Министерство образования Нижегородской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Арзамасский коммерческо-технический техникум»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

МДК 02.03 Математическое моделирование

по специальности среднего профессионального образования

09.02.07 Информационные системы и программирование

Арзамас
2020 г.

Рекомендованы к использованию
методическим объединением
информационных дисциплин
Протокол №___
от «___»_____________20 г

Председатель МО:
_________________Н.И. Богомолова

Составлены в соответствии с требованиями
к результатам освоения ППССЗ по
специальности 09.02.07 Информационные
системы и программирование

Зам. директора по УПРиЭД
__________________ А.Н. Ушанков

Н.А. Маликова, преподаватель специальных дисциплин ГБПОУ «Арзамасский коммерческо-технический техникум»

Методические указания содержат задания к практическим работам работам, порядок их выполнения, рекомендации, перечень контрольных вопросов по каждой лабораторной работе, требования к знаниям и умениям. Приведен список оборудования, основной литературы и нормативных документов, рекомендуемых для подготовки к лабораторным работам.

Методические указания предназначены для обучающихся специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование

Содержание

Введение

Лабораторные работы направлены на экспериментальное подтверждение и проверку существенных теоретических положений (законов, зависимостей и закономерностей), необходимых при освоении учебной дисциплины. В процессе практического занятия студенты выполняют одну практическую работу под руководством преподавателя в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.

Содержанием практических работ является выполнение различных практических приемов, в том числе профессиональных, работа с компьютером, программами компьютерной сеть Интернет.

Состав заданий для практического занятия спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время они могли быть выполнены качественно большинством студентов.

Выполнению практических работ предшествует проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению заданий.

Формы организации работы студентов на практических работах, как правило, фронтальная или индивидуальная.

При фронтальной форме организации работ все студенты выполняют одновременно одну и ту же работу.

При индивидуальной форме организации работ занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Выполнение практических работ по дисциплине МДК 02.03 Математическое моделирование направлено на формирование общих компетенций:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК 6. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе общечеловеческих ценностей.

ОК 7. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

ОК 8. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержание необходимого уровня физической подготовленности.

ОК 9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности

ОК 10 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языке

Выполнение лабораторных работ по дисциплине ОП.10 Численные методы направлено на формирование профессиональных компетенций:

ПК 2.1. Разрабатывать требования к программным модулям на основе анализа проектной и технической документации на предмет взаимодействия компонент.

ПК 2.2. Выполнять интеграцию модулей в программное обеспечение

ПК 2.3. Выполнять отладку программного модуля с использованием специализированных программных средств

ПК 2.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев для программного обеспечения

ПК 2.5. Производить инспектирование компонент программного обеспечения на предмет соответствия стандартам кодирования.

Лабораторная работа № 1
Построение простейших математических и статистических моделей. Решение простейших однокритериальных задач

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться строить математические модели задач принятия решений и находить оптимальное решение задач линейного программирования с использование электронных таблиц; научиться решать задачи линейного программирования с 2 неизвестными графическим методом.

ОБОРУДОВАНИЕ: ПК IBM, OS Windows, ПО Microsoft Excel

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Если задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция принимает в одной из вершин многогранника решений, построенного по области ограничений. Графический метод целесообразно применять для решения задач с двумя переменными, а также для решения задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух переменных.

Рассмотрим решение задачи линейного программирования графическим способом на следующем примере:

Пример. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в таблице. В ней также указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида, которое может быть использовано предприятием.

Вид сырья	**Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие**		**Общее количество сырья (кг)**
	А	В	
I	2	1	20
II	1	1	12
III	1	3	30
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	40	50	

Составить такой план выпуска изделий А и В, чтобы прибыль от их реализации была максимальной

Решение

1) Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида А и x_2 изделий В. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства:

$$\{2x_1 + x_2 \le 20\ x_1 + x_2 \le 12\ x_1 + 3x_2 \le 30\ x_1,\ x_2 \ge 0$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида А и x_2 изделий В составит $\mathbf{F = 40x_1 + 50x_2}$.

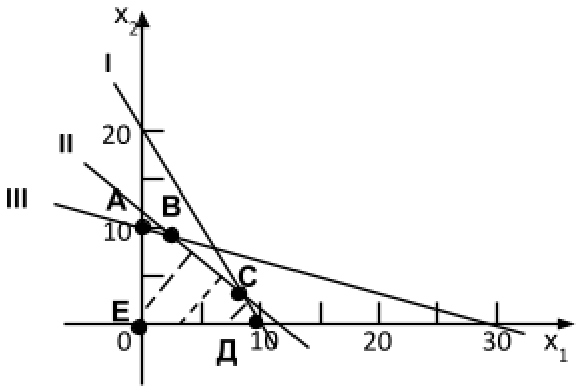
2) Найдем решение задачи, используя графический метод. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки равенств:

$$\{2x_1 + x_2 = 20 \quad I\ x_1 + x_2 = 12 \quad II\ x_1 + 3x_2 = 30 \quad III\ x_1 = 0 \qquad IV\ x_2 = 0 \qquad V$$

Построим каждую прямую (по двум точкам):

1		0
2	0	

I	$_1$		2
	$_2$	2	
I	$_1$		0
I	$_2$	0	



Определим полуплоскости, заданные неравенствами, в нашей задаче они будут находиться под построенными прямыми и ограничиваться осями координат.
Обозначим границы области многоугольника решений точками АВСДЕ.

3)Найдем координаты вершин многоугольника решений.

- **А (0; 10)**
- **В (пересечение прямых II и III).** Решим систему уравнений:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 + 3x_2 = 30 \end{cases}$

$-2x_2 = -18$

$x_2 = 9$

$x_1 = 12 - 9 = 3$ **В (3; 9)**

- **С (пересечение прямых II и I).** Решим систему уравнений:

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases}$

$x_1 = 8$

$x_2 = 12 - 8 = 4$ **С (8;4)**

- **Д (10;0)**
- **Е (0;0)**

4) Определим значение целевой функции в каждой точке:

F(A) = 40*0 + 50*10 = 500

F(B) = 40*3 + 50*9 = 570

F(C) = 40*8 + 50*4= 520

F(Д) = 40*10 + 50*0 = 400

F(E) = 0

Ответ: План выпуска составляет 3 изделия А и 9 изделий В, при этом прибыль = 570 рублей.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

1 вариант

Задание 1. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	

Древесина (м^3) I вида	0,2	0,1	40
Древесина (м^3) I вида	0,1	0,3	60
Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.)	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Задание 2. Используя графический метод, найдите решение задачи:

$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$\{4x_1 - 2x_2 \le 12 \ \ -x_1 + 3x_2 \le 6 \ 2x_1 + 4x_2 \ge 16$

2 вариант

Задание 1. Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице. В ней также указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования и прибыль от реализации одного изделия.

Тип оборудования	**Затраты времени (станко-час) на обработку одного изделия**		**Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч)**
	А	**В**	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	14	18	

Найти план выпуска изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Задание 2. Используя графический метод, найдите решение задачи:

$F = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$\{3x_1 - 2x_2 \le 12 \ \ -x_1 + 2x_2 \le 8 \ 2x_1 + 3x_2 \ge 6$

3 вариант

Задание 1. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	**Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать**		**Общее количество корма**
	лисица	**песец**	
I	2	3	180
II	4	1	240
Прибыль от реализации одной шкурки (тыс. руб.)	16	12	

Определить сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной

Задание 2. Используя графический метод, найдите решение задачи:

$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$\{x_1 + 2x_2 \leq 14\ \ -5x_1 + 3x_2 \leq 15\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24$

4 вариант

Задание 1. Мебельная фабрика выпускает книжные полки и шкафы. Их производство ограничено запасом необходимых ресурсов (древесно-стружечных плит (ДСП), высококачественных досок (ВД)). Нормы затрат ресурсов на единицу продукции, запасы ресурсов и прибыль от реализации приведены в таблице:

Вид ресурса	**Виды продукции**		**Запасы ресурсов**
	Полка	**Шкаф**	
ДСП	3	2	27
ВД	2	4	28
Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.)	4	7	

Составить производственный план выпуска продукции, который обеспечивал бы наибольшую прибыль.

Задание 2. Используя графический метод, найдите решение задачи:

$F = 15x_1 + 21x_2 \rightarrow \max$

$\{2x_1 + x_2 \leq 6\ x_1 + 2x_2 \leq 6\ x_1 + 6x_2 \geq 4$

Общее задание

Задание 3. Постановка задачи, построение и анализ математической модели.

1 этап. Анализ ситуации и формализация исходной проблемы

Внимательно прочитайте задачу: Лакокрасочному заводу «Олимп», в связи с изменившейся конъюнктурой рынка необходимо разработать новый производственный план для выпуска краски типов А и Б. Необходимо определить сколько в месяц следует производить краски типа А и сколько – типа Б.

Ответ может быть: чем больше, тем лучше. Т.е. необходимо увеличить до максимума производство как продукции А, так и продукции Б с учетом производственных возможностей. Производственные мощности позволяют выпускать в месяц суммарно 500 тоннкраски всех типов. *Первое ограничение* – общее количество краски типов А и Б не должно превышать 500 т.

Цель – производственный план должен приносить максимальную прибыль. Проанализировав бухгалтерскую отчетность, определено, что одна тонна краски А приносит в среднем 2000 руб. прибыли (удельная прибыль), а одна тонна краски Б – 2500 руб.

Для достижения такой цели надо производить только краску Б и забыть о краске типа А. Однако отдел маркетинга требует, чтобы краски А производилось не менее 200 т в месяц, поскольку есть договоры на такое количество, а краску типа Б нельзя производить более 150 т, поскольку большее количество трудно реализовать. Получили еще *два ограничения*: количество краски А должно быть не меньше 200 т., а краски Б – не более 150 т.

Для производства любой продукции нужны исходные материалы. Пусть на изготовление красок А и Б необходимо сырье трех видов согласно следующей таблице:

	Краска А, т	Краска Б, т	Месячный запас, т
Сырье 1	0,05	0,1	50
Сырье 2	0,07	0,08	30
Сырье 3	0,04	0,07	25

Общее количество сырья, используемого для производства краски, не должно превышать их месячные запасы. Таким образом, получим еще три ограничения – по одному для каждого типа сырья.

Задание 3.1. Сформулируйте результат анализа ситуации, постройте формальную модель.

1. **Проблема**:
2. **Цель**:
3. **Решение:**
4. **Факторы, от которых зависит решение задачи**:
5. **Факторы, влияющие на прибыль**:
6. **Ограничения**:

<u>2 этап. Построение математической модели</u>

Задание 3.2. Постройте математическую модель задачи

1. **Переменные:**
   x_1 –
   x_2 –
2. **Целевая функция:**
3. **Ограничения:**
   a. Производственное ограничение:
   b. Маркетинговые ограничения:
   c. Ограничения по сырью:
   d. Условия неотрицательности для переменной x_2:

Подбором определите допустимое решение задачи.

<u>3 этап. Анализ математической модели и получение математического решения проблемы</u>

Задание 4. Построение компьютерной модели для решения задачи

Задание 4.1. С помощью программы MicrosoftExcel постройте компьютерную модель и определите решение задачи.

1. Создайте таблицу в MicrosoftExcel по образцу (рис. 1):

	A	B	C	D	E	F
1	**Производственный план для завода "Олимп"**					
2		**Переменные решения**				
3		X1	X2			
4						
5						
6		**Коэффициенты целевой функции**		**Значение целевой функции**		
7		C1	C2	Z		
8						
9						
10	**Ограничения**	**Коэффициенты**		**Левая часть**	**Знак**	**Правая часть**
11	Призводственные					
12	2-е маркетинговое					
13	Сырье 1					
14	Сырье 2					
15	Сырье 3					
16	Неотрицательность					
17	1-е маркетинговое					
18						
19		**X1**	**X2**	**Z**		
20	**Решение**					
21						

рис. 1

2. Заполните ячейки:
   a. B4:C4 – произвольные числа (можно записать допустимое решение)
   b. B8:C8 – коэффициенты целевой функции

c. B11:C17 – коэффициенты ограничений (сначала ограничения со знаком ≤, потом с ≥). E11:E17 – знаки неравенств ограничений. F11:F17 – значения правых частей ограничений.

d. Ячейка: D8 – формула, реализующая целевую функцию $\mathbf{z = 2000x_1 + 2500x_2}$. Возможно два варианта построения такой формулы:

- = B4*B8 + C4*C8
- Вставить функцию: СУММПРОИЗВ (вычисляет сумму диапазонов или массивов)

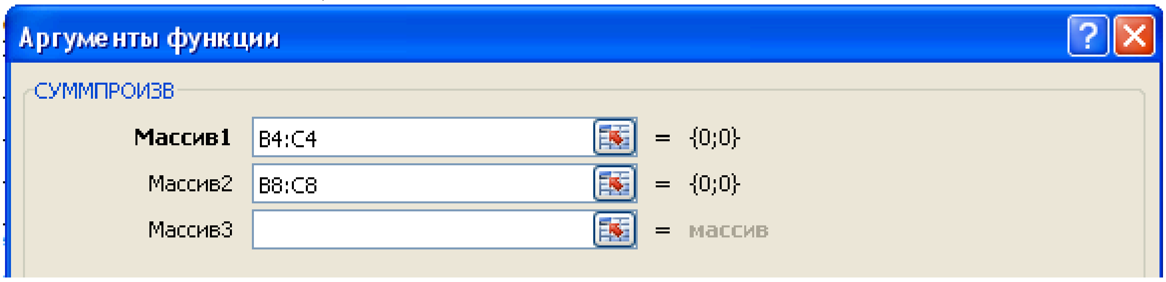


рис. 2

e. Ячейки D11:D17 заполнить также как и ячейку D8 соответствующими формулами.

f. Ячейка B20 – формула =ФИКСИРОВАННЫЙ(B4;2)&"т". (функция ФИКСИРОВАННЫЙ – форматирует число и преобразует его в текст с заданным числом десятичных знаков, запись &"т" добавляет к числу букву «т»).

g. Ячейка C20 – формула =ФИКСИРОВАННЫЙ(C4;2)&"т"

h. Ячейка D20 – формула = D8.

3. Выполните поиск решения

a. Выберите команду Данные – Поиск решения и укажите все параметры по образцу (адреса ячеек указывать с помощью мыши, а не вводить с клавиатуры):

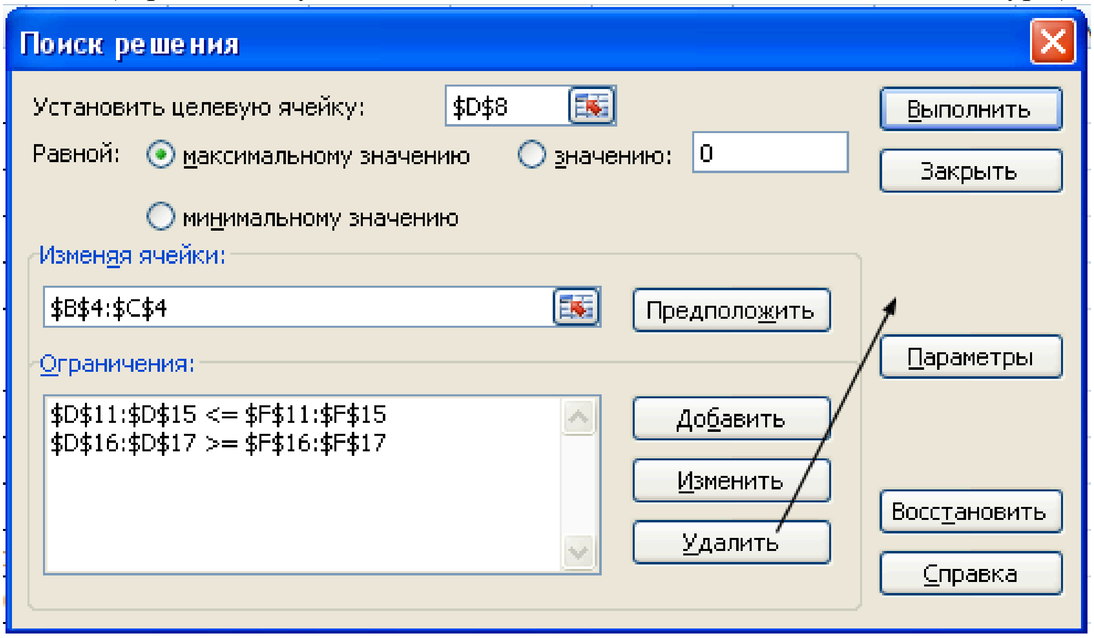


рис. 3

b. В окне Поиск решения задайте Параметры задачи по образцу:

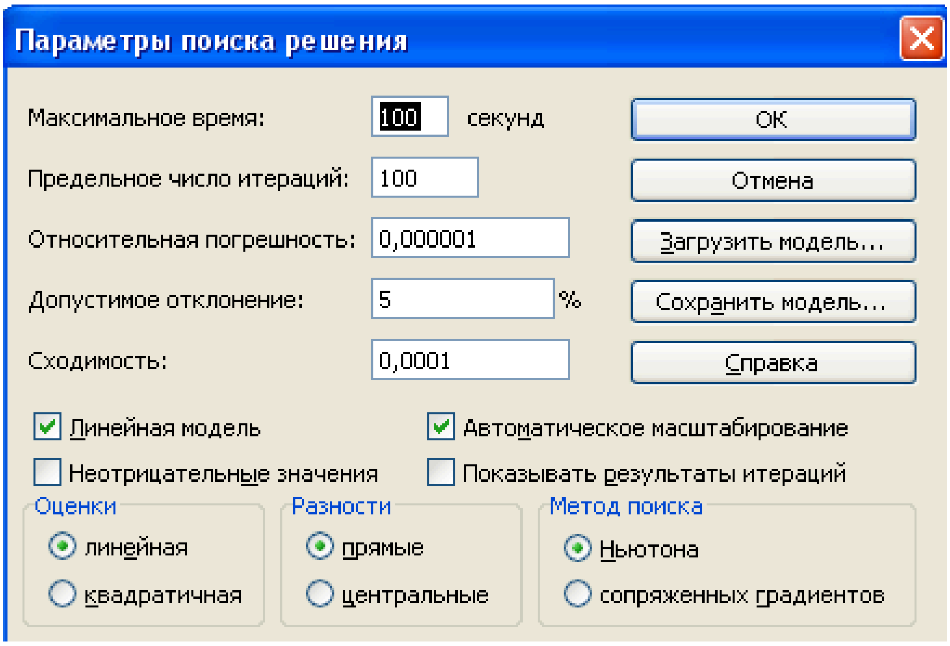


рис. 4

   c. В окне Результаты решения убедитесь, что решение найдено, все ограничения и условия оптимальности выполнены. Выберите команду Сохранить сценарий (название: Задача1) и затем нажмите на кнопку ***ОК.***

4. Запишите в отчет:
   a. получившуюся таблицу MicrosoftExcel с указанием формул в ячейках D8, D11:D17, B20, C20, D20(после таблицы)
   b. выделить решение задачи.
   c. Рис. 3 и рис 4.

4 этап. Анализ математического решения проблемы и формирование управленческого решения.

Задание 4.2. Сформулируйте управленческое решение на основе полученного математического решения

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что изучает линейное программирование?
2. Опишите алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом?

Лабораторная работа 2

«Сведение произвольной задачи линейного программирования к основной задаче линейного программирования. Решение задач линейного программирования симплекс–методом»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи линейного программирования симплекс-методом.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1.

Составьте оптимальный план производства продукции, дающий максимальную прибыль. Предприятие выпускает продукцию четырех видов П1, П2, П3, П4 с использованием для этого ресурсов, виды и нормы расхода по которым, а также уровень получаемой от их реализации прибыли, приведены в таблице.

Вид ресурса					Запас ресурса
	П1	П2	П3	П4	
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Оборудование	4	6	10	13	100

Прибыль	60	70	120	130	

Экономико-математическая модель задачи запишется следующим образом:

$x_1+x_2+x_3+x_4\leq 16$

$6x_1+5x_2+4x_3+3x_4\leq 110$

$4x_1+6x_2+10x_3+13x_4\leq 100$

$x_j\geq 0$ (j=1, 2, 3, 4)

Решение

1. Запустить табличный процессор Ms Excel.
2. Укажем адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки). Значения компонент $X(x_1,x_2,x_3,x_4)$ поместим в ячейках B3:E3, оптимальное значение целевой функции – в ячейку F4.
3. Введем исходные данные задачи в созданную форму-таблицу

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Задача ЛП			ПЕРЕМЕННЫЕ				
2		x1	x2	x3	x4			
3	ЗНАЧЕНИЕ					ПРИБЫЛЬ		
4	Коэффициенты ЦФ	60	70	120	130			
5	ОГРАНИЧЕНИЯ							
6	ВИД РЕСУРСОВ					Левая часть	Знак	Правая часть
7	Трудовые	1	1	1	1		≤	16
8	Сырье	6	5	4	3		≤	110
9	Оборудование	4	6	10	13		≤	100

4. Введем зависимость для целевой функции:

=СУММПРОИЗВ(B$4:E$4; B4:E4)

5. Ввести зависимости для ограничений:

- скопировать содержимое ячейки F4 в ячейки F7, F8, F9.

На вкладке «Данные» выбрать команду *Поиск решения*.

6. Назначим целевую функцию (установим целевую ячейку):

- курсор в строку *Установить целевую ячейку*;
- введем адрес ячейки $F$4;
- введем направление целевой функции в зависимости от условия задачи – *Максимальному значению*;
- курсор в строку *Изменяя ячейки*, введем адреса искомых переменных B$3:E$3.

7. Введем ограничения:

- кнопка **Добавить.** Появляется диалоговое окно **Добавление ограничения;**
- в строке **Ссылка на ячейку** введем адрес $F$7:$F$9,
- выберем знак ограничения ≤;
- в строке Ограничения введем адрес $H$7:$H$9, ОК.

8. Введем параметры для решения задачи линейного программирования:

- Выберите метод решения: **Поиск решения лин. задач симплекс-методом.**
- в окне **Результаты поиска решения** выбрать *Сохранить найденное решение* →ОК.

На экране отразится таблица с заполненными ячейками B3:E3 для значений x и ячейка F4 с максимальным значением целевой функции.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Задача ЛП			ПЕРЕМЕННЫЕ				
2		x1	x2	x3	x4			
3	ЗНАЧЕНИЕ	10	0	6	0	ПРИБЫЛЬ		
4	Коэффициенты ЦФ	60	70	120	130	1320		
5	ОГРАНИЧЕНИЯ							
6	ВИД РЕСУРСОВ					Левая часть	Знак	Правая часть
7	Трудовые	1	1	1	1	16	≤	16
8	Сырье	6	5	4	3	84	≤	130
9	Оборудование	4	6	10	13	100	≤	100

Вывод: Максимальный доход 1320 денежных единиц предприятие может получить при объемах выпуска продукции первого вида -10 единиц, третьего вида 6 единиц. Продукцию второго и четвертого вида выпускать невыгодно.

Задание 2.

Организация арендует баржу грузоподъёмностью 200 тонн. На барже предполагается перевозить груз 4-ех типов. Вес и стоимость единицы груза соответственно равны 20, 15, 20, 14 и 100, 80, 40, 30. Необходимо погрузить груз максимальной стоимости.

Экономико-математическая модель.

Пусть $x_j \geq 0$ (j=1, 2, 3, 4) – число предметов , которое следует погрузить на баржу. Тогда задача о подборе для баржи допустимого груза максимальной стоимости запишется следующим образом:

$\max f(x_1, x_2, x_3, x_4)=100\ x_1+80\ x_2+40\ x_3+30\ x_4$

$20\ x_1+15\ x_2+20\ x_3+14\ x_4 \leq 200\ x_j \geq (j=1, 2, 3, 4)$

Решение

1. Создать таблицу и ввести исходные данные

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Задача целочисленного ЛП			ПЕРЕМЕННЫЕ				
2		x1	x2	x3	x4	ЦФ		
3	ЗНАЧЕНИЯ							
4	Коэффициенты ЦФ	100	80	40	30			
5								
6								
7								
8	ОГРАНИЧЕНИЯ	20	15	20	14		≤	200

2. Ввести зависимость для целевой функции:

=СУММПРОИЗВ(B$4:E$4; B4:E4)

3. Ввести зависимость для ограничений:

- скопировать полученную формулу в ячейку F8.

На вкладке «Данные» выбрать команду *Поиск решения*.

4. Назначим целевую функцию (установим целевую ячейку)

- курсор в строку Установить целевую ячейку;
- введем адрес ячейки $F$4;
- введем направление целевой функции в зависимости от условия задачи – Максимальному значению;
- курсор в строку Изменяя ячейки, введем адреса искомых переменных B$3:E$3.

5. Введем ограничения:

- кнопка **Добавить**. Появится окно *Добавление ограничения*; в строке *Ссылка на ячейку* введем адрес $F$8;
- выберем знак ≤; в строке *Ограничение* введем адрес $H$8 → кнопка **Добавить**;
- в строке *Ссылка на ячейку* введем адрес $B$3: $E$3;
- выберем значение *цел*→ ОК. На экране появится окно **Поиск решения** с введенными условиями.

6. Введем параметры для решения задачи:
7. - Выберите метод решения: **Поиск решения лин. задач симплекс-методом.**
8. - в окне **Результаты поиска решения** выбрать *Сохранить найденное решение* →ОК.
9. - в окне **Результаты поиска решения** выбрать *Сохранить найденное решение* →ОК.

Получим решение.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Задача целочисленного ЛП			ПЕРЕМЕННЫЕ				
2		x1	x2	x3	x4	ЦФ		
3	ЗНАЧЕНИЯ	1	12	0	0			
4	Коэффициенты ЦФ	100	80	40	30	1060		
5								
6								
7								
8	ОГРАНИЧЕНИЯ	20	15	20	14	200	≤	200

Вывод: Таким образом, рекомендуемое управленческое решение с позиций принятого критерия оптимизации – следует погрузить 1 предмет первого типа и 12 предметов второго типа. В этом случае стоимость груза составит 1060 денежных единиц, и грузоподъемность будет использована полностью.

Задание 3.

Решить задачу. После того, как задача будет решена, на том же листе, где находится решение необходимо сформулировать вывод (Например: Максимальный доход *** денежных единиц предприятие может получить при объемах выпуска продукции 1-го вида - ** единиц, 3-го - ** единиц. Продукцию 2-го и 4-го вида выпускать не выгодно).

Вариант 1

Небольшая фирма производит два вида продукции: столы и стулья. Для изготовления одного стула требуется 3м древесины, а для изготовления одного стола –7м. На изготовление одного стула уходит 2ч рабочего времени, а на изготовление стола – 8ч. Каждый стул приносит 1 ден. ед. прибыли, а каждый стол - 3 ден. ед. Сколько стульев и сколько столов должна изготовить эта фирма, если она располагает 20 м древесины и 400 ч рабочего времени, чтобы получить максимальную прибыль?

Экономико-математическая модель (ЭММ)

Обозначим через X1 и X2 объемы производства стульев и столов.

Целевая функция - это математическая запись критерия оптимальности, т.е. выражение, которое необходимо максимизировать f(x)=3X1 + X2

Ограничения по ресурсам:

7X1 + 3X2 <= 20

8X1 + 2X2 <= 400

X1 + X2 = цел

X1, X2 >=0

Вариант 2

Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В. Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в 2 раза больше, чем акций В, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед. Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, а по акциям В – 10%. Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?

Экономико-математическая модель (ЭММ)

Обозначим через X1, X2 объемы вложений соответственно в концерн А и предприятие В. Целевая функция - это математическая запись критерия оптимальности, т.е. выражение, которое необходимо максимизировать f(x)=0,08X1 + 0,1X2

Ограничения:

X1 + X2 <= 300

X2 <= 100

X1 >= 200

X1, X2 >=0

Вариант 3

Фирма выпускает три вида кожаных изделий. На изготовление единицы продукции первого вида затрачивается 0,2 ч работы дубильного участка, 0,6 работы раскройного участка и 0 ч работы завершающего участка; на изготовление 2го изделия – 0,3; 0,5; 0 ч; на изготовление третьего изделия – 0,4; 0,4; 0,8 ч соответственно. Прибыль от единицы продукции первого вида – 6 ден. ед., второго вида – 7 ден. ед., третьего вида – 10 ден. ед. В течение месяца рабочее время каждого участка ограничено следующим образом:

Дубильного участка – 320ч

Раскройного участка – 400ч

Завершающего участка – 160ч

Сколько изделий каждого вида должна выпустить фирма за месяц, чтобы прибыль был максимальной?

Экономико-математическая модель (ЭММ)

Обозначим через X1, X2, X3 объемы производства соответствующего вида кожаных изделий.

Целевая функция - это математическая запись критерия оптимальности, т.е. выражение, которое необходимо максимизировать f(x)=6X1 + 7X2 + 10X3 Ограничения:

$0,2X1 + 0,3X2 + 0,4X3 <= 320$

$0,6X1 + 0,5X2 + 0,4X3 <= 400$

$0,8X3 <= 160$

$X1, X2, X3 >=0$

Вариант 4

Намечается выпуск двух видов костюмов – мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. На мужской костюм – 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. Определите число костюмов каждого вида, обеспечивающее максимальную прибыль предприятию. Прибыль от реализации женского костюма составляет 10 ден. ед., а от мужского – 20 ден. ед. При этом следует иметь ввиду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов и обеспечить прибыль не менее 1400 ден. ед.

Экономико-математическая модель (ЭММ)

Обозначим через X1 и X2 объемы производства женских и мужских костюмов. Целевая функция - это математическая запись критерия оптимальности, т.е. выражение, которое необходимо максимизировать $f(x)=10X1 + 20X2$

Ограничения по ресурсам:

$X1 + 3,5X2 <= 350$

$2X1 + 0,5X2 <= 240$

$X1 + X2 <= 150$

$X2 >=60$

$10 X1 + 20X2 >=1400$

Вариант 5

Для составления плана выпуска четырех видов продукции P1, P2, P3 и P4 на предприятии используют три вида сырья S1 S2 и S3. Объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль, полученная в результате выпуска каждого вида продукции, приведены в таблице. Какое количество продукции всех видов необходимо производить, чтобы прибыль была максимальной.

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P1	P2	P3	P4
S1	35	4	2	2	3
S2	30	1	1	2	3
S3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Экономико-математическая модель (ЭММ)

Обозначим через X1, X2, X3, X4 объемы производства соответствующего вида продукции. Целевая функция - это математическая запись критерия оптимальности, т.е. выражение, которое необходимо максимизировать $f(x)=14X1 + 10X2 + 14X3 + 11X4$

Ограничения по ресурсам:

$4X1 + 2X2 + 2X3 + 3X4 <= 35$

$X1 + X2 + 2X3 + 3X4 <= 30$

$3X1 + X2 + 2X3 + X4<= 40$

$X1, X2, X3, X4>=0$

Вариант 6

Пусть предприятие производит стулья и столы. Расход ресурсов на их производство и прибыль от их реализации представлены в таблице.

Продукты и ресурсы	Столы	Стулья	Объем ресурсов
Расход древесины на изделие	0,5	0,04	200
Расход труда	12	0,6	1800
Прибыль от реализации ед. изд.	180	20	-

Кроме того, на производство 80 столов заключен контракт с муниципалитетом, который, безусловно, должен быть выполнен. Составьте такую оптимальную производственную программу, чтобы прибыль от реализации продукта была максимальной.

Обозначим через X1 и X2 объемы производства столов и стульев.

Целевая функция - это математическая запись критерия оптимальности, т.е. выражение, которое необходимо максимизировать f(x)=180X1 + 20X2

Ограничения по ресурсам:

0,5X1 + 0,04X2 <= 200

12X1 + 0,6X2 <= 400

X1 >=80

X1, X2 >=0

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Опишите алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс-методом?
2. Чем оптимальный опорный план отличается от начального?

Лабораторная работа 3.
Решение транспортной задачи

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться определять опорной план транспортной задачи методами «северо-западного угла», минимального элемента и аппроксимации Фогеля; научиться определять оптимальный план транспортной задачи в ПО Microsoft Excel.

ОБОРУДОВАНИЕ: ПК IBM, ПО Microsoft Excel.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Для нахождения опорного плана транспортной задачи используются 3 метода:

1. Метод северо-западного угла.

При нахождении опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла на каждом шагу рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} («северо-западный угол») и заканчивается клеткой для неизвестного x_{mn}, т.е. идет как бы по диагонали таблицы. При этом в клетку записывается минимальное значение между запасами и потребностями.

2. Метод минимального элемента

Сущность метода минимального элемента состоит в выборе клетки с минимальным тарифом. Если таких клеток несколько, то можно взять любую из них.

3. Метод аппроксимации Фогеля

При определении опорного плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольше разности между двумя минимальными тарифами.

Нахождение оптимального плана транспортной задачи с помощью ПО Microsoft Excel

Рассмотрим следующую транспортную задачу. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовить 100, 150 и 50 условных единиц кирпича (предложение поставщиков). Потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов ежедневно составляют 75, 80, 60 и 85 условных единиц (спрос потребителей). Тарифы перевозок одной условной единицы кирпича с каждого из заводов к каждому из строящихся объектов задаются матрицей транспортных расходов С.

(6 7 3 5 1 2 5 6 8 10 20 1)

Требуется составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

Решение в программе Microsoft Excel

1. Ввести исходные данные как на рис. 1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Матрица транспортных расходов**					**Предложение поставщиков**	
2		6	7	3	5		100	
3		1	2	5	6		150	
4		8	10	20	1		50	
5								
6	**Спрос потребителей**	75	80	60	85			
7								
8		**Матрица перевозок**					**Фактически реализовано**	
9		**потреб. 1**	**потреб. 2**	**потреб. 3**	**потреб. 4**			
10	**поставщик 1**							
11	**поставщик 2**							
12	**поставщик 3**							
13								
14	**Фактически получено**							
15								
16	**Транспортные расходы по потребителям**					**Итого**		
17								

рис. 1

2. Заполнить ячейки с помощью формул (результат на рис. 2):

a. Все ячейки диапазона B10:E12 – числами ***0,01***

b. Ячейка G10 – формула =***СУММ(B10:E10)*** (скопировать эту формулу вниз до ячейки G12)

c. Ячейка B14 – формула =***СУММ(B10:B12)*** (скопировать эту формулу вправо до ячейки E14)

d. Ячейка B16 – формула =***СУММПРОИЗВ(B2:B4;B10:B12)***

e. Ячейка G16 – формула =***СУММ(B16:E16)***

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Матрица транспортных расходов**					**Предложение поставщиков**	
2		6	7	3	5		100	
3		1	2	5	6		150	
4		8	10	20	1		50	
5								
6	**Спрос потребителей**	75	80	60	85			
7								
8		**Матрица перевозок**					**Фактически реализовано**	
9		**потреб. 1**	**потреб. 2**	**потреб. 3**	**потреб. 4**			
10	**поставщик 1**	0,01	0,01	0,01	0,01		0,04	
11	**поставщик 2**	0,01	0,01	0,01	0,01		0,04	
12	**поставщик 3**	0,01	0,01	0,01	0,01		0,04	
13								
14	**Фактически получено**	0,03	0,03	0,03	0,03			
15								
16	**Транспортные расходы по потребителям**	0,15	0,19	0,28	0,12	**Итого**	0,74	
17								

рис. 2

3. Поставьте курсор в ячейку G16 и выберите команду меню ***Данные – Поиск решения***. Заполните появившееся окно, как показано на рис. 3. В параметрах окна поставьте галочку на переключателе «Линейная модель». Нажмите кнопку Выполнить.

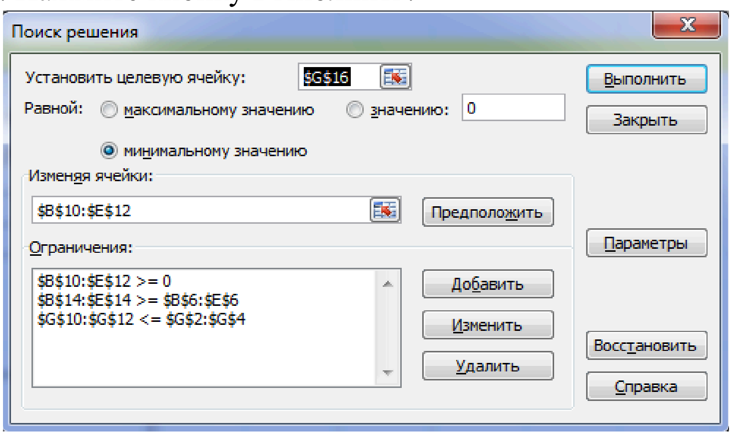


рис. 3

4. Результат решения рис. 4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Матрица транспортных расходов					Предложение поставщиков	
2		6	7	3	5		100	
3		1	2	5	6		150	
4		8	10	20	1		50	
5								
6	Спрос потребителей	75	80	60	85			
7								
8		Матрица перевозок					Фактически реализовано	
9		потреб. 1	потреб. 2	потреб. 3	потреб. 4			
10	поставщик 1	5	0	60	35		100	
11	поставщик 2	70	80	0	0		150	
12	поставщик 3	0	0	0	50		50	
13								
14	Фактически получено	75	80	60	85			
15								
16	Транспортные расходы по потребителям	100	160	180	225	Итого	665	
17								

рис. 4

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Найти план перевозок транспортной задачи согласно своему варианту методом «северо-западного угла», методом минимального элемента и аппроксимации Фогеля.

I вариант

На трех складах A_1, A_2, A_3 оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 180, 60 и 80 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина B_1, B_2, B_3, B_4. Каждый из магазинов должен получить соответственно 120, 40, 60 и 80 ед. Тарифы перевозок единицы груза из каждого из складов во все магазины задаются матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

II вариант

Производственное объединение имеет в своем составе три филиала A_1, A_2, A_3, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 50, 30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя B_1, B_2, B_3, B_4, расположенные в разных местах. Их потребности соответственно равны 30, 30, 10 и 30 ед. Тарифы перевозок единицы груза от каждого из филиалов соответствующим потребителям задаются матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

III вариант

Три предприятия данного экономического района A_1, A_2, A_3 могут производить некоторую однородную продукцию в количествах соответственно равных 180, 350 и 20 ед. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 в количествах, соответственно равных 110, 90, 120, 80 и 150 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей:

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

IV вариант

На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный товар в количествах, соответственно равных 115, 175 и 130 ед. Этот груз требуется перевезти в пять пунктов назначения B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соответственно в количествах 70, 220, 40, 30, 60 ед. Тарифы перевозок приведены в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 7 & 3 \\ 9 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

V вариант

На четыре базы A_1, A_2, $A_{3,}$ A_4 поступил однородный товар в количествах, соответственно равных 280, 175, 125 и 130 ед. Этот груз требуется перевезти в четыре пункта назначения B_1, B_2, B_3, B_4, соответственно в количествах 90, 180, 310, 130 ед. Тарифы перевозок приведены в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

VI вариант

На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный товар в количествах, соответственно равных 510, 90, 120 ед. Этот груз требуется перевезти в четыре пункта назначения B_1, B_2, B_3, B_4, соответственно в количествах 270, 140, 200, 110 ед. Тарифы перевозок приведены в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Выполнить задание «Нахождение оптимального плана транспортной задачи с помощью ПО Microsoft Excel» из методических указаний.

Задание 3. Найти оптимальное решение для задачи своего варианта в программе Microsoft Excel.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое транспортная задача?
2. Какой метод используется для определения оптимального опорного плана транспортной задачи?

Лабораторная работа 5.
Задача о замене оборудования. Нахождение кратчайших путей в графе. Решение задачи о максимальном потоке

Задание 1.

Перейдите по следующей ссылке:

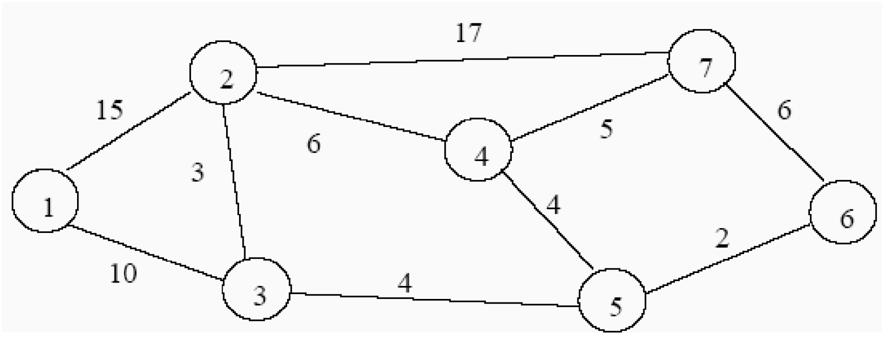
https://www.youtube.com/watch?v=Sgeh21sRuGE

Постройте таблицу в Excel по алгоритму из видео.

Задание 2. Нахождение кратчайшего пути

Определим кратчайший путь между вершинами 1 и 7 на представленном графе.

Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки. Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 1? (На графе склад обозначен вершиной 7)



Составим таблицу. Номера вершин от 2 до 7 расположим по горизонтали. Это пункты назначения, то есть вершины, в которые мы придем. Вершины от 1 до 6 расположим по вертикали – это исходные пункты. Пункты назначения начинаем нумеровать со второго, так как вершина 1 – это исходный пункт и в него прийти нельзя. Исходные пункты нумеруем от 1 до 6, так как пункт 7 – конечный и выход из него невозможен.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		пункты назначения						
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7	
3	1							
4	2							
5	3							
6	4							
7	5							
8	6							
9								
10								

Внутри таблицы запишем расстояния. Так расстояние из вершины 1 в вершину 2 равно 15, значит на пересечении строки «исходный пункт1» и столбца «пункт назначения 2» ставим число 15.

Расстояние из вершины 1 в вершину 3 равно 10, значит на пересечении строки «исходный пункт1» и столбца «пункт назначения 3» ставим число 10.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		пункты назначения						
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7	
3	1	**15**	**10**					
4	2							
5	3							
6	4							
7	5							
8	6							
9								

По графу видим, что из вершины 2 можно попасть в вершину 3 (это расстояние равно 3)или в вершину 4 (расстояние равно 6), или в вершину 7 (расстояние равно 17). На пересечении строки «исходный пункт 2» и столбца «пункт назначения 3» ставим число 4. На пересечении строки «исходный пункт 2» и столбца «пункт назначения 4» ставим число 6. На пересечении строки «исходный пункт 2» и столбца «пункт назначения 7» ставим число 17.

1		пункты назначения						
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7	
3	1	**15**	**10**					
4	2		**3**	**6**			**17**	
5	3							
6	4							
7	5							
8	6							
9								

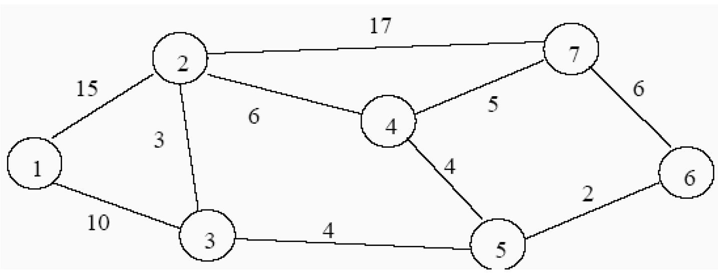
Аналогично заполним в таблицу расстояния из вершины 3 в вершины 2 и 5, которые соответственно равны 3 и 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		пункты назначения						
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7	
3	1	**15**	**10**					
4	2		**3**	**6**			**17**	
5	3	**3**			**4**			
6	4							
7	5							
8	6							
9								

По графу мы видим, что из вершины 4 можно попасть в вершины 2,5,7, расстояние до которых соответственно равны 6,4,5. Занесем эти числа в таблицу:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		пункты назначения						
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7	
3	1	**15**	**10**					
4	2		**3**	**6**			**17**	
5	3	**3**			**4**			
6	4	**6**			**4**		**5**	
7	5							
8	6							

По графу мы также видим, что из вершины 5 можно попасть в вершины 3,4, 6, расстояние до которых соответственно 4,4,2.



А из вершины 6 можно попасть в вершины 5 и 7, расстояния до которых 2 и 6. Занесем эти расстояния в нашу таблицу:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		пункты назначения						
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7	
3	1	**15**	**10**					
4	2		**3**	**6**			**17**	
5	3	**3**			**4**			
6	4	**6**			**4**		**5**	
7	5			**4**		**2**		
8	6				**2**		**6**	
9								

Путь из вершины 2 в вершину 2, из 3 в 3 и т.д. будет равен 0. Занесем эти величины в таблицу:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		пункты назначения						
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7	
3	1	**15**	**10**					
4	2	**0**	**3**	**6**			**17**	
5	3	**3**	**0**		**4**			
6	4	**6**		**0**	**4**		**5**	
7	5			**4**	**0**	**2**		
8	6				**2**	**0**	**6**	
9								

Пустые клеточки в нашей таблице говорят о том, что пути в некоторые вершины нет. Например, рассмотрим строку «исходный пункт 1». Из пункта 1 нет пути в пункты назначения 4,5,6,7. Но оставить соответствующие клетки пустыми мы не можем. Поэтому, чтобы программа поиска решения в Excel начала правильно работать, мы в эти ячейки запишем числа, намного большие самого большого из уже записанных. Тогда, так как мы будем искать кратчайший путь, программа эти значения будет отбрасывать. Например, так как самое большое число в таблице 15, а 100 > 15, мы в пустые ячейки таблицы запишем 100 (Можете записать 500 или 1000, любое число, которое вам нравится). Получим таблицу:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		пункты назначения						
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7	
3	1	**15**	**10**	**100**	**100**	**100**	**100**	
4	2	**0**	**3**	**6**	**100**	**100**	**17**	
5	3	**3**	**0**	**100**	**4**	**100**	**100**	
6	4	**6**	**100**	**0**	**4**	**100**	**5**	
7	5	**100**	**100**	**4**	**0**	**2**	**100**	
8	6	**100**	**100**	**100**	**2**	**0**	**6**	
9								

(Цвет записи чисел менять необязательно!)

Теперь составим вторую таблицу «План перемещения по кратчайшему пути». Начало работы по составлению таблицы полностью совпадает с составлением первой таблицы, но внутреннюю часть таблицы заполнять не будем. Записываем пункты назначения по горизонтали и исходные пункты по вертикали, но вставим дополнительную строку и дополнительный столбец «наличие», которые заполним единицами.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		пункты назначения							
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7		
3	1	**15**	**10**	**100**	**100**	**100**	**100**		
4	2	**0**	**3**	**6**	**100**	**100**	**17**		
5	3	**3**	**0**	**100**	**4**	**100**	**100**		
6	4	**6**	**100**	**0**	**4**	**100**	**5**		
7	5	**100**	**100**	**4**	**0**	**2**	**100**		
8	6	**100**	**100**	**100**	**2**	**0**	**6**		
9									
10			пункты назначения						
11			2	3	4	5	6	7	
12	исходные пункты	наличие	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	
13	1	**1**							
14	2	**1**							
15	3	**1**							
16	4	**1**							
17	5	**1**							
18	6	**1**							
19									

В строке внизу таблицы найдем суммы по столбцам:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		пункты назначения							
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7		
3	1	**15**	**10**	**100**	**100**	**100**	**100**		
4	2	**0**	**3**	**6**	**100**	**100**	**17**		
5	3	**3**	**0**	**100**	**4**	**100**	**100**		
6	4	**6**	**100**	**0**	**4**	**100**	**5**		
7	5	**100**	**100**	**4**	**0**	**2**	**100**		
8	6	**100**	**100**	**100**	**2**	**0**	**6**		
9									
10			пункты назначения						
11			2	3	4	5	6	7	
12	исходные пункты	наличие	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	
13	1	**1**							
14	2	**1**							
15	3	**1**							
16	4	**1**							
17	5	**1**							
18	6	**1**							
19	сумма	=СУММ(B13:B18)							
20		СУММ(**число1**; [число2]; ...)							

Получим в ячейке B20 число 6. Найдем суммы столбцов для пунктов назначения 2,3,..7, протянув ячейку B20:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		пункты назначения							
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7		
3	1	**15**	**10**	**100**	**100**	**100**	**100**		
4	2	**0**	**3**	**6**	**100**	**100**	**17**		
5	3	**3**	**0**	**100**	**4**	**100**	**100**		
6	4	**6**	**100**	**0**	**4**	**100**	**5**		
7	5	**100**	**100**	**4**	**0**	**2**	**100**		
8	6	**100**	**100**	**100**	**2**	**0**	**6**		
9									
10			пункты назначения						
11			2	3	4	5	6	7	
12	исходные пункты	наличие	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	
13	1	**1**							
14	2	**1**							
15	3	**1**							
16	4	**1**							
17	5	**1**							
18	6	**1**							
19	сумма	6							
20									

Получим:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		пункты назначения							
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7		
3	1	15	10	100	100	100	100		
4	2	0	3	6	100	100	17		
5	3	3	0	100	4	100	100		
6	4	6	100	0	4	100	5		
7	5	100	100	4	0	2	100		
8	6	100	100	100	2	0	6		
9									
10			пункты назначения						
11			2	3	4	5	6	7	
12	исходные пункты	наличие	1	1	1	1	1	1	
13	1	1							
14	2	1							
15	3	1							
16	4	1							
17	5	1							
18	6	1							
19	сумма	6	0	0	0	0	0	0	
20									

Теперь найдем суммы по строкам с исходными пунктами:

СУММПРОИЗВ =СУММ(C12:H12)

Функции Книга1 Книга2 *

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		пункты назначения								
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7			
3	1	15	10	100	100	100	100			
4	2	0	3	6	100	100	17			
5	3	3	0	100	4	100	100			
6	4	6	100	0	4	100	5			
7	5	100	100	4	0	2	100			
8	6	100	100	100	2	0	6			
9										
10			пункты назначения							
11			2	3	4	5	6	7		
12	исходные пункты	наличие	1	1	1	1	1	1	=СУММ(C12:H12)	
13	1	1							СУММ(**число1**; [число2];	
14	2	1								
15	3	1								
16	4	1								
17	5	1								
18	6	1								
19	сумма	6	0	0	0	0	0	0		
20										

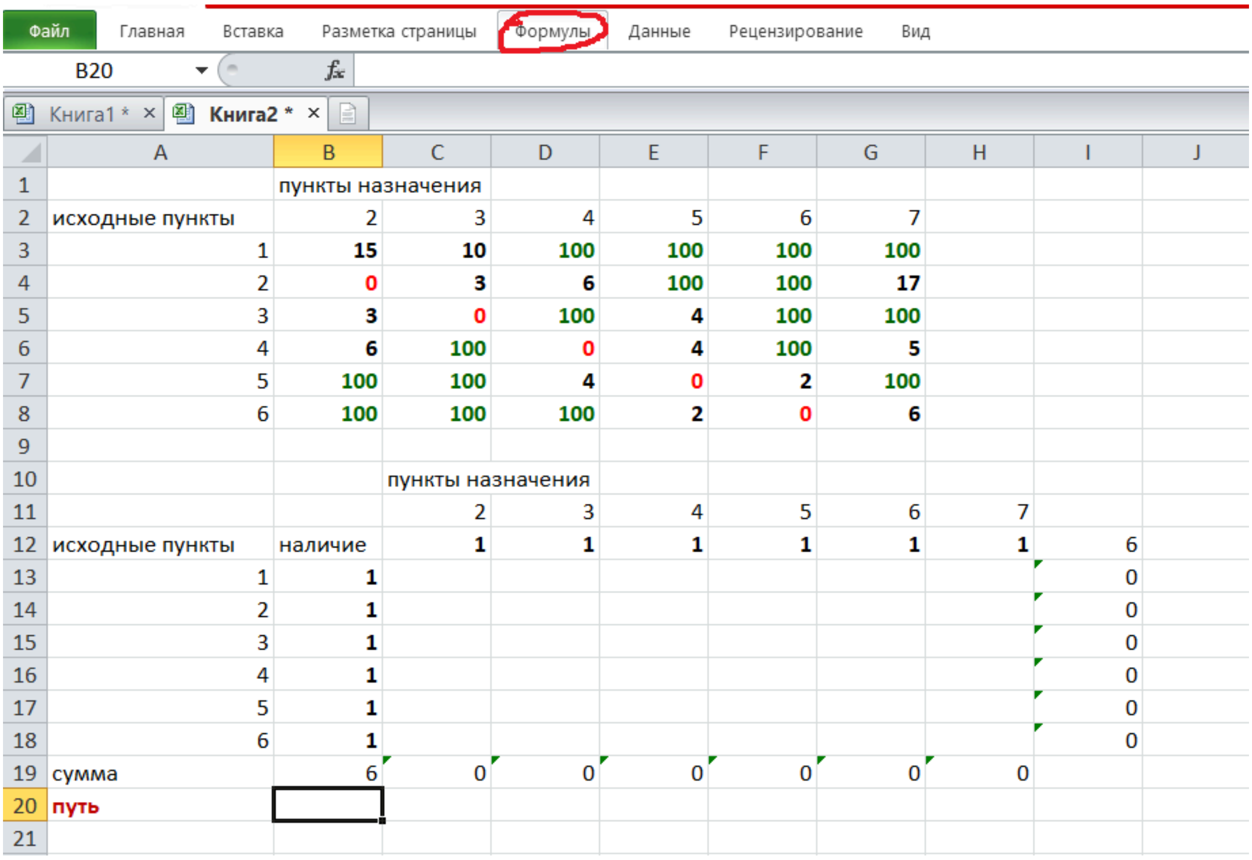
I12 f_x =СУММ(C12:H12)

Книга1 * × Книга2 * ×

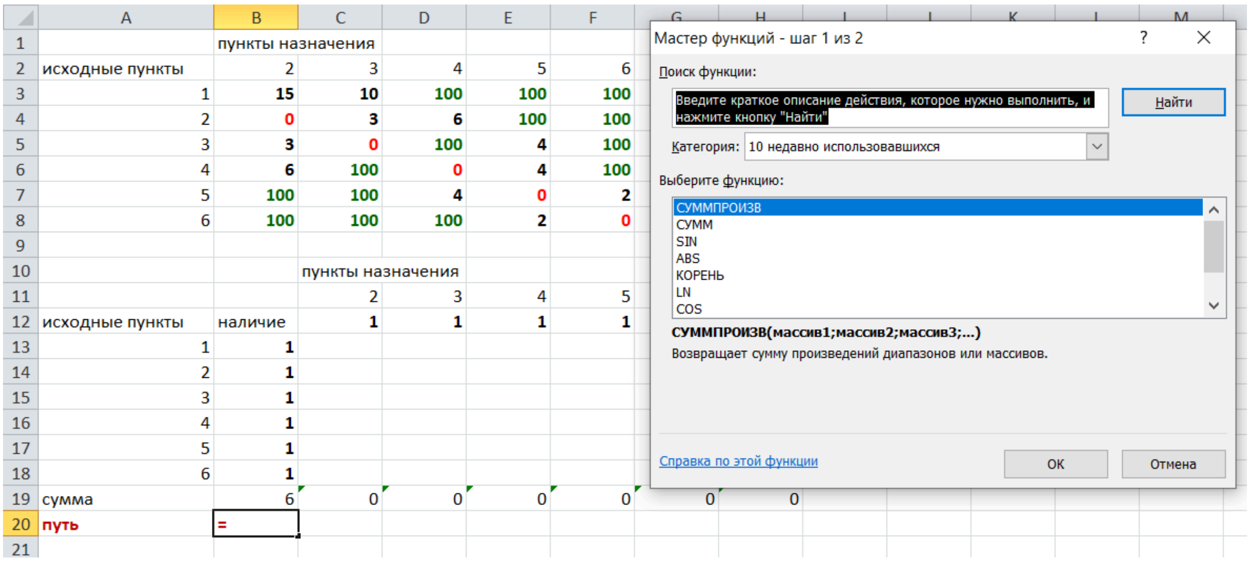
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		пункты назначения								
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7			
3	1	**15**	**10**	**100**	**100**	**100**	**100**			
4	2	**0**	**3**	**6**	**100**	**100**	**17**			
5	3	**3**	**0**	**100**	**4**	**100**	**100**			
6	4	**6**	**100**	**0**	**4**	**100**	**5**			
7	5	**100**	**100**	**4**	**0**	**2**	**100**			
8	6	**100**	**100**	**100**	**2**	**0**	**6**			
9										
10			пункты назначения							
11			2	3	4	5	6	7		
12	исходные пункты	наличие	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	6	
13	1	**1**								
14	2	**1**								
15	3	**1**								
16	4	**1**								
17	5	**1**								
18	6	**1**								
19	сумма	6	0	0	0	0	0	0		
20										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		пункты назначения								
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7			
3	1	**15**	**10**	**100**	**100**	**100**	**100**			
4	2	**0**	**3**	**6**	**100**	**100**	**17**			
5	3	**3**	**0**	**100**	**4**	**100**	**100**			
6	4	**6**	**100**	**0**	**4**	**100**	**5**			
7	5	**100**	**100**	**4**	**0**	**2**	**100**			
8	6	**100**	**100**	**100**	**2**	**0**	**6**			
9										
10			пункты назначения							
11			2	3	4	5	6	7		
12	исходные пункты	наличие	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	6	
13	1	**1**							0	
14	2	**1**							0	
15	3	**1**							0	
16	4	**1**							0	
17	5	**1**							0	
18	6	**1**							0	
19	сумма	6	0	0	0	0	0	0		
20										

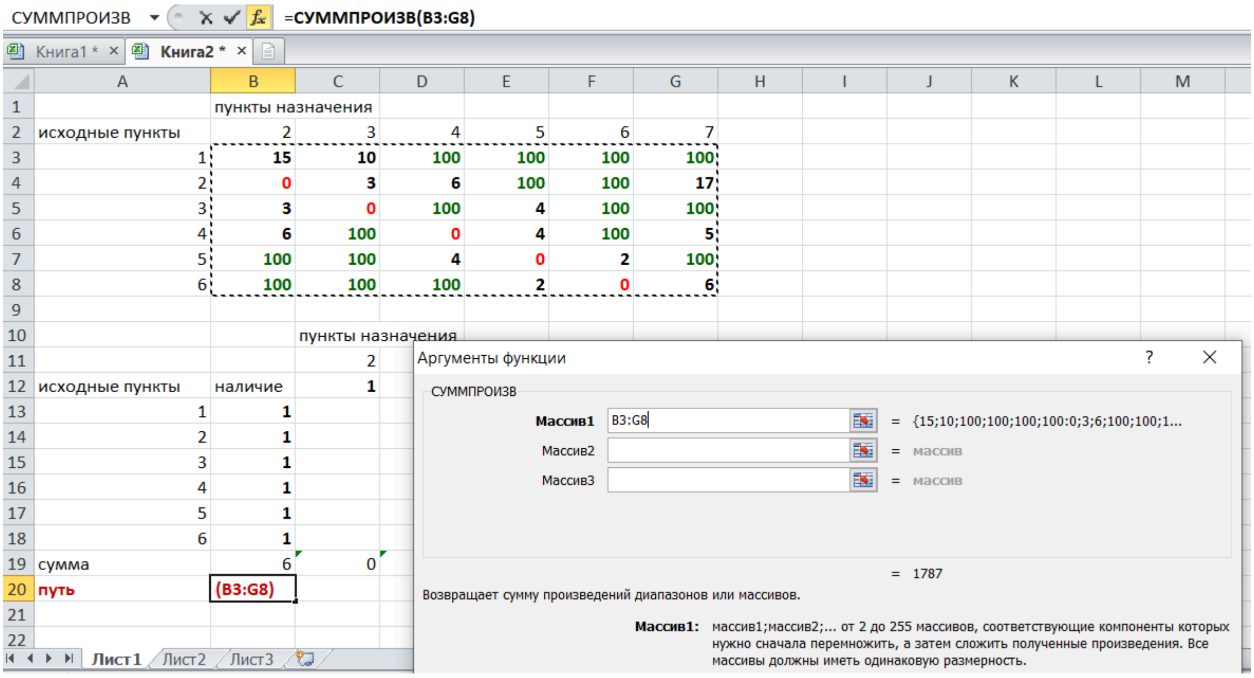
Теперь зададим формулой весь пройденный путь, это сумма произведений ячеек второй и первой таблиц. Для этого выделяем ячейку соответствующую пройденному пути, заходим на вкладку формулы, выбираем вставить функцию, находим СУММПРОИЗВ:



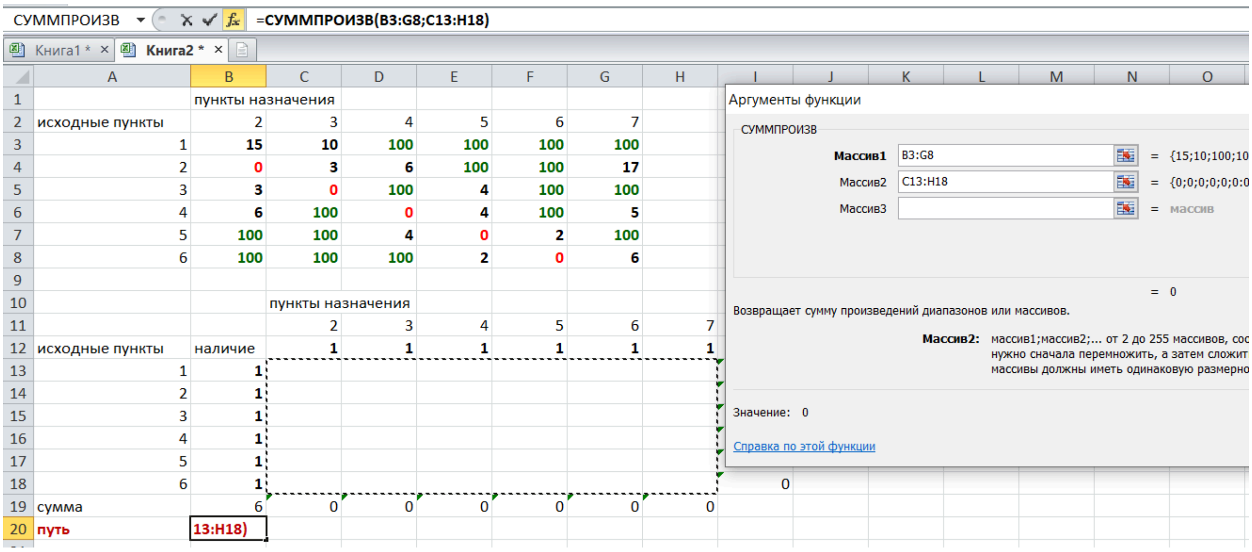
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		пункты назначения								
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7			
3	1	15	10	100	100	100	100			
4	2	0	3	6	100	100	17			
5	3	3	0	100	4	100	100			
6	4	6	100	0	4	100	5			
7	5	100	100	4	0	2	100			
8	6	100	100	100	2	0	6			
9										
10			пункты назначения							
11			2	3	4	5	6	7		
12	исходные пункты	наличие	1	1	1	1	1	1	6	
13	1	1							0	
14	2	1							0	
15	3	1							0	
16	4	1							0	
17	5	1							0	
18	6	1							0	
19	сумма	6	0	0	0	0	0	0		
20	путь									
21										



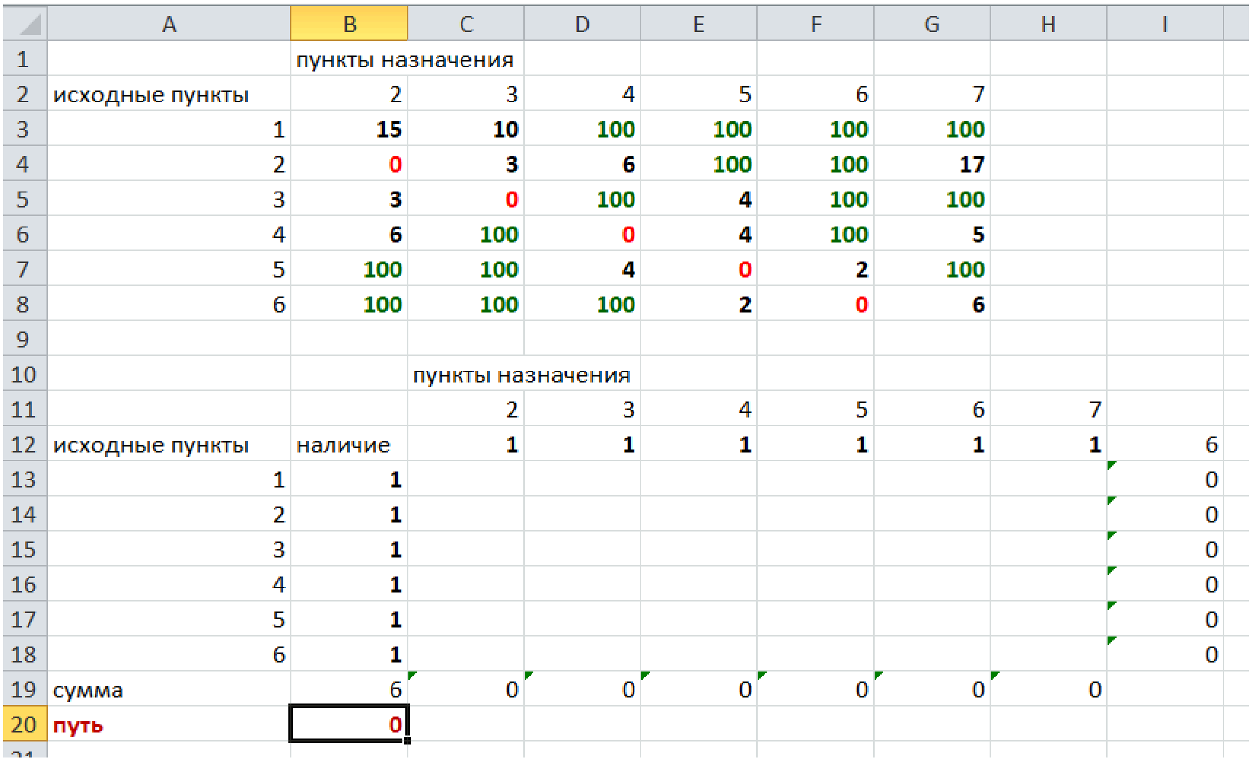
В качестве массива 1 выделяем все ячейки внутри первой таблицы:



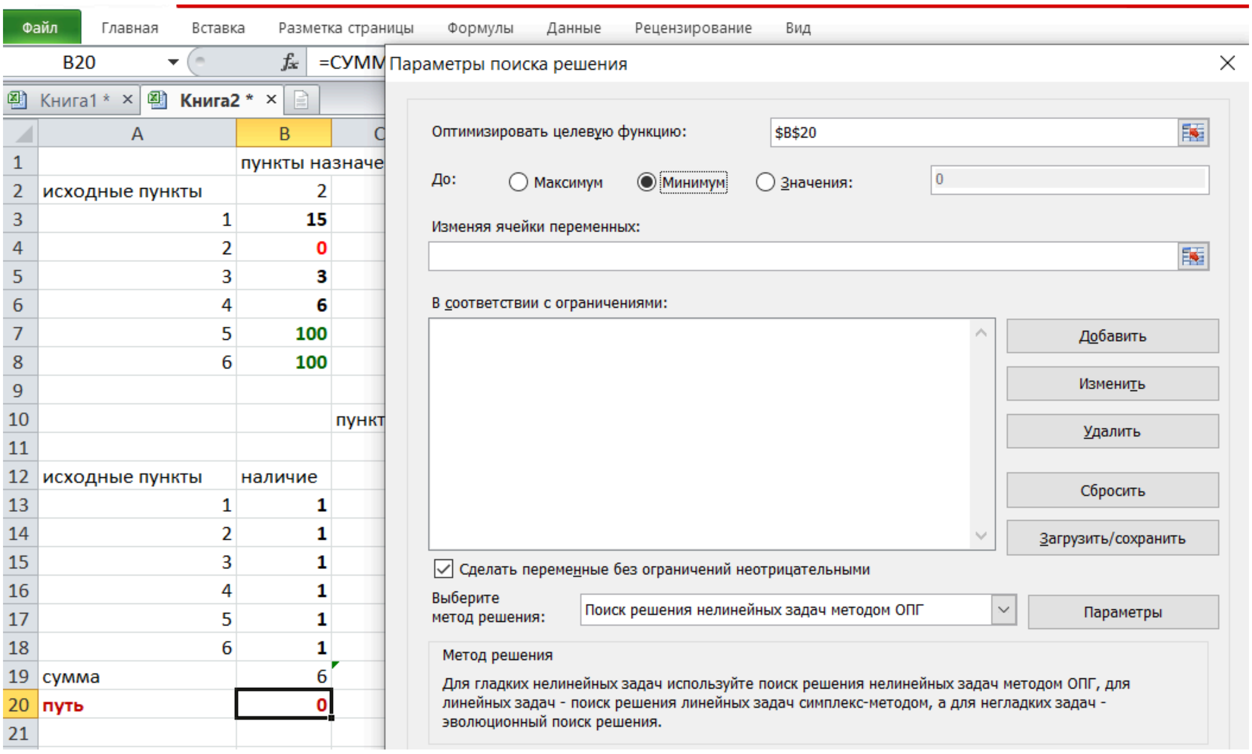
В качестве массива 2 выбираем ячейки внутри второй таблицы:



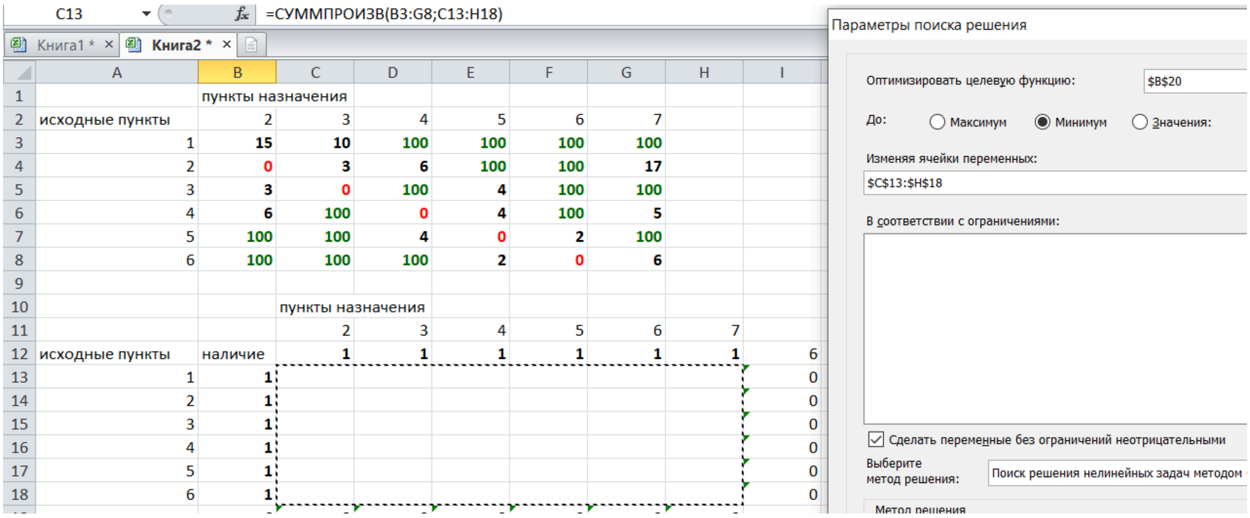
Массив 3 не заполняем. Нажимаем ОК.



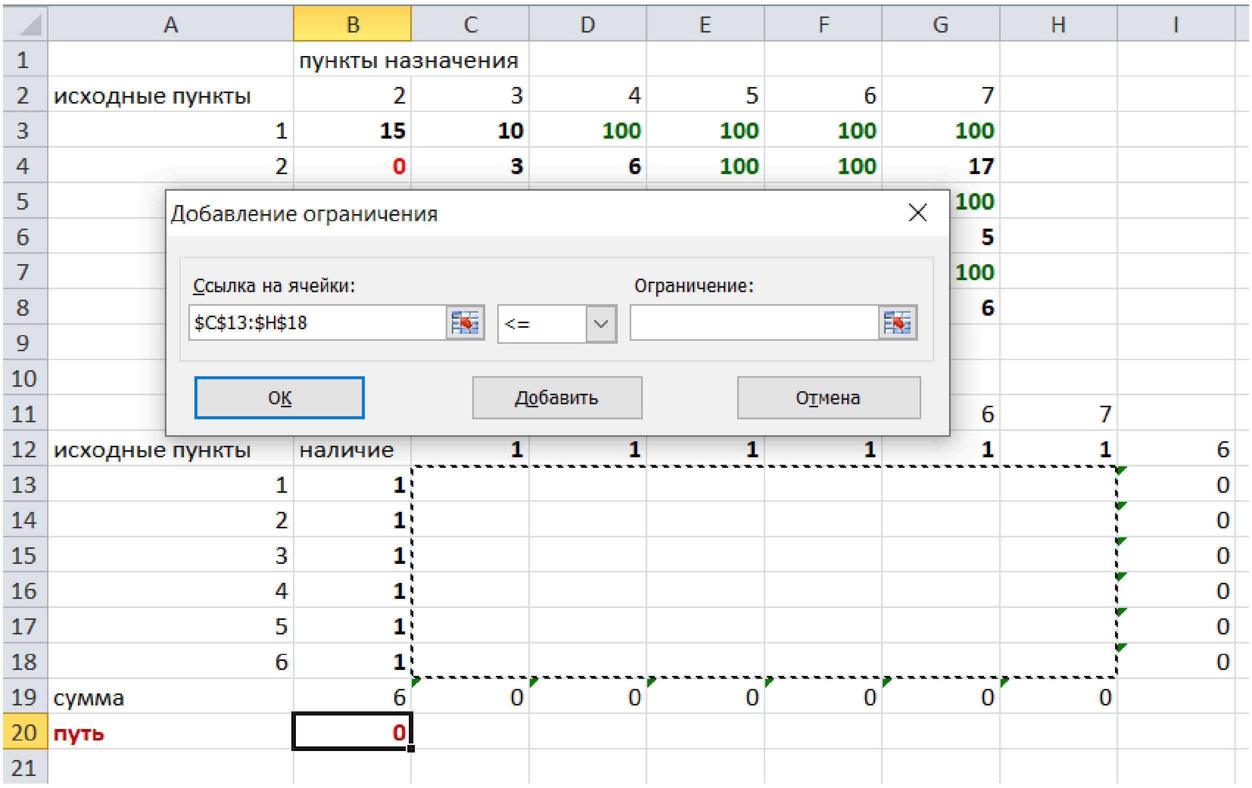
Выделяем ячейку соответствующую пройденному пути, там у нас пока записано число 0. На вкладке «данные» находим «поиск решения». Нам надо, чтобы пройденный путь был самым коротким, поэтому выбираем «оптимизировать целевую функцию» на «минимум».

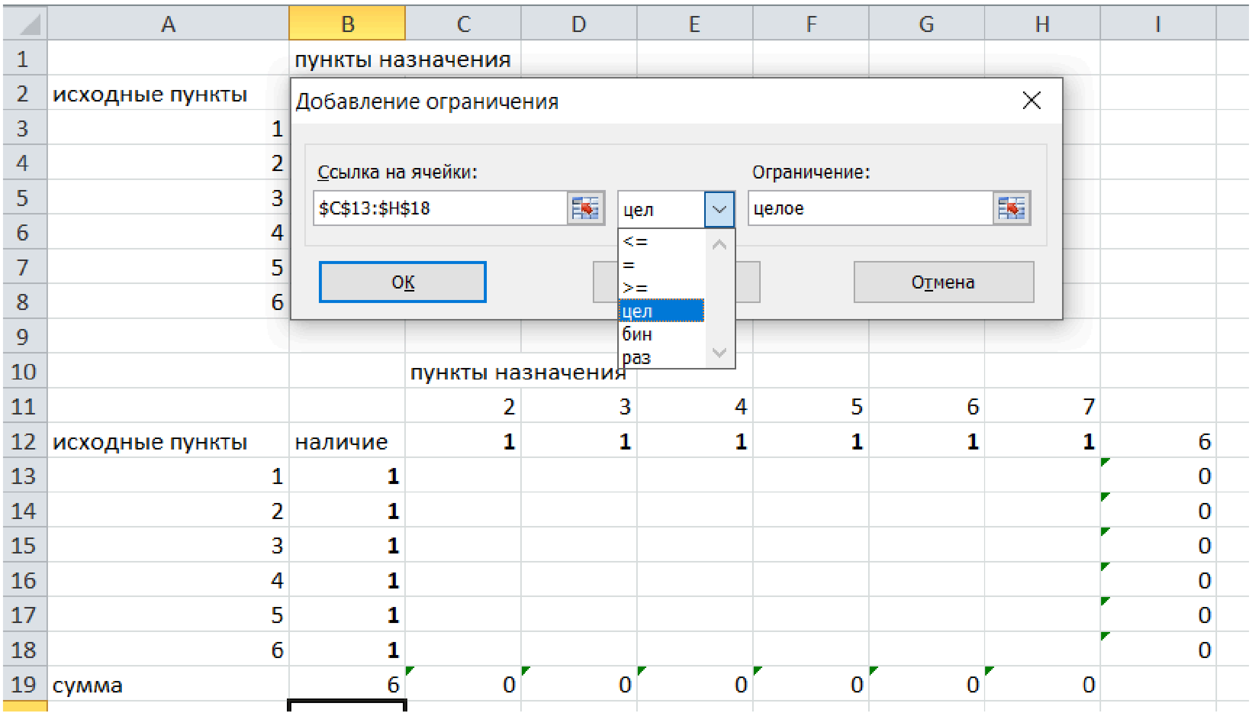


Изменять будем ячейки, стоящие внутри второй таблицы.

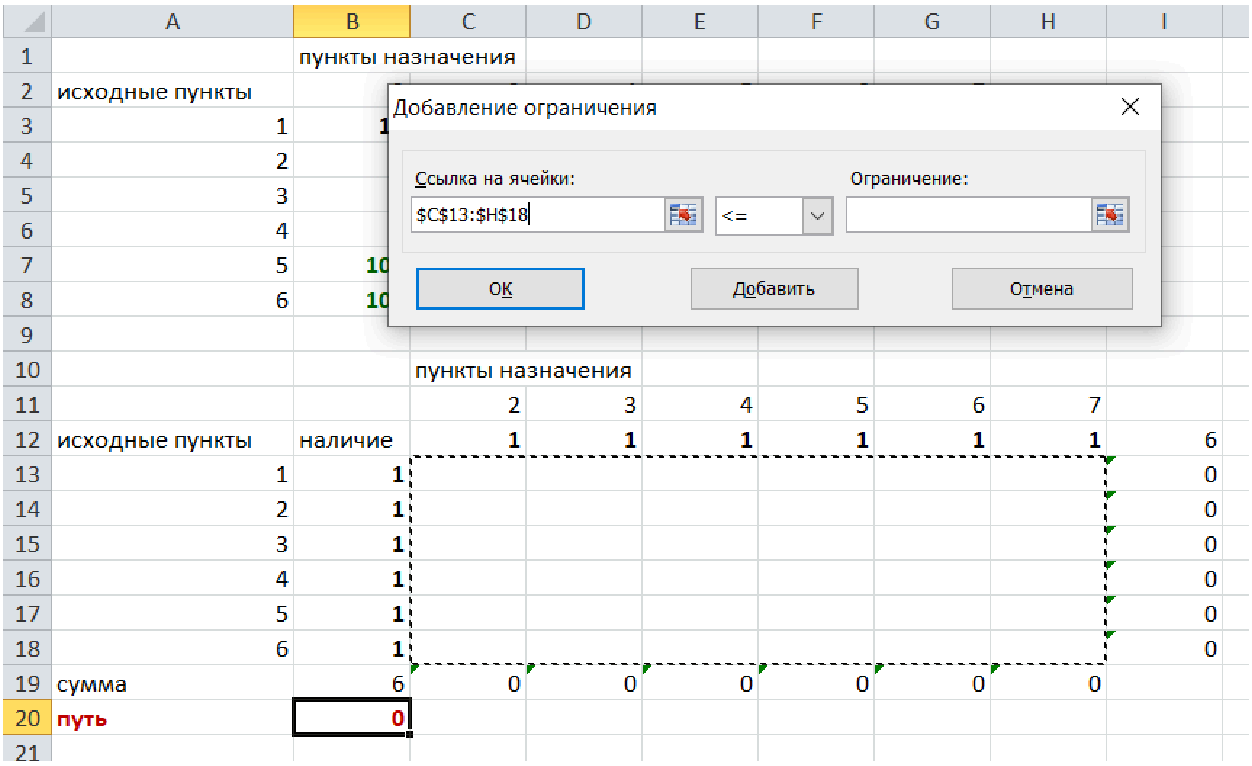


Теперь необходимо добавить ограничения. Числа стоящие внутри второй таблицы должны быть положительными.

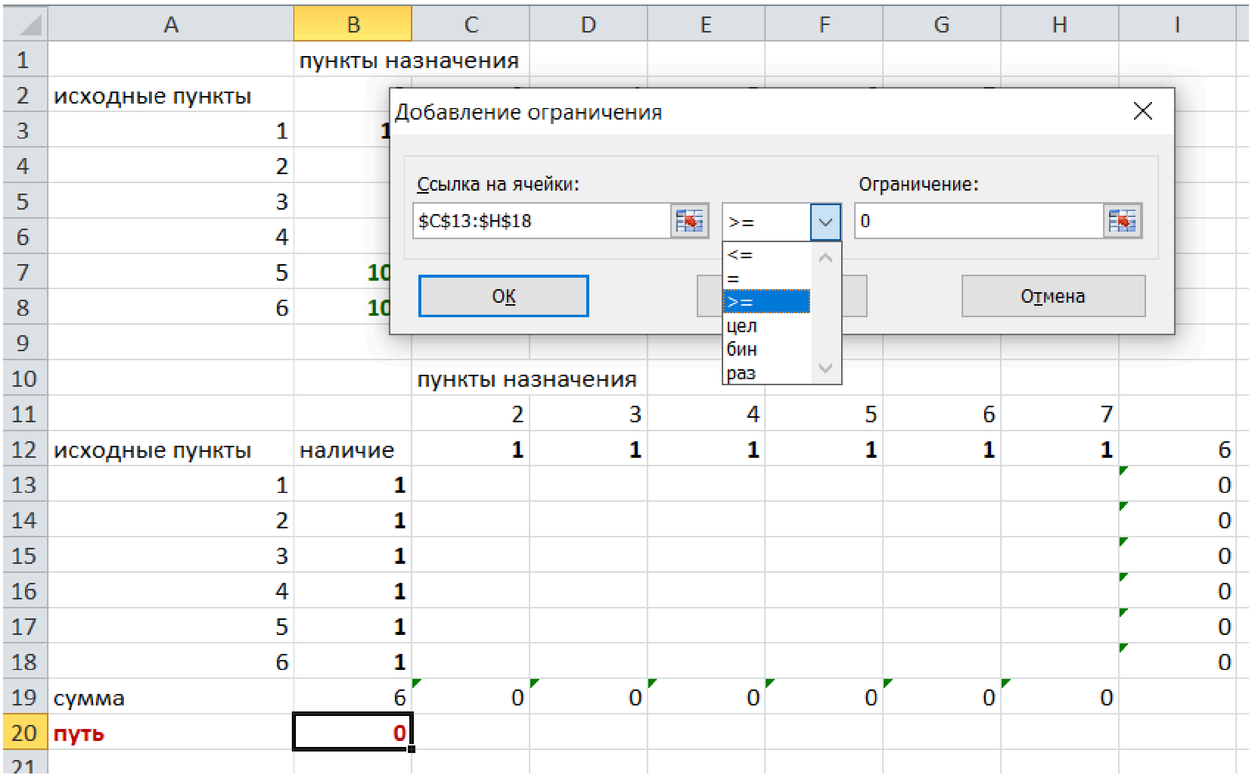




Числа внутри второй таблицы должны быть неотрицательными, добавим это ограничение: Выделяем ячейки

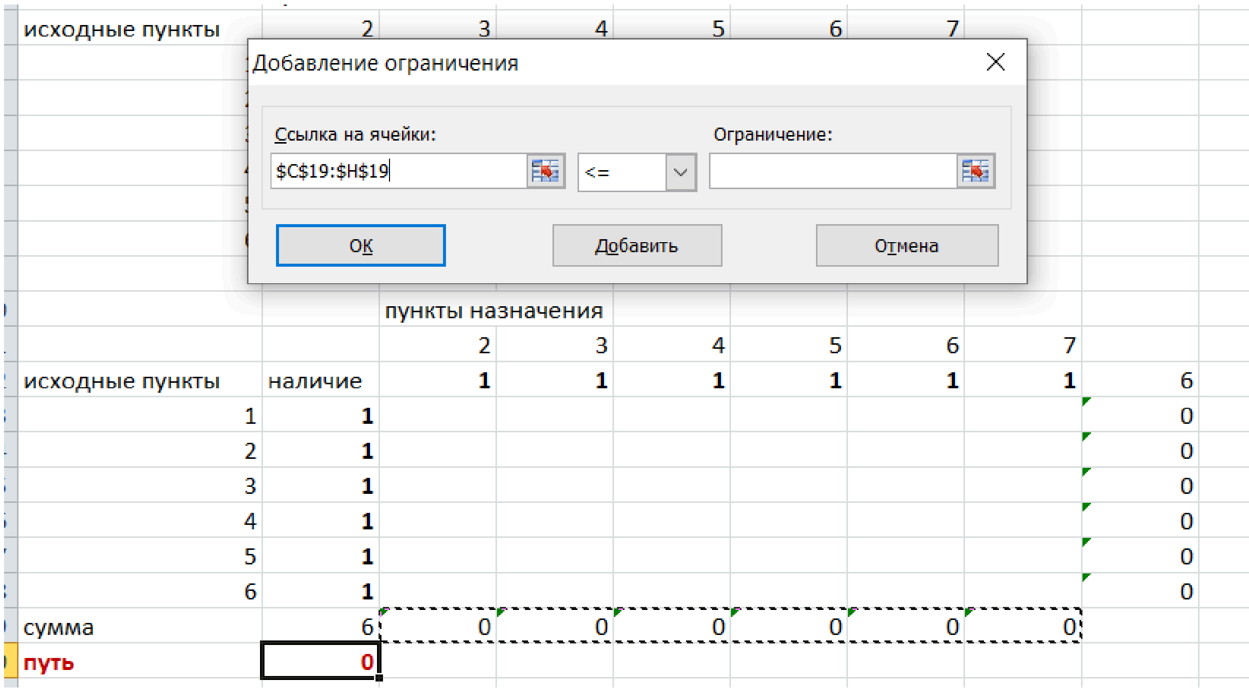


Добавляем условие неотрицательности:

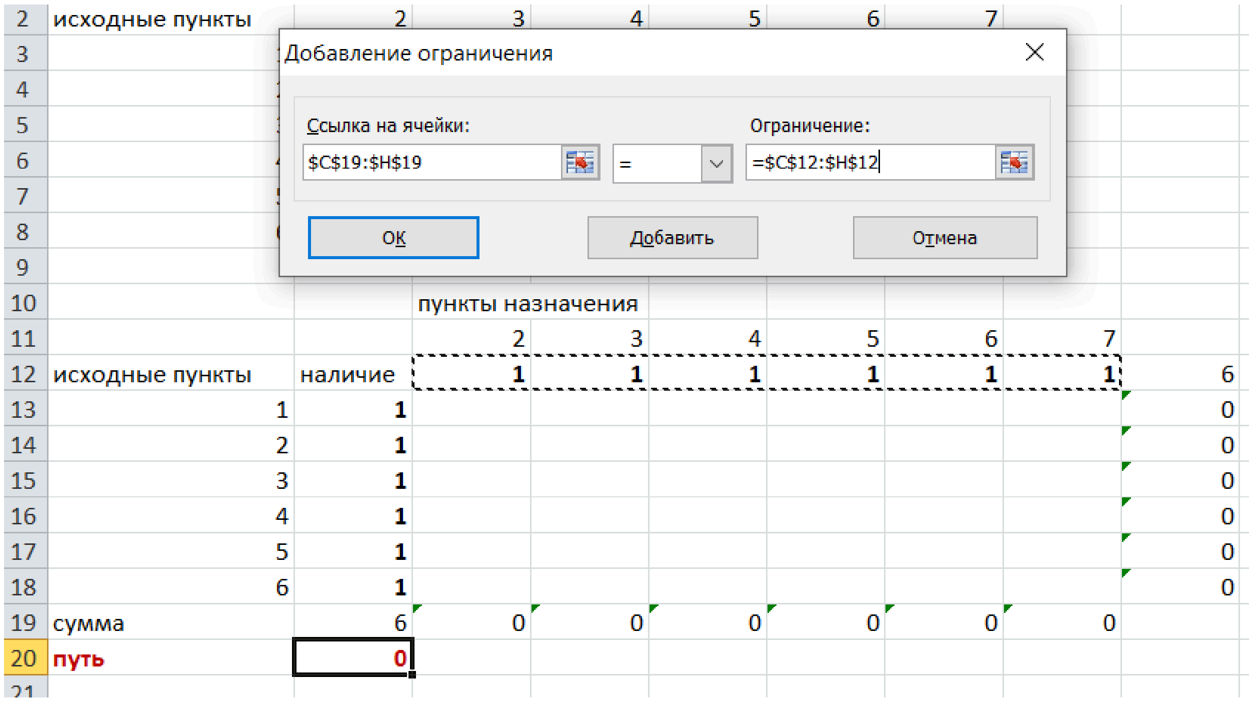


Суммы по столбцам внутри второй таблице должны быть равны 1. Это условие будет означать, что выйдя из какой-то вершины, мы можем попасть только в одну вершину, а не в 2 или 3 вершины сразу. То есть должны быть равны значения в выделенных ячейках:

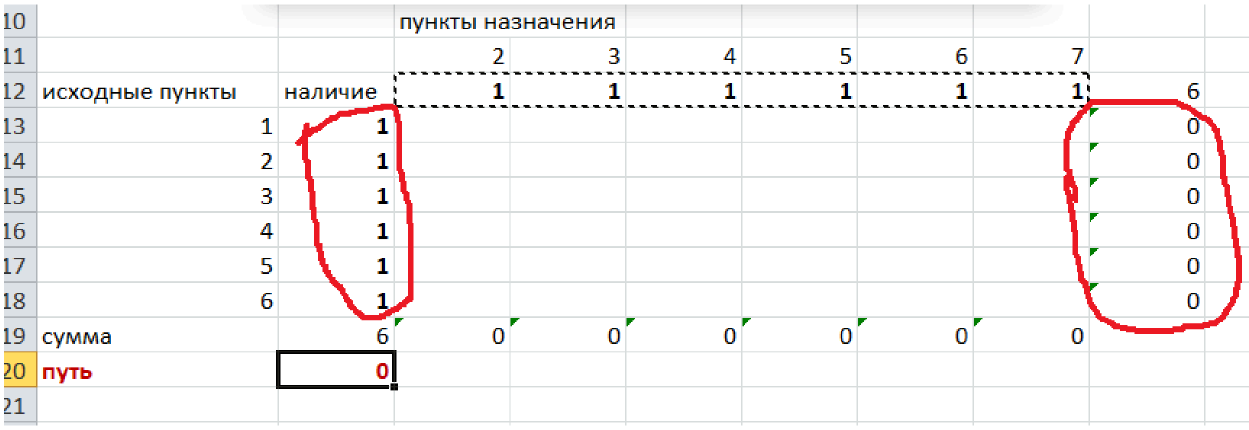
Добавим это ограничение:



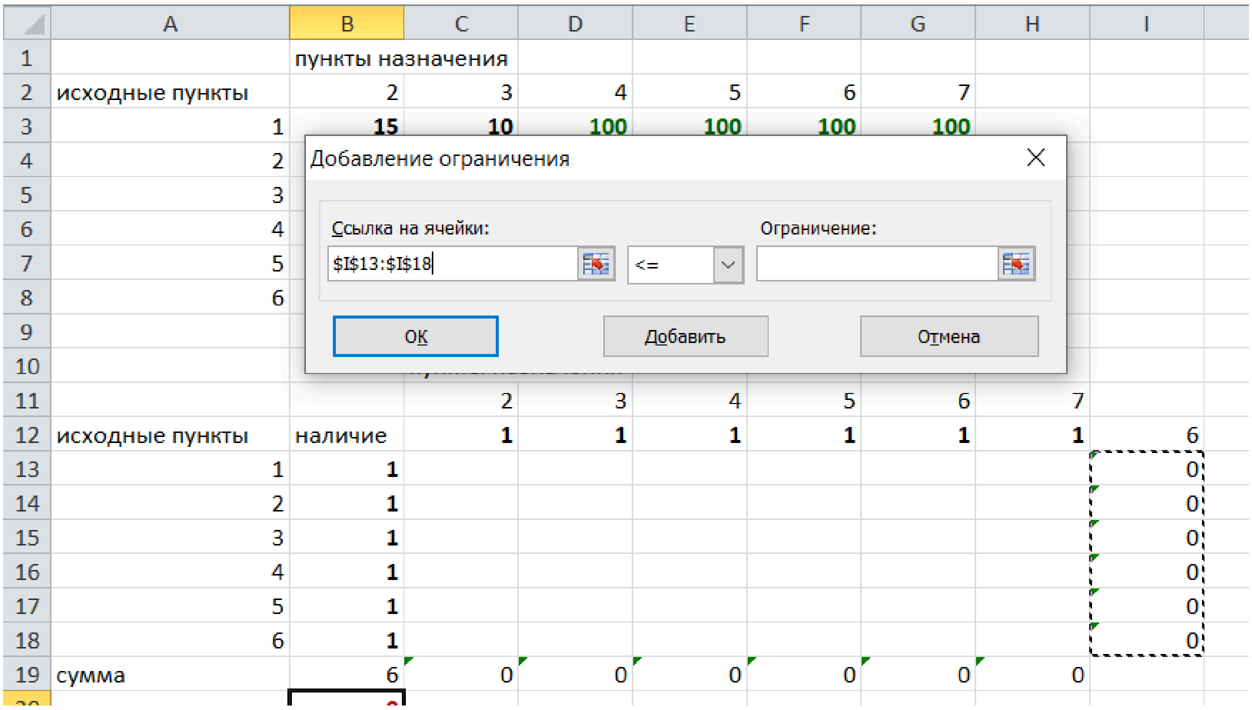
В качестве ограничения выбираем ячейки с 1:

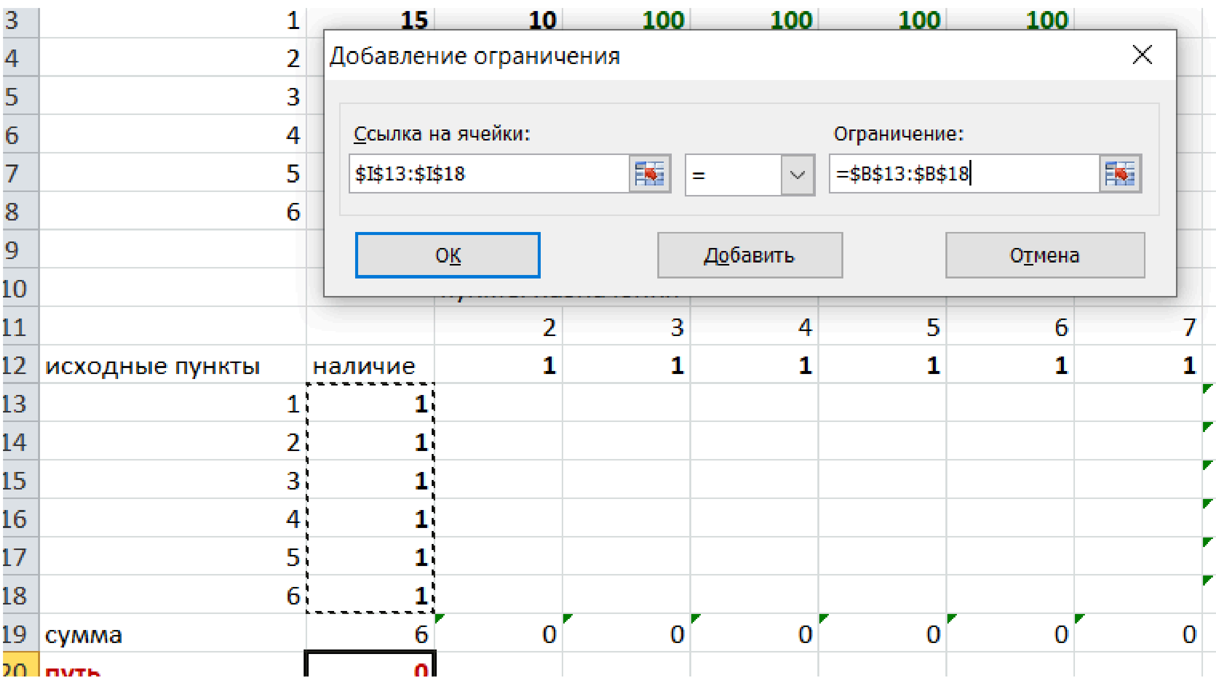


И добавим последнее ограничение. Суммы по строкам должны быть равны 1. То есть движение может идти только из одной вершины в одну. Нам надо добавить равенство значений в выделенных ячейках:

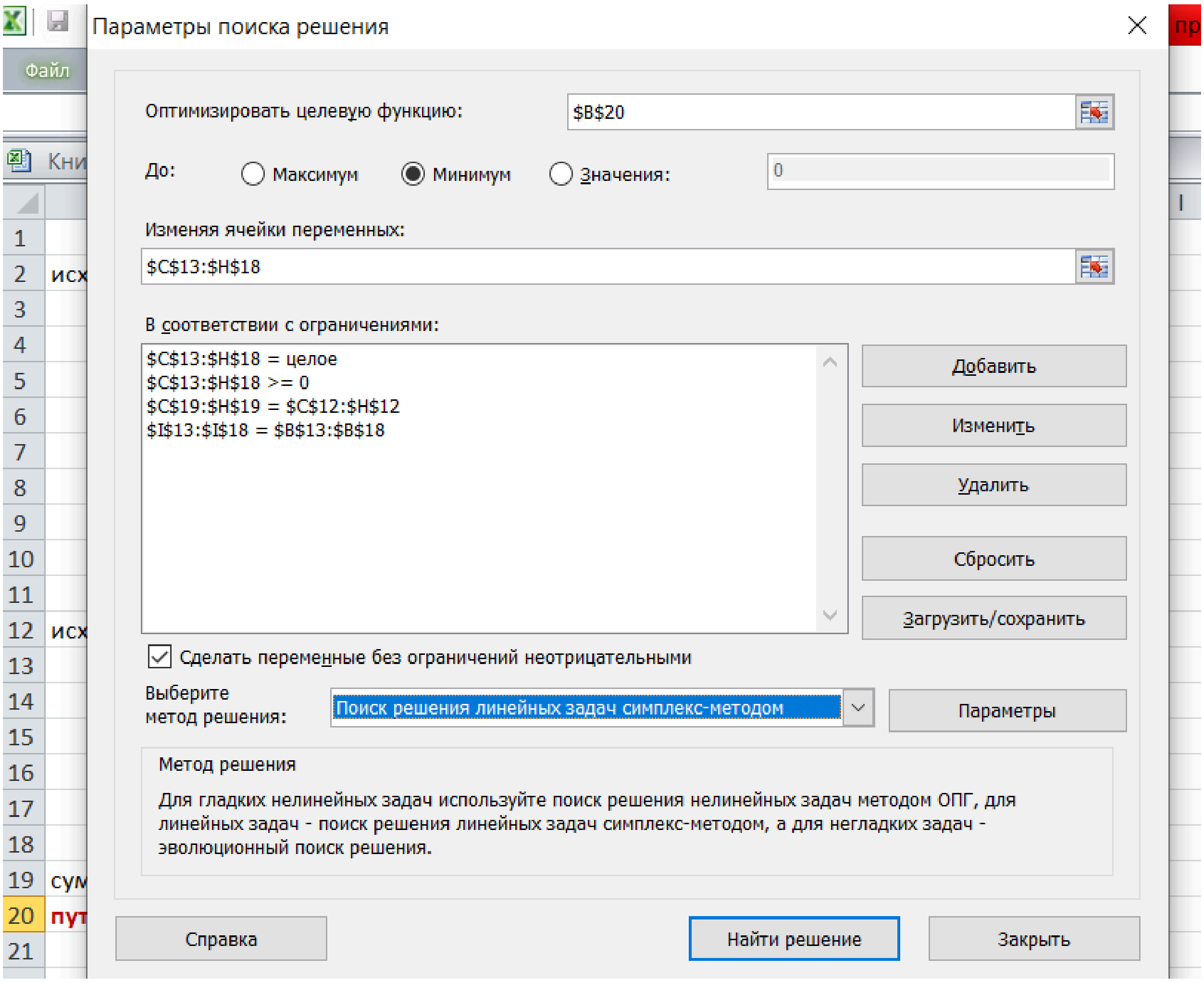


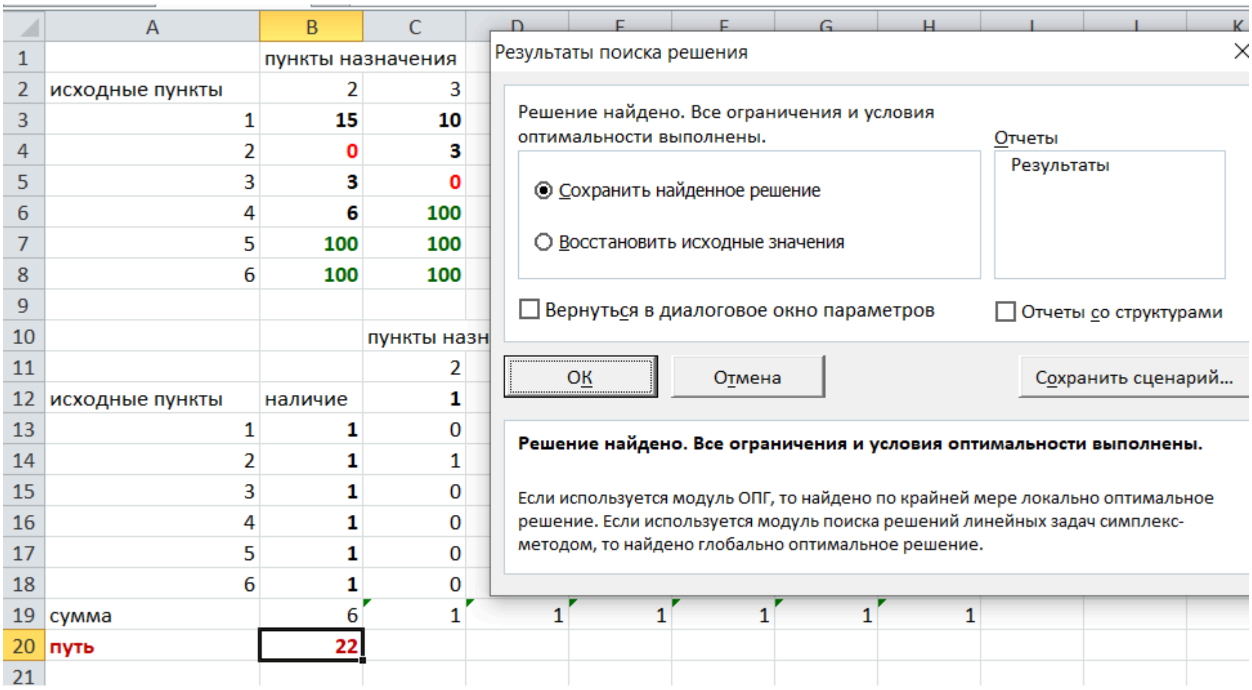
Добавим это ограничение:





Нажимаем ОК. Выбираем Поиск решения линейных задач симплекс-методом. Находим решение.





Нажимаем ОК.

Получившееся решение:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		пункты назначения							
2	исходные пункты	2	3	4	5	6	7		
3	1	**15**	**10**	**100**	**100**	**100**	**100**		
4	2	**0**	**3**	**6**	**100**	**100**	**17**		
5	3	**3**	**0**	**100**	**4**	**100**	**100**		
6	4	**6**	**100**	**0**	**4**	**100**	**5**		
7	5	**100**	**100**	**4**	**0**	**2**	**100**		
8	6	**100**	**100**	**100**	**2**	**0**	**6**		
9									
10			пункты назначения						
11			2	3	4	5	6	7	
12	исходные пункты	наличие	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	6
13	1	**1**	0	1	0	0	0	0	1
14	2	**1**	1	0	0	0	0	0	1
15	3	**1**	0	0	0	1	0	0	1
16	4	**1**	0	0	1	0	0	0	1
17	5	**1**	0	0	0	0	1	0	1
18	6	**1**	0	0	0	0	0	1	1
19	сумма	6	1	1	1	1	1	1	
20	**путь**	**22**							
21									

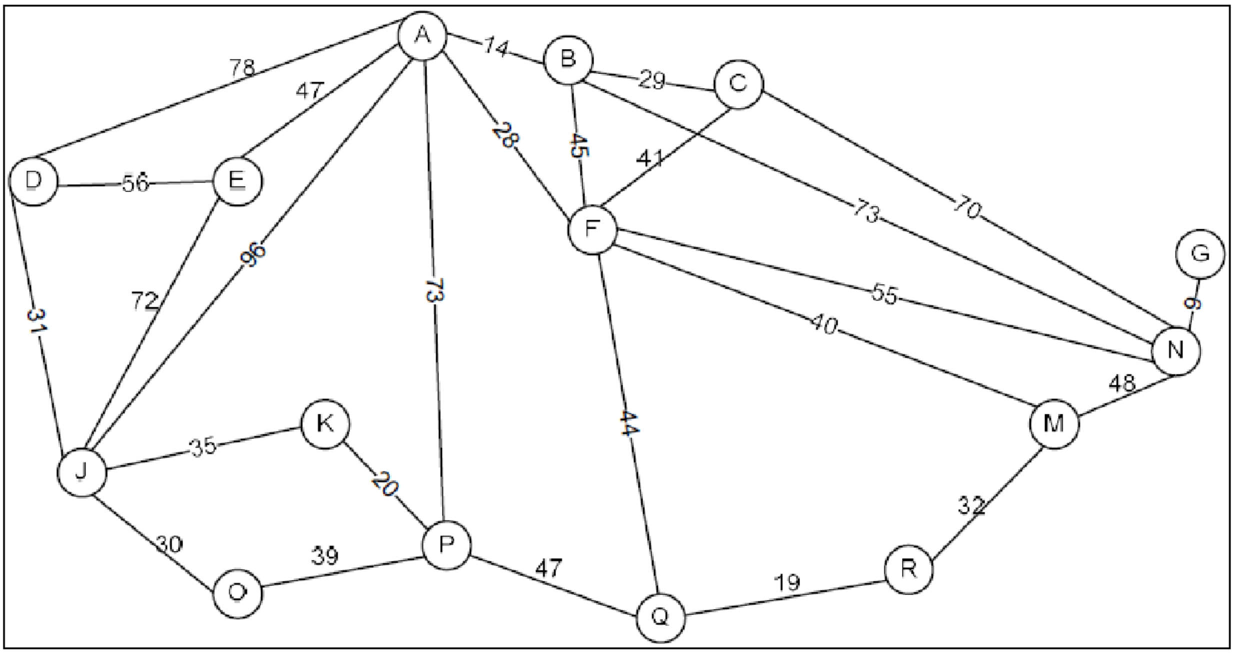
Их второй таблицы мы видим, что кратчайший путь из вершины 1 в вершину 7 составит 22. Давайте посмотрим, по каким вершинам он пройдет.

		пункты назначения						
		2	3	4	5	6	7	
исходные пункты	наличие	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	6
1	**1**	0	1	0	0	0	0	1
2	**1**	1	0	0	0	0	0	1
3	**1**	0	0	0	1	0	0	1
4	**1**	0	0	1	0	0	0	1
5	**1**	0	0	0	0	1	0	1
6	**1**	0	0	0	0	0	1	1
сумма	6	1	1	1	1	1	1	
путь	**22**							

Из первой строки мы находим, что 1 стоит только в столбце «пункт назначения3». Все остальные ячейки 0. Это значит, что из первой вершины движение по кратчайшему пути идет только в вершину 3. Поэтому далее мы должны сразу перейти в строку «исходные пункты3». В этой строке 1 стоит в «пункте назначения 5». Значит из вершины 3 переходим в вершину 5. По оставшимся строкам видим, что движение идет в вершину 6 и 7. Таким образом кратчайший путь 1-3-5-6-7 и составляет он 22 (условные единицы, если исходные расстояния были даны в км, значит 22 км).

Ответ: путь 1-3-5-6-7 – кратчайший. Его длина 22.

Задание 3. По описанному выше алгоритму найдите кратчайший путь из вершины R в вершину E:



При составлении таблицы (решение в Excel) в качестве первой строки берите вершину R (так как путь начинается с нее). Соответственно в столбцах этой вершины не будет (так как она первая, то в нее попасть из других вершин нельзя). Строки с вершиной E не будет, так как она последняя и выход из нее невозможен. А вот столбец с вершиной E будет последним. Все остальные шаги аналогичны описанной выше задачи.

Лабораторная работа №6
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться определять показатели эффективности систем массового обслуживания (СМО) с отказами и ожиданием.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятие системы массового обслуживания, компоненты СМО, виды СМО, показатели эффективности СМО; необходимо ***уметь:*** рассчитывать показатели эффективности одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с ожиданием, отказами.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Системы массового обслуживания – это системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание.

Выделяют следующие показатели эффективности использования систем массового обслуживания:

• Абсолютная пропускная способность СМО — среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени.

• Относительная пропускная способность СМО — отношение среднего числа заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу поступивших заявок за это же время.

• Средняя продолжительность периода занятости СМО.

• Коэффициент использования СМО — средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием заявок, и т.п.

1. **Расчет показателей эффективности одноканальной СМО с отказами.**

Задача 1. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Интенсивность потока вызовов – 0,8 вызовов в минуту. Средняя продолжительно разговора 1,5 мин. Все потоки событий простейшие. Определите показатели эффективности СМО.
Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый разговор длился ровно 1,5 мин и разговоры следовали один за другим без перерыва.

Дано	***Решение***
λ= 0,8 вызовов/мин $t_{ср}$ = 1,5 мин	*1.*Интенсивность потока обслуживания: μ=1/ $t_{ср}$ = 1/1,5 = 0,667выз/мин *2.*Приведенная интенсивность потока заявок:$\rho = \lambda/\mu$ = 0,8/0,667 = 1,199 *3.*Относительная пропускная способность:$q = \frac{1}{\rho+1}$ = 1/(1,199+1) = 0,455 *4.*Вероятность обслуживания заявки: $P_{обсл}$ = q = 0,455 = 45% *5.*Вероятность отказа в обслуживании: $P_{отк}$ = 1 - $P_{обсл}$ = 55% *6.*Абсолютная пропускная способность:A = λq = 0,8*0,455 = 0,364выз/мин *7.*Номинальная пропускная способность системы: $A_{ном}$= 1/$t_{ср}$ = 0,667 разговора в минуту. Номинальная пропускная способность в 0,667/0,364 = 1,8раза больше, чем фактическая пропускная способность А, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.
Найти: μ, ρ, q, $P_{обсл}$, $P_{отк}$, A, $A_{ном}$	СМО не эффективна (вероятность отказабольше 50% и низкая пропускная способность). Чтобы увеличить процент обслуживаемых заявок можно увеличить количество каналов обслуживания.

2. Расчет показателей эффективности многоканальной СМО с отказами

Задача 2. Имеется станция связи с тремя каналами, интенсивность потока заявок равна 1,5 заявки в минуту, среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты. Найти финальные вероятности и показатели эффективности.

Дано	***Решение***
λ= 1,5 заявки/мин $t_{ср}$ = 2 мин. n = 3	*1.*Интенсивность потока обслуживания: μ=1/ $t_{ср}$ = 1/2 = 0,5 заявки в час *2.* Приведенная интенсивность потока заявок:$\rho = \lambda/\mu$ = 1,5/0,5 = 3 *3.* Финальные вероятности: $P_0 = (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!})^{-1} = (1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!})^{-1}$ = 1/13 =0,076 (7,6% времени в СМО нет ни одной заявки) $P_1 = \rho * P_0$= 3*0,076= 0,23 (23% в СМО обслуживается одна заявка) $P_2 = \frac{\rho^2}{2!} * P_0 = \frac{3^2}{2!} * 0,076 = 0,35$(35% в СМО обслуживаются две заявки) $P_3 = \frac{\rho^3}{3!} * P_0 = \frac{3^3}{3!} * 0,076 = 0,346$(34,6% в СМО обслуживаются три заявки) *4.* Вероятность отказа в обслуживании: $P_{отк} = P_3$ = 0,346 = 34,6% *5.*Относительная пропускная способность:$q = 1 - 0,346 = 0,654$ *6.*Вероятность обслуживания заявки: $P_{обсл}$ = q = 0,654 = 65,4% *7.*Абсолютная пропускная способность:A = λq = 1,5*0,654 = 0,981заявки/час 8.K = A/μ= 0,981/0,5 = 1,95 – 2канала почти постоянно занят
Найти: μ, ρ, P_0, P_1, P_2, q, $P_{обсл}$, $P_{отк}$, A, K	СМО перегружена (занятоколо двух каналов), вероятность отказа меньше 50%.

3. Расчет показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченным ожиданием

Задача 3. Магазин посещает в среднем 90 человек в час. Имеющийся один кассир обслуживает в среднем одного покупателя в минуту. Очередь в зал обслуживания ограничена 5 покупателями. Определите показатели эффективности СМО и оцените ее работу.

Дано	***Решение***

λ= 90 чел/час = (90/60 мин) = 1,5 чел/мин. m = 5 μ= 1 чел/мин	*1.*Приведенная интенсивность потока заявок:ρ = λ/μ = 1,5/1 = 1,5 *2.* Вероятность того, что нет покупателей: $P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-1.5}{1-1.5^7} = 0.031$ (3% времени нет покупателей) *3.* Вероятность отказа в обслуживании:$P_{отк} = \rho^{m+1} * P_0 = 1.5^6 * 0.031$=0.354 = 35,4% *4.*Относительная пропускная способность:$q = 1 - P_{отк}$ = 0,64 = 64,6% *5.*Вероятность обслуживания заявки: $P_{обсл}$ = q = 64,6% 6.Абсолютная пропускная способность:A = λq = 1,5*0,64 = 0,96 (чел в минуту) или 90*0,64 = 58 человек в час (система перегружена) *7.*Среднее число людей, стоящих в очереди: $L_{оч} = \rho^2 \frac{1-\rho^m[m(1-\rho)+1]}{(1-\rho)^2} P_0$ $L_{оч} = 1,5^2 \frac{1-1,5^5[5(1-1,5)+1]}{(1-1,5)^2} 0,031 = 3,457$ (3-4 человека) 8.Среднее время пребывания в очереди: $t_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{3,457}{1,5}$ =2,3 мин.
Найти: ρ, q, P_0, $P_{обсл}$, $P_{отк}$, A, $L_{оч}$, $t_{оч}$	Из анализа работы СМО следует, что 35,4% покупателей получают отказ в обслуживании и система перегружена. Поэтому необходимо либо сократить время обслуживания одного покупателя, либо увеличить число касс, либо увеличить длину очереди.

4. **Расчет показателей эффективности одноканальной СМО с неограниченным ожиданием**

Задача 4. В билетной кассе работает один кассир, обслуживающий в среднем двух покупателей за одну минуту. Каждый час в среднем приходят покупать билеты 90 посетителей. Определите показатели эффективности СМО и оцените ее работу.

Дано	***Решение***
λ= 90 чел/час = 1,5 чел/мин. μ= 2 чел/мин	*1.* Приведенная интенсивность потока заявок:ρ = λ/μ = 1,5/2 = 0,75<1 - очередь не будет расти бесконечно, следовательно, предельные вероятности существуют *2.* Вероятность того, что кассир свободен:P_0 =1 – ρ = 0,25 (25% времени кассир не занимается продажей билетов) *3.* Вероятность того, что кассир занят работой: P = 1 - P_0 = 0,75(75% занят работой) 4. Средняя длина очереди равна $L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0,75^2}{1-0,75}$=2,25 покупателей 5. Среднее время нахождения покупателя в очереди: $t_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{2,25}{1,5} = 1,5$ мин, что вполне приемлемо.
Найти: ρ, P_0, P, $L_{оч}$, $t_{оч}$	Время ожидания в очереди вполне приемлимо, СМО работает в нормальном режиме.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

Задание 1. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность входного потока равна 0,95 вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора 1 мин.

a) Определите показатели эффективности СМО в установившемся режиме работы.
b) Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый разговор длился ровно 1 минуту и разговоры следовали один за другим без перерыва.
c) При вычислении показателей эффективности укажите:
   - Сколько вызовов придет за время обслуживания одного вызова?
   - Сколько процентов заявок получат отказ?
   - Эффективна ли данная СМО?

Задание 2. В вычислительном центре работает 3 персональных компьютера. Простейший поток задач, поступающих на вычислительный центр, имеет интенсивность 10 задач в час. Среднее время решения задачи равно 12 мин. Заявка получает отказ, если все компьютеры заняты. Найдите показатели эффективности СМО.

Задание 3. На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей). Интенсивность входного потока 4 машины в час. Время осмотра в среднем 17 минут, в очереди могут находиться не более 5 автомобилей. Определите показатели эффективности СМО в установившемся режиме работы.

Задание 4. Билетная касса работает без перерыва. Билеты продает один кассир. Среднее время обслуживания - 2 минуты на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течение одного часа, равно = 20 пасс/час. Определите показатели эффективности СМО в установившемся режиме работы.

II вариант

Задание 1. Пост диагностики автомобилей представляет собой одноканальную СМО с отказами. Интенсивность потока заявок на диагностику равна 0,5 автомобиля в час. Средняя продолжительность диагностики 1,2 часа.

a) Определите показатели эффективности СМО в установившемся режиме работы.
b) Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждая диагностика длился ровно 1,2 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.
c) При вычислении показателей эффективности укажите:
   - Сколько автомобилей придет за время обслуживания одного автомобиля?
   - Сколько процентов заявок получат отказ?
   - Эффективна ли данная СМО?

Задание 2. Телефонная компания имеет 3 линии связи. Простейший поток входящих вызовов имеет интенсивность 2 вызова в минуту, средняя продолжительность разговора 1 минута. Заявка получает отказ, если все линии связи заняты. Найдите показатели эффективности СМО.

Задание 2. Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно 3. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди уже аходится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику имеет интенсивность λ=0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля в среднем равно = 1,05 час. Определите показатели эффективности СМО в установившемся режиме работы.

Задание 4. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем СМО с отказами отличаются от СМО с очередями?
2. Какие показатели эффективности определяются для СМО?

Лабораторная работа № 5
РЕШЕНИЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться находить оптимальное решение антагонистических игр.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** смысл понятий: конфликт, игра, игра с нулевой суммой, антагонистическая игра, ход, стратегия, выигрыш, нижняя и верхняя цена игры, принцип минимакса, игра с седловой точкой и без седловой точки, чистая и смешанная стратегия; необходимо ***уметь:*** определять максиминную и минимаксную стратегию антагонистической игры; решать игры типа 2х2.

ОБОРУДОВАНИЕ: ПК IBM, ПО Microsoft Excel.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Теория игр – это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта. Игрой называется математическая модель конфликтной ситуации. Стороны, участвующие в конфликте называются игроками, а исход конфликта – выигрышем.

Оптимальной стратегией игрока называется такая, которая обеспечивает ему наилучшее положение в данной игре, т.е. максимальный выигрыш.

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтной ситуации, т. е. определение «оптимальной стратегии» для каждого из них.

1. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Чтобы найти решение игры, нужно для каждого игрока найти стратегию, которая для него будет оптимальной. Для этого используется принцип максимина.

Пример 1. Найти решение игры, заданной платежной матрицей, в чистых стратегиях.

(7 5 4 1 8 3 8 1 2)

Решение

Найдем минимальные элементы в каждой строке и максимальные элементы в каждом столбце. Затем найдем максимальный элемент среди минимальных и минимальный среди максимальных.

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	7	5	4	**4**
A_2	1	8	3	**1**
A_3	8	1	2	**1**
β_i	**8**	**8**	**4**	

Нижняя цена игры

$\alpha = \max(\min \alpha_i) = 4$

Верхняя цена игры

$\beta = \min(\max \beta_i) = 4$

Т.к. $\boldsymbol{\alpha = \beta}$, то данная игра с седловой точкой.

Ответ: Оптимальными являются стратегии A_1 для игрока 1 и B_3 для игрока 2. Цена игры V = 4.

Пример 2. Определить нижнюю и верхнюю цену игры. Показать, что данная платежная матрица не имеет решения в чистых стратегиях:

(10 40 50 30)

Решение. Также как и в предыдущем примере составим таблицу:

	B_1	B_2	$\boldsymbol{\alpha_i}$
A_1	10	40	**10**
A_2	50	30	**30**
$\boldsymbol{\beta_i}$	**50**	**40**	

α = max(min α_i) = 30 – нижняя цена игры
β = min(max β_i) = 40 – верхняя цена игры
Ответ: Решения в чистых стратегиях не существует, т.к. нижняя цена игры достигается стратегией A_2 и ее значение равно 30, а верхняя цена игры достигается в стратегии B_2 и ее значение равно 40.

2. Уменьшение порядка платежной матрицы. Уменьшить размеры платежной матрицы позволяет правило доминирования: размеры матрицы можно уменьшить путем исключения доминируемых строк (столбцов) и одной из дублирующих строк (столбцов)**.**

Пример. Заменить исходную матрицу выигрышей на матрицу меньших размеров.

(B1 B2 B3 B4 B5 B6 A1 1 0 2 1 4 5 A2 0 2 7 0 2 1 A3 2 1 3 2 5 7 A4 3 3 0 3 6 1)

Решение
Стратегия A_3 доминирует над A_1, т.к.все элементы строки A_3 больше соответствующих элементов строки A_1. Поэтому строку A_1 можно исключить.
Стратегия B_1 дублирует стратегию B_4, т.к. элементы этих столбцов соответственно равны. Исключаем стратегию B_1.

(B2 B3 B4 B5 B6 A2 2 7 0 2 1 A3 1 3 2 5 7 A4 3 0 3 6 1)

Стратегия B_5 доминирует над стратегиями B_2 и B_4. Исключаем стратегии B_2 и B_4.

(B3 B5 B6 A2 7 2 1 A3 3 5 7 A4 0 6 1)

В полученной матрице нет доминирующих и дублирующих стратегий, значит дальше уменьшить ее нельзя.

3. *Решение игры 2x2 в смешанных стратегиях.*

Пример. Игра задана платежной матрицей: $P = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$. Найти стратегии игроков.
Решение

1. Найдем аналитически оптимальную стратегию игрока А и соответствующую цену игры V.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10p_1 + 8p_2 = v, \\ 7p_1 + 11p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Выразим из последнего уравнения $p_1 = 1 - p_2$ и подставим в первое и второе уравнения:

$\{10(1 - p_2) + 8p_2 = V \; 7(1 - p_2) + 11p_2 = V$

$\{10 - 2p_2 = V \quad * 2 \; 7 + 4p_2 = V \quad * 1$

$$+20 - 4p_2 = 2V \;\; 7 + 4p_2 = V$$

27 = 3V
V = 9

$P_2 = (V – 7)/4 = ½$
$P_1 = 1 - ½ = ½$

2. Стратегию игрока В определим по формулам: $q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$, $q_2 = 1 – q_1$

$$q_1 = \frac{9-7}{10-7} = \frac{2}{3}$$

$$q_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Ответ: S^*_A=(½ ; ½); S^*_b=(2/3 ; 1/3); V = 9.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМЫ ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

Задание 1. Найти решение игры в чистых стратегиях.

(8 9 8 2 5 0 1 2 1 3 1 7 9 1 9)

Задание 2. Определить нижнюю и верхнюю цену игры. Показать, что данная платежная матрица не имеет решения в чистых стратегиях:

(5 10 3 2 8 0 4 1 7 6 3 2 9 4 9 4 5 6 8 4)

Задание 3. Заменить исходную матрицу выигрышей на матрицу меньших размеров.

(B1 B2 B3 B4 B5 A1 1 0 3 − 1 − 4 A2 0 1 1 0 − 1 A3 − 1 0 − 1 − 1 2 A4 1 1 4 1 2 A5 2 2 0 0 − 3)

Задание 4. Решить матрицу 2x2 в смешанных стратегиях $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 5. В программе MS Excel составить таблицу с платежной матрице из задания №2 и с помощью функций определить нижнюю и верхнюю цену игры.

II вариант

Задание 1. Найти решение игры в чистых стратегиях.

(4 9 4 1 4 2 7 5 1 5 4 8 5 9 6)

Задание 2. Определить нижнюю и верхнюю цену игры. Показать, что данная платежная матрица не имеет решения в чистых стратегиях:

(9 5 1 0 7 1 4 3 7 6 5 6 10 4 9 4 2 6 8 4)

Задание 3. Заменить исходную матрицу выигрышей на матрицу меньших размеров.

(B1 B2 B3 B4 B5 A1 1 2 − 3 − 1 0 A2 3 4 − 1 2 1 A3 2 0 1 − 3 6 A4 3 4 − 1 2 1 A5 1 − 2 1 − 4 3)

Задание 4. Решить матрицу 2x2 в смешанных стратегиях $P = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Задание 5. В программе MS Excel составить таблицу с платежной матрице из задания №2 и с помощью стандартных функций определить нижнюю и верхнюю цену игры.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое антагонистическая игра?
2. В чем состоит принцип равновесия в играх с седловой точкой?