, ρ étant la distance du point considéré à l'axe Oz . Le graphe représentatif de $V(\rho)$ est une demi-parabole de sommet $(\rho=0, V=0)$ passant par le point $(\rho=d, V=-V_0/4)$. L'orientation de cette parabole est l'opposée de celle de la parabole précédente. Le point O est donc un point-selle, minimum de $V(\rho=0, z)$ et maximum de $V(\rho, z=0)$ si V_0 est positif, l'inverse si V_0 est négatif.

Remarque : Les points particuliers $z=d$, ou $\rho=d$ ont une signification physique contrairement aux points $z=1$ (m, cm, mm ou km?) ou $\rho=1$, dans la mesure où z et ρ sont homogènes à des longueurs tout comme d .

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

d) Le potentiel ayant la symétrie de révolution, l'équipotentielle de potentiel V_e est une surface de révolution d'axe Oz engendrée par la rotation autour de Oz de sa trace dans un plan méridien quelconque.

L'équation de l'équipotentielle V_e est en coordonnées cylindriques

$$V_e = (V_0/4d^2) (2z^2 - \rho^2) \text{ soit } 2(z/d)^2 - (\rho/d)^2 = 4V_e/V_0.$$

Dans un plan méridien (O, **uz**, **ur**) cette équation est celle de deux familles d'hyperboles lorsque V_e varie.

* Si $V_e/V_0 > 0$, on trouve un couple d'hyperboles d'axe **Ouz** symétriques par rapport à l'axe **Ouz**, passant par les points

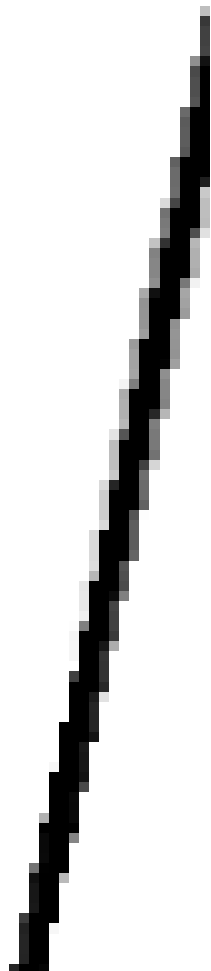
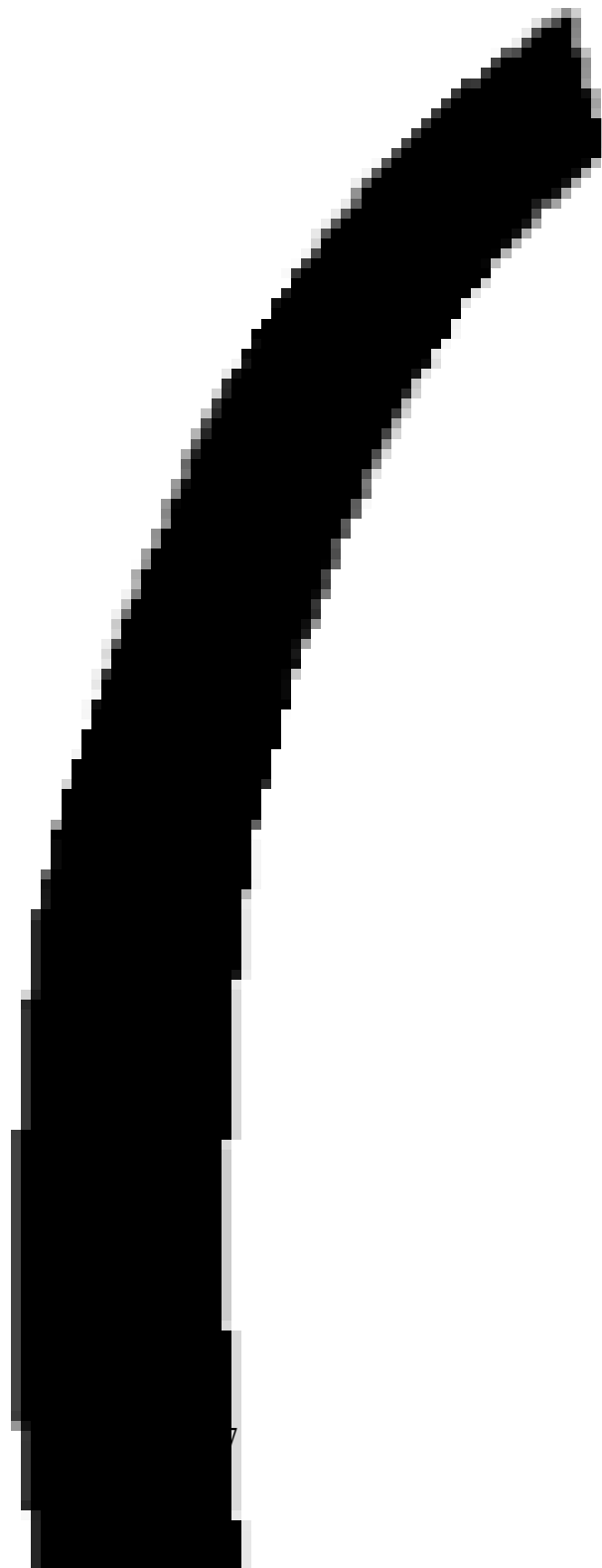
■

Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

Par révolution autour de Oz on génère un hyperboloïde à deux nappes.

* Si $V_e / V_0 < 0$, on trouve un couple d'hyperboles d'axe Oz symétriques par rapport à l'axe Oz, passant par les points

■



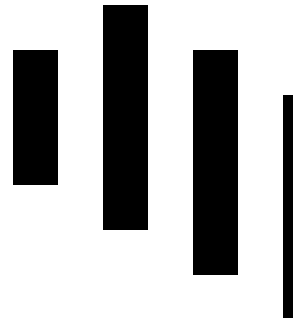
Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

. Par révolution autour de Oz on génère un hyperboloïde à une nappe.

* Si $V_e/V_0 = 0$, l'équation devient $2(z/d)^2 - (\rho/d)^2 = 0$ soit $z = \pm \rho/\sqrt{2}$. On a une forme d'hyperboloïde correspondant aux droites d'équation $z = \pm \rho/\sqrt{2}$. Par révolution autour de Oz on génère un cône d'axe Oz de sommet O.

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

Lorsque $(z/d) \gg V_e/V_0$ et $(\rho/d) \gg V_e/V_0$ on peut écrire l'équation des équipotentielles sous la forme approchée $2(z/d)^2 = (\rho/d)^2$, soit $z = \pm \rho/\sqrt{2}$. L'ensemble des équipotentielles admet donc pour asymptote l'équipotentielle $V = 0V$, c'est à dire dans un plan méridien quelconque les deux droites d'équation $z = \pm \rho/\sqrt{2}$.



e) Les équipotentielles $V=+V_0$ et $V=-V_0$ forment une surface fermée (on peut considérer qu'elles se rejoignent à l'infini). Si on considère le système obtenu en matérialisant chacune de ces deux équipotentielles par une électrode métallique portée au même potentiel, le potentiel électrostatique à l'intérieur du volume délimité par les deux électrodes vérifiera l'équation de Laplace et sera égal à la surface de chaque électrode au potentiel imposé à cette électrode.

Le potentiel pour le système de deux électrodes portées à des potentiels adéquats satisfait donc à la même équation de Laplace et aux mêmes conditions aux limites que le potentiel étudié aux questions précédentes dans le volume intérieur aux deux électrodes. D'après le théorème d'unicité ces deux potentiels sont donc égaux en tout point du volume intérieur. (À l'extérieur le problème est plus complexe puisque la valeur du potentiel n'est pas définie de manière unique à l'infini ; d'autre part pour obtenir une surface fermée contenant le point O il est nécessaire de considérer deux équipotentielles dont les potentiels sont de signes opposés).

Le dispositif idéal est donc obtenu en matérialisant deux équipotentielles (hyperboloïdes de révolution) de signes opposés ($+V_0$ et $-V_0$ par exemple) par des électrodes portées aux mêmes potentiels. Cependant les électrodes devraient être d'extension infinie.

Le dispositif réel est analogue au dispositif idéal, mais seules les parties centrales des équipotentielles $+V_0$ et $-V_0$ ont été matérialisées par des électrodes. Les deux coupelles C1 et C2 correspondent à l'hyperboloïde à double nappe ($V_e/V_0 > 0$) tandis que l'anneau correspond à l'hyperboloïde à nappe unique ($V_e/V_0 < 0$). Si les bords des électrodes sont suffisamment éloignés de O (à une distance très supérieure à ρ_0 et z_0) les effets de bords seront peu importants au voisinage de O et le potentiel sera pratiquement égal au potentiel théorique dans cette région.

Les grandeurs ρ_0 et z_0 ont déjà été calculées dans le cas général à la question précédente. En posant dans les relations obtenues $V_e = \pm V_0/2$ on trouve

$$\rho_0 = \sqrt{2} d ; z_0 = d$$

2)

a) La force subie par un électron dans le champ électrostatique est $-e\mathbf{E}$ (e est la valeur absolue de la charge de l'électron, ne pas l'oublier par la suite). Les forces de pesanteur sont négligées par hypothèse. L'équation du mouvement s'écrit par conséquent

$m\mathbf{\ddot{a}} = -e\mathbf{E}$, soit $\mathbf{a} = -(e/m) \mathbf{E}$. En exprimant $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ puis l'équation du mouvement en coordonnées cartésiennes on obtient :

■

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

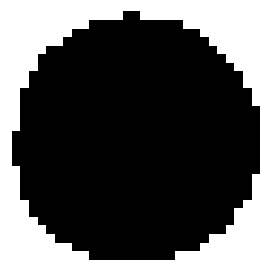
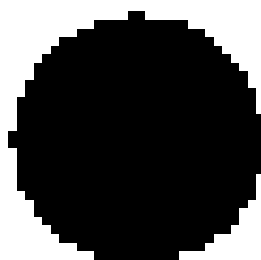
puis



Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

La projection sur Oz de l'équation du mouvement s'écrit

■



Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

. Si $I_0 > 0$ cette équation admet pour solution générale

■



Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

0

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

■

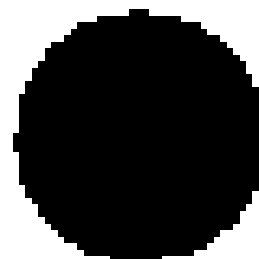
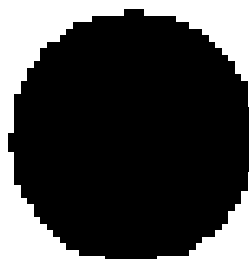
Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

. Dans ce cas z diverge si A est non nul, le mouvement selon Oz n'est pas confiné au voisinage de O .

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

Si $V_0 < 0$, l'équation est l'équation d'un **oscillateur harmonique** :

■



Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

de

pulsation

propre

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

■

Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

. Le mouvement est un mouvement harmonique de pulsation ω_z .

b) Si le mouvement selon Oz est confiné, $V_0 < 0$. Dans ce cas le facteur $-eV_0/(2md^2)$ est positif ; les deux équations du mouvement en projection sur Ox et Oy s'écrivent



Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

. Ces Équations sont analogues à celle obtenue pour z si V_0 est positif, et leurs solutions générales divergent exponentiellement avec le temps.

La projection du mouvement n'est donc pas bornée dans xOy.

c) AN : $d = 5.10^{-3}$ m ; $V_0 = -12$ V (le mouvement selon Oz est donc confiné) ;

$e = 1,6.10^{-19}$ C ; $m = 9,11.10^{-31}$ kg d'où $\omega_z = 2,903.10^8$ rad.s⁻¹ ($\omega_z \ll \omega_c$)

Le fait qu'il n'est pas possible de confiner un Électron autour de O à l'aide d'un champ Électrique s'explique ainsi : L'Énergie potentielle de l'Électron dans le champ est $U = -eV$. Si l'Électron restait confiné dans une région finie de l'espace, cela impliquerait la présence d'une position d'Équilibre, donc d'un maximum de V , dans cette région. Or l'espace entre les Électrodes créant le champ E est vide de charge donc V ne peut pas admettre de maximum dans cette région. Le confinement de l'Électron dans cette région est donc impossible. On peut se reporter à la question II.1.c pour confirmer ce fait. En particulier O est un point-selle.

III Confinement magnétique

1) La force totale subie par l'Électron en négligeant toujours les forces de pesanteur est la force de Lorentz $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$. Le champ $\mathbf{B}$ est dirigé selon Oz donc la composante selon Oz de la force magnétique est nulle. Par conséquent l'Équation du mouvement selon Oz n'est pas modifiée et les conclusions de la question II.2.a restent valables.

Pour que l'Électron soit piégé, son mouvement selon Oz devra être confiné au voisinage de O. Le potentiel $V_0/2$ auquel sont portées les coupelles C1 et C2 doit être négatif.

2)

a) La projection de la force Électrique subie par un Électron a été calculée en II.2.b, celle de la force magnétique pour un champ $\mathbf{B}$ dirigé selon Oz en I.2.a) (pour un Électron $e < 0$). La projection sur xOy de l'Équation du mouvement de l'Électron s'écrit donc en, combinant les résultats et en conservant les notations $\omega_c = eB/m$ et $\omega_z^2 = -eV_0/(2md^2)$:

■

Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

b) En effectuant la somme de l'équation en x et du produit par i de l'équation en y on trouve

■

Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

soit en considérant la variable $\rho = x + iy$ introduite en I.

■

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

c) Qualitativement si $\mathbf{B}$ est faible, l'effet du champ électrique est prédominant et le mouvement transversal n'est pas confiné tandis que si $\mathbf{B}$ est fort, l'effet du champ magnétique est prédominant et le mouvement transversal est confiné et de plus en plus proche d'un mouvement circulaire. A l'équation différentielle vérifiée par ρ on peut associer l'équation caractéristique

$$r^2 - i\omega\tau r - (\omega\tau^2/2) = 0$$

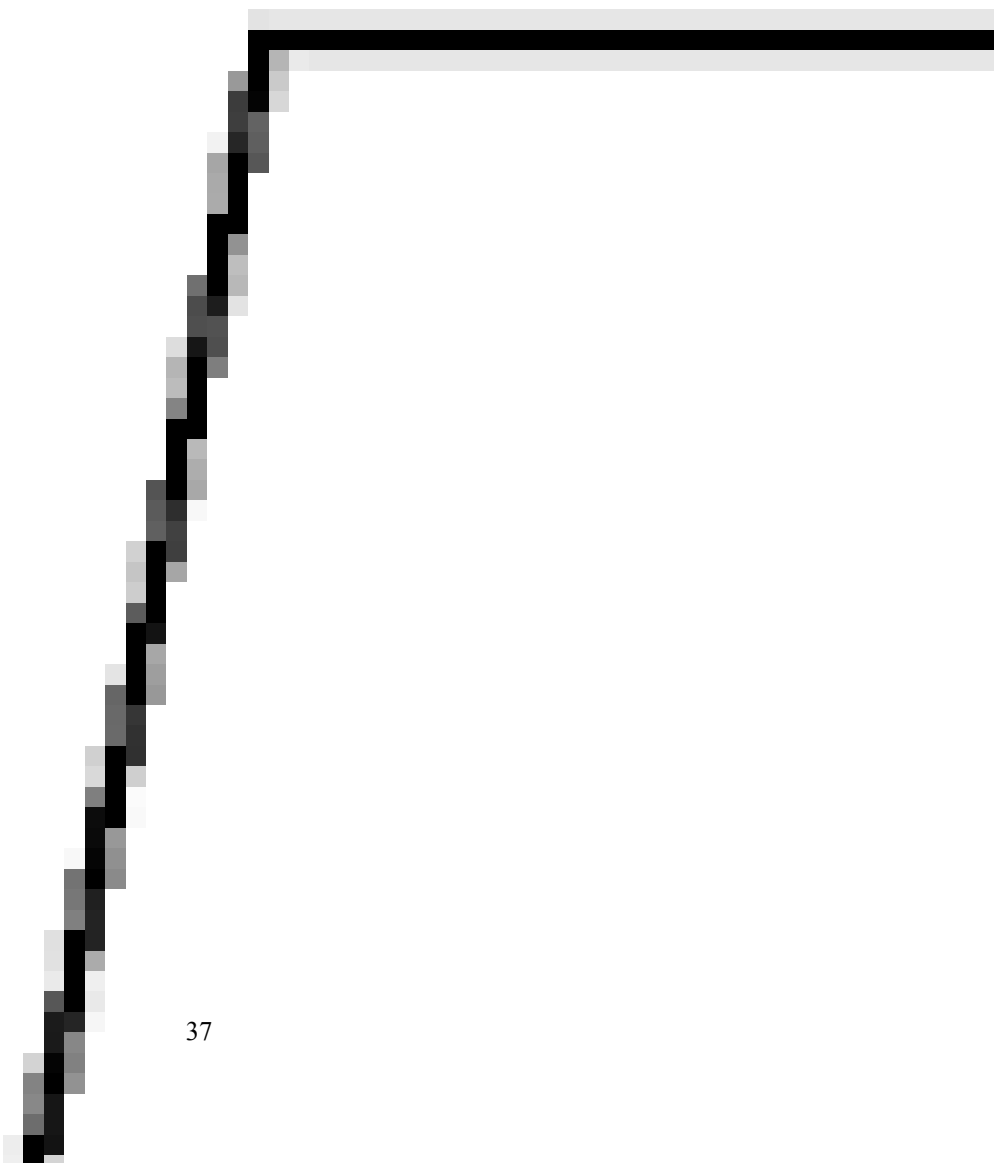
(la présence d'un facteur complexe n'est pas gênante puisque l'équation caractéristique est obtenue en posant $\rho = \exp(rt)$ dans l'équation différentielle vérifiée par ρ , le coefficient r appartenant au corps des complexes).

Il s'agit d'une équation du second degré en r (complexe) à coefficients complexes, dont le discriminant vaut

■

Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

* Si Δ est positif, les solutions seront $r = (i\omega_c \pm \sqrt{\Delta})/2$, soit en séparant la partie réelle et la partie imaginaire de r



Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

. Si A est non nul la norme de ρ , égale à la distance de l'électron à l'axe Oz diverge, l'électron n'est pas piégé.

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

* Si Δ est nul la solution est de la forme

■



Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

qui diverge également : l'électron n'est pas piégé.

* Si Δ est négatif les solutions de l'équation caractéristique sont imaginaires pures et les termes correspondants sont de la forme $A \exp(iat)$. La variable ρ reste bornée et le mouvement transversal décrit par ρ reste borné au voisinage de O.

Le mouvement transversal est donc borné si Δ est négatif, ce qui se traduit par l'inégalité $2\omega_z^2 < \omega_c^2$, soit en exprimant ω_z et ω_c : $-2eV_0/md^2 < (eB/m)^2$. Le champ B doit être supérieur à la valeur critique B_c donnée par

■

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

AN : $B_c = 2,34 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 2,34 \text{ mT}$

Pour $B > B_c$, $2\omega_z^2 - \omega_c^2 < 0$, d'où $r = i(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2})/2$. Compte tenu des notations de l'Énoncé et de l'Égalité forte $\omega_c \gg \omega_z$ on introduit les pulsations :





Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

La variable ρ vaut donc

■

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

o $\rho_0 b$ et $\rho_0 c$ sont des constantes d'intégration. Chacun des termes représente un mouvement circulaire d'amplitude $\rho_0 b$ et de pulsation ωb pour le premier, d'amplitude $\rho_0 c$ et de pulsation $\omega_0 c$ pour le second. Le mouvement transversal est la superposition de ces deux mouvements.

d) Si seule la composante en $\omega_0 c$ du mouvement est présente le mouvement est circulaire d'axe Oz. Cependant la force électrique tend à écarter l'électron de sa trajectoire circulaire en l'entraînant vers l'extérieur de celle-ci. Comme elle s'oppose au mouvement circulaire de l'électron la force électrique doit donc se traduire par une diminution de la pulsation par rapport à la pulsation ωc .

e) $\omega_z^2 / 2 \omega c^2 = 5,47 \cdot 10^{-8}$;

$$\omega_0 c = \omega c (1 - 5,47 \cdot 10^{-8}) \approx \omega c = 8,78 \cdot 10^{11} \text{ rad.s}^{-1} ;$$

$$\omega b = 5,47 \cdot 10^{-8} \omega c = 4,8 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1} \ll \omega_z \ll \omega_0 c \approx \omega c$$

3)

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

Mouvement

transversal



Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

puisque par hypothèse $\rho_0 c \ll \rho_0 b$. Le mouvement transversal est pratiquement un mouvement circulaire uniforme de pulsation ω_b auquel se superpose une perturbation de pulsation $\omega_0 c$ très supérieure (Éfestons)

Ce mouvement transversal se compose avec le mouvement axial harmonique de pulsation ω_z tel que $\omega_b \ll \omega_z \ll \omega_0 c$. Durant une Évolution l'Électron effectue de nombreuses oscillations selon Oz, et durant chacune de ces oscillations il décrit de nombreux Éfestons autour de sa position moyenne.

IV Détection du mouvement axial

1)

a) Les charges se répartissent sur les coupelles en fonction des interactions électrostatiques qu'elles subissent. A un instant donné l'électron occupe une certaine position entre les deux coupelles et exerce une force électrique répulsive sur chaque électron (porteur de charges dans le circuit) présent sur l'une des deux coupelles. Cette force décroît comme l'inverse du carré de la distance, puisqu'elle a pour origine le champ électrique créé par l'électron.

Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

Si l'électron se rapproche d'une des coupelles, les forces répulsives qu'il exerce sur les électrons de cette coupelle augmentent, tandis que celles qu'il exerce sur les électrons présents sur l'autre coupelle diminuent. Par conséquent il y aura dans le circuit un mouvement d'électrons dirigé de la coupelle dont l'électron part vers celle dont il s'éloigne. Par conséquent le mouvement axial de l'électron induit dans le circuit un courant dirigé vers la coupelle dont il s'approche. Compte tenu des conventions d'orientation :

$$I \, dz/dt < 0.$$

(Le raisonnement reste vrai quelque soit le signe des porteurs de charge. Il faut bien se rendre compte que ce mouvement existe même si l'électron n'atteint pas les armatures les actions électromagnétiques étant des actions à distance).

b) L'origine du courant I est le déplacement de l'électron piégé, caractérisé en particulier par sa vitesse (la position de l'électron et son accélération ne conviennent pas car on ne peut déduire de leur valeur le signe de la vitesse de l'électron qui caractérise le signe de l'intensité).

Il est donc raisonnable de penser que l'effet mesuré dépendra de cette vitesse et sera une fonction croissante de celle-ci. Le mouvement de l'électron piégé étant une superposition de mouvements sinusoïdaux, on a donc intérêt à choisir pour réaliser la détection un mouvement pour lequel le produit amplitude $\times$ pulsation (égal à la norme de la vitesse) est élevé la pulsation se trouve dans un domaine où la détection est aisée

$\omega_z = 2,903 \cdot 10^8 \, \text{rad.s}^{-1}$ correspond à $f_z = \omega_z/2\pi = 4,62 \, \text{MHz}$, fréquence située dans le domaine des radio-fréquences dont la détection est facile.

$\omega_c = 8,78 \cdot 10^{11} \, \text{rad.s}^{-1}$ correspond à $f_c = 1,4 \cdot 10^{11} \, \text{Hz} = 140 \, \text{GHz}$, fréquence située dans le domaine de l'infrarouge lointain. Ce mouvement n'est pas détectable par des méthodes électriques. Il faudrait avoir recours à des méthodes de type optique : mesure du rayonnement émis. D'autre part l'amplitude de ce mouvement est très faible (cf. question IV.4)

On choisit donc de préférence la détection du mouvement axial.

c) L'approximation des régimes quasi-permanents s'applique si la longueur d'onde associée au courant induit, égale à $2\pi c/\omega_z$ est grande devant les dimensions du circuit.

AN : $\lambda = (2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 / 2,9 \cdot 10^8) \, \text{m} = 6,5 \, \text{m}$. L'approximation des régimes quasi-permanents est donc vérifiée si la dimension du circuit est petite devant 6,5 m, ce qui représente une condition raisonnable.

2)

a) Si la résistance R est parcourue par l'intensité I , la tension U_{AB} à ses bornes vaut dans l'approximation des régimes quasi-permanents $U_{AB} = V_A - V_B = RI$ en respectant la convention d'orientation de I .

Compte tenu de l'orientation de l'axe z le champ E résultant entre les coupelles est donné en assimilant les deux coupelles à un condensateur plan par la relation

$$E = E_z = (V_B - V_A)/(2d) \, \mathbf{e}_z = -RI/(2d) \, \mathbf{e}_z$$

Par conséquent la force à laquelle est soumis l'électron du fait de E a pour expression :

$$\mathbf{f} = -eE = ReI/(2d) \, \mathbf{e}_z$$

b) On considère le système formé par le circuit : coupelles, fils de connexion et résistance, et l'électron piégé. Le seul échange d'énergie avec le milieu extérieur correspond à la chaleur qu'il cède par effet Joule. Son énergie totale doit donc décroître. L'énergie totale du système est la somme de l'énergie mécanique de l'électron (qui comprend son énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'électron dans le champ électrique du pôle) et de l'énergie électromagnétique du système. Si on néglige cette dernière devant l'énergie mécanique de l'électron on peut considérer que la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance est entièrement prélevée sur l'énergie mécanique de l'électron.

$$PJ = -dE_{\text{mec}}/dt.$$

La cause de la décroissance de l'énergie mécanique de l'électron est le couplage électrique avec le circuit, caractérisé par la force électrique $\mathbf{f}$ à laquelle est soumis l'électron. Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à l'électron s'écrit

$$dE_{\text{mec}}/dt = P_f = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = f \, dz/dt.$$

En combinant ces deux équations on obtient la relation :

$$f \, dz/dt = -RI^2, \text{ soit en exprimant } f$$

$$ReI/(2d) \, dz/dt = -RI^2 \text{ qui donne après simplifications :}$$

$$I = -dz/dt \, e/(2d) \text{ et } U_{AB} = RI = -dz/dt \, Re/(2d)$$

(On vérifie bien $I \, dz/dt < 0$)

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

c) L'électron est une charge ponctuelle en mouvement qui crée un champ non permanent : il n'y a pas conservation du flux de la densité volumique de courant, mais de la somme de la densité volumique de courant et de la densité de courant de déplacement $\partial \mathbf{E} / \partial t$. Le calcul de ce terme est nécessaire pour pouvoir exprimer le courant I .

Un modèle approché consiste à supposer la charge de l'électron répartie uniformément entre les armatures d'où une densité volumique constante $\rho = -e/(2dS)$ et une densité volumique de courant $\mathbf{j} = -e \, dz/dt / (2dS) \, \mathbf{e}_z$ entre les armatures, nulle à l'extérieur. Par intégration sur un plan parallèle aux armatures on en déduit une intensité équivalente au déplacement de l'électron $Ie = - dz/dt \, e/(2d)$. La conservation de la charge conduit alors à une intensité dans le circuit $I = - dz/dt \, e/(2d)$ qui est bien celle calculée précédemment.

3)

a) En reportant l'expression de I dans celle de f , on trouve la relation liant f à dz/dt :

$f = - R(e/2d)^2 \, dz/dt$. La force $\mathbf{f}$ est équivalente à une force de freinage fluide ce qui est cohérent avec l'analyse énergétique. En comptant $\mathbf{f}$ dans le bilan des forces subies par l'électron, l'équation de la projection de son mouvement sur l'axe Oz s'écrit après division par la masse m :

■

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti :

■

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

b) Si l'amortissement est très faible, le discriminant de l'équation caractéristique vaut

$\Delta = (1/\tau)^2 - 4\omega_z^2 \approx -4\omega_z^2$ en posant $\tau = 4md^2/(Re^2)$. Les solutions sont donc

$r = -(1/2\tau) \pm i\omega_z$ et les variations de la coordonnée axiale z de l'électron sont de la forme

$$z(t) = (A \cos(\omega_z t + \phi)) \cdot \exp(-t/2\tau)$$

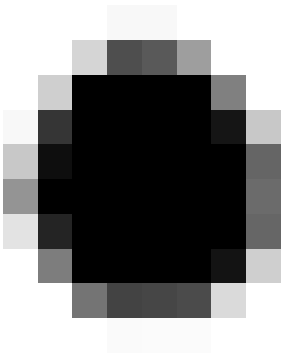
L'amplitude du mouvement est amortie exponentiellement, avec une constante de temps égale à 2τ .

L'énergie du mouvement axial est la somme de l'énergie cinétique de l'électron et de son énergie potentielle dans le champ électrique du pôle pour le mouvement axial :



Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

. Par dérivation on obtient



Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

puisque $1/\tau$ est très petit devant ω (hypothèse d'amortissement négligeable). En reportant les valeurs de z et de dz/dt dans l'expression de E , on en déduit son expression approchée



Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

La constante de temps d'amortissement de l'énergie de l'électron est donc

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

■

Corrigé Navale 92, deuxième Épreuve de physique

c) AN : $\tau = 56,2 \text{ s}$, $\gamma = 1/\tau = 1,78 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$. On vérifie bien $(1/\tau) \ll \omega_z$ (facteur 10^{10}).

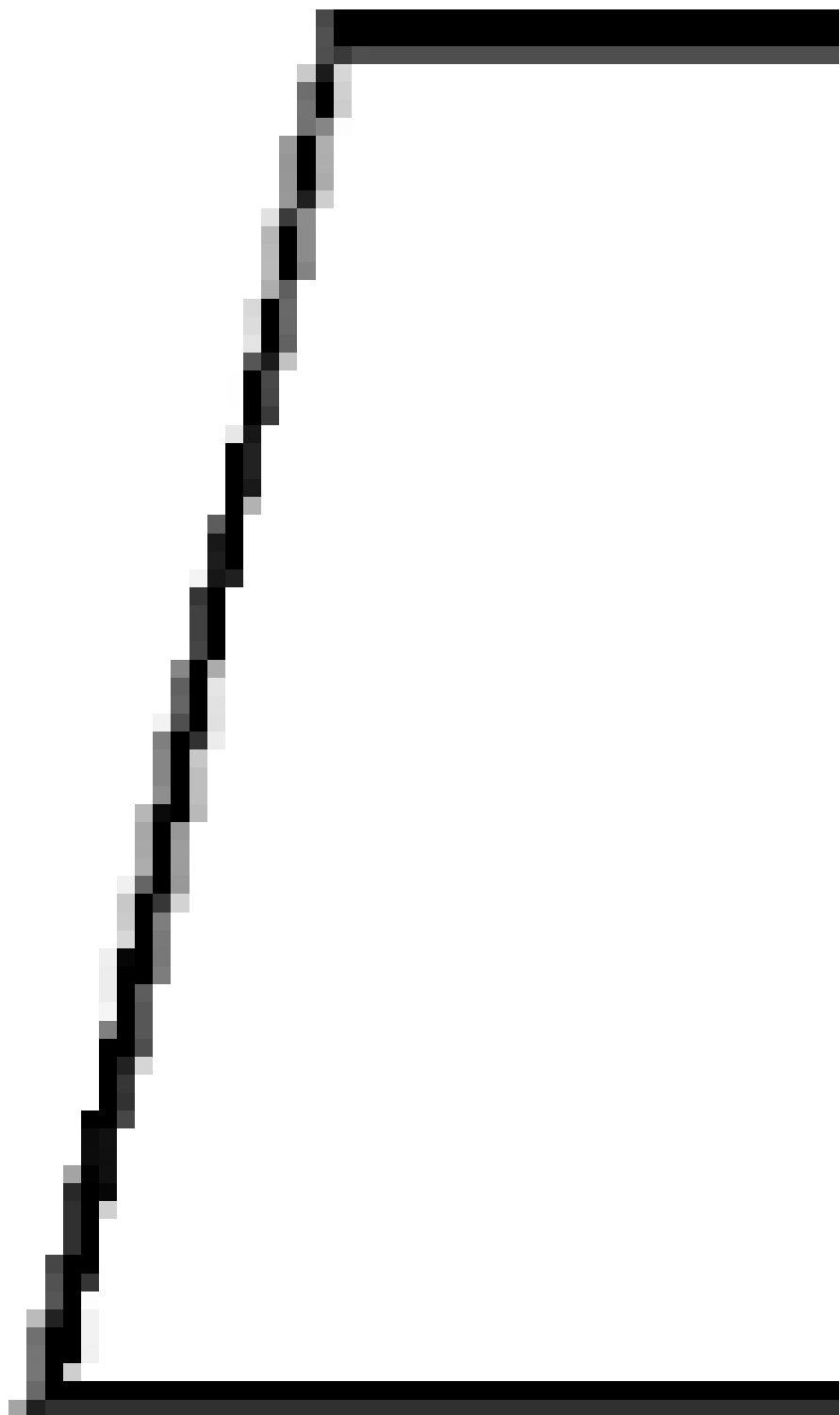
$$Q = \omega_z / \gamma = 1,63 \cdot 10^{10}.$$

Le facteur de qualité Q est relié à la décroissance relative d'énergie par période (cours).
Pendant une période



Corrigé Navale 92, deuxième épreuve de physique

Or $\tau \gg T = 2\pi/\omega_L$, $E(t)$ est pratiquement constant sur une période, et la variation relative d'énergie sur une période a pour expression approchée



La décroissance relative d'énergie de l'électron est donc inversement proportionnelle au facteur de qualité. Compte tenu de la valeur numérique de Q , l'électron perd $3,85 \cdot 10^{-8} \%$ de son énergie par période : la détection du mouvement a une influence négligeable sur celui-ci (tant que la durée de la mesure est très petite devant τ).

4) Parmi les autres causes d'amortissement on peut penser aux chocs entre l'électron et des particules présentes dans le pige (le vide absolu ne peut être atteint). Mais seules les particules négatives sont piégées au centre du pige, et ce problème n'est pas gênant tant que la qualité du vide dans le pige est bonne.

Par contre une cause essentielle d'amortissement du mouvement, dont on ne peut s'affranchir, est le **rayonnement émis par l'électron**. En effet toute particule chargée dont le mouvement a une accélération non nulle est une source de rayonnement électromagnétique (rayonnement de freinage ou *Bremstrahlung*) ; La puissance associée est proportionnelle au carré de la norme de l'accélération, donc

pour un mouvement harmonique de pulsation $\omega \propto \omega^4$. La composante du mouvement transversal de pulsation ω_c est beaucoup plus fortement amortie que la composante de pulsation ω_b , donc l'amplitude de ce dernier est prédominante (à amplitudes égales il y a un facteur $(8,78 \cdot 10^{11} / 4,8 \cdot 10^4)^4 = 1,2 \cdot 10^{29}$ entre les puissances dissipées pour chacune des composantes supposées indépendantes). Ceci justifie l'hypothèse faite à la question III.3.