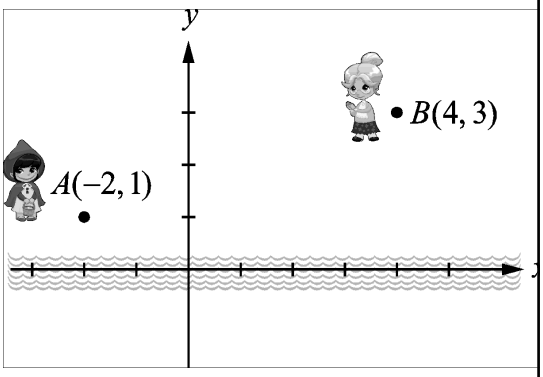
數學(一) 第二次段考範圍:直線與圓

章節:高中數學(一)CH2-2 點與直線、直線與直線的關係

答案:取水點 $(-\frac{1}{2},0)$ 、最短距離為 $2\sqrt{13}$

難易度:中

如圖, 小紅帽住在$A(-2,1)$, 奶奶住在$B(4,3)$, 有一條河流經x軸。這天奶奶家停水了, 小紅帽必需到河邊提水送去奶奶家, 若小紅帽希望她走的距離是最短的距離, 請問她要在x軸上的哪一點取水?她所走的最短距離為多少?



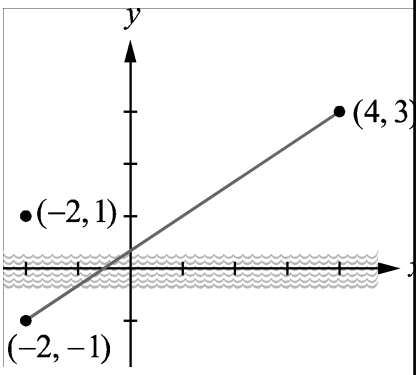
【解】

如圖, $A(-2,1)$ 對x軸的對稱點為 $A'(-2,-1)$,

直線 $\overleftrightarrow{A'B}: y+1=\frac{3+1}{4+2}(x+2) \Rightarrow 2x-3y=-1$,

令 $y=0$ 代入得 $x=-\frac{1}{2}(\Leftrightarrow -\frac{1}{2},0)$ 即為取水點,

又最短距離為 $\overline{A'B}=\sqrt{(4+2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ 。



學習內容:

G-10-1坐標圖形的對稱性:坐標平面上, 對x軸, 對y軸, 對 $y=x$ 直線的對稱, 對原點的對稱。

G-10-2直線方程式:斜率, 其絕對值的意義, 點斜式, 點與直線之平移, 平行線、垂直線的方程式。點到直線的距離, 平行線的距離、二元一次不等式。

學習表現:

g-V-2:理解並欣賞坐標平面上的圖形對稱性, 並能用以溝通及推論。

g-V-4:理解並欣賞幾何的性質可以透過坐標而轉化成數與式的關係, 而數與式的代數操作也可以透過坐標產生對應的幾何意義, 能熟練地轉換幾何與代數的表徵, 並能用於推論及解決問題。

數學(一) 第二次段考範圍:直線與圓

章節:高中數學(一)CH2-3 圓的方程式、2-4 點、直線與圓的關係	
答案:(1)(3)	難易度:難

古希臘著名數學家阿波羅尼斯發現:平面上到兩定點A、B的距離比為定值$\lambda\ (\lambda\neq 1)$的所有點形成的圖形為圓, 此圓稱為「阿波羅尼斯圓」。在坐標平面中, 已知$A(-4,2)$、$B(2,2)$, P點滿足$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=2$, 若$P$點所形成的圖形為圓$C$, 則下列何者正確?(多選)

(1)圓C的圓心為$(4,2)$ (2)圓C的半徑為16

(3)過A點對圓C作切線, 兩條切線的夾角為$60°$

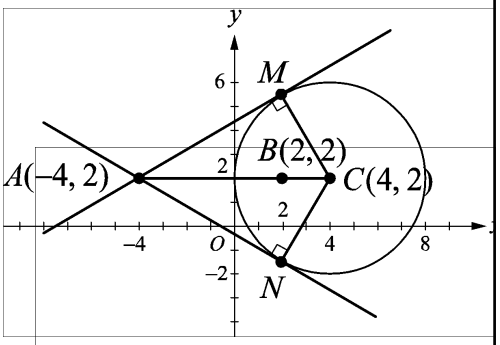
(4)過A點作直線L, 若圓C上恰有三個點到直線L的距離為2, 則直線L的斜率為$\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

【解】

令$P(x,y)$, $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=2\Rightarrow\overline{PA}=2\overline{PB}\Rightarrow\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=2\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$

$\Rightarrow(x+4)^2+(y-2)^2=4[(x-2)^2+(y-2)^2]\Rightarrow 3x^2-24x+3y^2-12y+12=0$

$\Rightarrow x^2-8x+y^2-4y+4=0\Rightarrow(x-4)^2+(y-2)^2=16=4^2$。



(1)□:圓C的圓心為$(4,2)$。

(2)□:圓C的半徑為4。

(3)□:如右圖, $\overline{CM}=\overline{CN}=r=4$, 又$\overline{CA}=8$

$\Rightarrow$直角$\triangle ACM$和直角$\triangle ACN$為$30°-60°-90°$的三角形

$\Rightarrow\angle MAC=\angle NAC=30°$

$\Rightarrow$兩條切線的夾角為$60°$。

(4)□:如圖, 圓C上恰有三個點到直線L的距離為$2\Rightarrow d(C,L)=2$,

令直線L的斜率為m

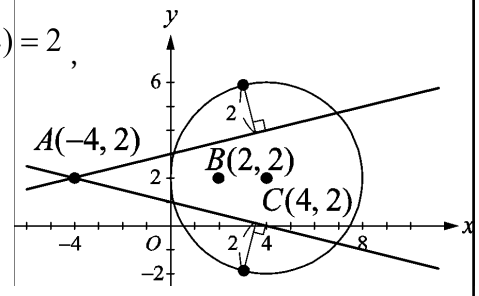
$\Rightarrow L:y-2=m(x+4)$

$\Rightarrow L:mx-y+4m+2=0$,

又$d(C,L)=2$

$\Rightarrow\dfrac{|4m-2+4m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$\Rightarrow(4m)^2=m^2+1\Rightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{15}$。



學習內容:
G-10-3圓方程式:圓的標準式。

泰宇出版 翔宇文化

G-10-4直線與圓:圓的切線, 圓與直線關係的代數與幾何判定。
學習表現: g-V-4:理解並欣賞幾何的性質可以透過坐標而轉化成數與式的關係, 而數與式的代數操作也可以透過坐標產生對應的幾何意義, 能熟練地轉換幾何與代數的表徵, 並能用於推論及解決問題。

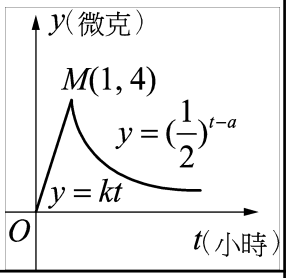
數學(三)A、B 第二次段考範圍:指數與對數、按比例成長模型

章節:高中數學(三)A CH2-2 指數與對數函數圖形
高中數學(三)B CH2-2 對數函數模型

答案:(1) $k=4$, $a=3$
(2) 0.125小時到4小時之間

難易度:易

藥廠研發一種抗流感病毒的新藥, 如果成年人按規定的劑量服用, 據監測報告:服藥一次後每毫升血液中的含藥量y(微克)與時間t(小時)之間的關係曲線如圖所示。試求:
(1) 求k與a的值。
(2) 若每毫升血液中含藥量不少於0.5微克時視為「治療有效」, 求服藥一次後「治療有效」的時間範圍。



【解】

(1) $(1,4)$ 代入 $y=kt \Rightarrow k=4$ 。

$(1,4)$ 代入 $y=(\frac{1}{2})^{t-a} \Rightarrow 4=(\frac{1}{2})^{1-a} \Rightarrow 2^2=2^{a-1} \Rightarrow a=3$ 。

(2) $y=0.5$ 代入 $y=4t \Rightarrow 0.5=4t \Rightarrow t=0.125$ 。

$y=0.5$ 代入 $y=(\frac{1}{2})^{t-3} \Rightarrow 0.5=(\frac{1}{2})^{t-3} \Rightarrow \frac{1}{2}=(\frac{1}{2})^{t-3} \Rightarrow t=4$ 。

故「治療有效」的時間範圍為0.125小時到4小時之間。

學習內容:
F-11A-4指數與對數函數:指數函數及其圖形, 按比例成長或衰退的數學模型, 常用對數函數的圖形, 在科學和金融上的應用。
F-11B-2按比例成長模型:指數函數與對數函數及其生活上的應用, 例如地震規模, 金融與理財, 平均成長率, 連續複利與e的認識, 自然對數函數。

學習表現:
f-V-4認識指數與對數函數的圖形特徵, 理解其特徵的意義, 認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象, 並能用以溝通和解決問題。
g-V-2理解並欣賞坐標平面上的圖形對稱性, 並能用以溝通及推論。
n-V-2能熟練操作計算機, 能判斷使用計算機的時機, 理解計算機可能產生誤差, 並能處理誤差。

數學(三)A、B 第二次段考範圍:指數與對數、按比例成長模型

章節:高中數學(三)A CH2-1 對數、2-3 指數與對數的應用
高中數學(三)B CH2-1 指數函數模型、2-3 指數與對數的應用

答案:(2) | 難易度:易

納皮爾在他的著作《奇妙的對數表》中說:沒有什麼比大數的運算更讓數學工作者頭痛,更阻礙了天文學的發展。法國數學家許凱和德國數學家斯蒂菲爾都想到了用類似下列數列模型的方法來處理大數的運算:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
x	11	12	…	19	20	21	22	23	24	25	…
2^x	2048	4096	…	524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216	33554432	…

例如:512×1024,可以將512看成是9個2相乘,1024是10個2相乘,這兩者相乘的積其實就是2的個數作相加。所以只需計算 $9+10=19$,接下來在表格中找到19對應的數524288就是答案了。

若 $x=\log_4(20230101\times1314520)$,則$x$落在下列哪一個區間?

(1) $(15,16)$ (2) $(22,23)$ (3) $(42,44)$ (4) $(44,46)$

【解】

$2^{24}=16777216<20230101<33554432=2^{25}\Rightarrow4^{12}<20230101<4^{12.5}$,

又 $2^{20}=1048576<1314520<2097152=2^{21}\Rightarrow4^{10}<1314520<4^{10.5}$,

故 $4^{22}<20230101\times1314520<4^{23}$,選(2)。

學習內容:
F-11A-4指數與對數函數:指數函數及其圖形,按比例成長或衰退的數學模型,常用對數函數的圖形,在科學和金融上的應用。
F-11B-2按比例成長模型:指數函數與對數函數及其生活上的應用,例如地震規模,金融與理財,平均成長率,連續複利與e的認識,自然對數函數。

學習表現:
f-V-4認識指數與對數函數的圖形特徵,理解其特徵的意義,認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象,並能用以溝通和解決問題。
g-V-2理解並欣賞坐標平面上的圖形對稱性,並能用以溝通及推論。
n-V-2能熟練操作計算機,能判斷使用計算機的時機,理解計算機可能產生誤差,並能處理誤差。

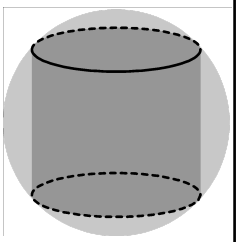
選修數學(甲)、(乙)上 第二次段考範圍:微分、微分的導函數

章節:選修數學(甲)上 CH2-3 微分與導函數
選修數學(乙)上 CH3-3 導函數與函數的圖形

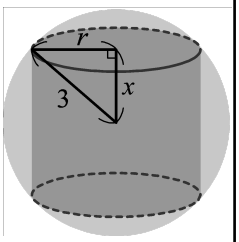
答案: $2\sqrt{3}$

難易度:中

琉璃珠對排灣族人而言是珍貴的寶物, 是結婚的聘禮也是族人的傳家之寶, 更是權力的象徵。小毅想要在半徑為3公分的琉璃珠球體內, 鑲入一個中空的直圓柱做為裝飾, 如圖。試求直圓柱的體積最大時, 高為多少公分?



【解】



設直圓柱的高為 $2x$ $(x>0)$, 如右圖,

則直圓柱的底面圓半徑 $r=\sqrt{3^2-x^2}=\sqrt{9-x^2}$

$\Rightarrow$直圓柱體積 $V(x)=$ 底面積 $\times$ 高 $=\pi r^2\times 2x=\pi(9-x^2)\cdot 2x=-2\pi x^3+18\pi x$

$\Rightarrow V'(x)=-6\pi x^2+18\pi$,

$V'(x)=0$ 時 $\Rightarrow -6\pi x^2+18\pi=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ (負不合),

故當 $x=\sqrt{3}$ 時, 直圓柱體積 $V(x)$ 有最大值, 此時直圓柱的高為 $2\sqrt{3}$。

x		$\sqrt{3}$	
$V'(x)$	+	0	−
		極大值	

學習內容:
F-12甲-3微分:導數與導函數的極限定義, 切線與導數, 多項式函數及簡單代數函數之導函數, 微分基本公式及係數積和加減性質。
F-12甲-4導函數:微分乘法律, 除法律, 連鎖律, 高階導數, 萊布尼茲符號。函數的單調性與凹凸性判定, 一次估計, 基本的最佳化問題。
F-12乙-3微分:導數與導函數的極限定義, 切線與導數, 多項式函數之導函數, 微分基本公式及係數積和加減性質。
F-12乙-4導函數:二階導數, 萊布尼茲符號。函數的單調性與凹凸性判定, 基本的最佳化問題, 導數的邊際意涵。

學習表現:
f-V-6認識極限, 理解微分與導數的意義, 並能用以溝通和推論。
n-V-7認識弧度量並能操作, 理解並欣賞其作為角之度量的簡潔性。
f-V-7理解導函數的意義, 熟練其操作, 並能用以解決問題。
f-V-2認識多項式函數的圖形特徵, 理解其特徵的意義, 認識以多項式函數為數學模型的關係或現象, 並能用以溝通和解決問題。
a-V-2理解並熟練多項式的運算操作, 能靈活應用於等式或函數, 並能用以推論及解決問題。

選修數學(甲)、(乙)上 第二次段考範圍:微分、函數的極限

章節:選修數學(甲)上 CH2-1 函數的概念—函數面面觀 選修數學(乙)上 CH2-1 函數的概念—函數面面觀

答案:(1) 定義域為 i ，值域為 $\{1,0\}$ (2) 略	難易度:易

物理學家常使用一種很方便的數學工具叫做單位階躍函數(unit step function)，又稱為黑維塞階躍函數(Heaviside step function)，常應用在控制理論和信號處理方面，它可在一個特定時間開啟一個訊號，然後一直開著，定義為:$H(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$。

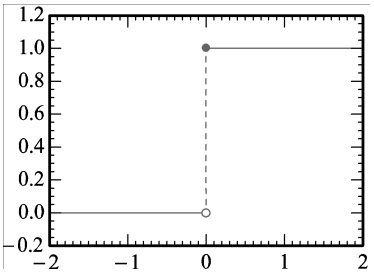
(1) 試求 $H(x)$ 的定義域和值域。

(2) 試畫出 $H(x)$ 的圖形。

【解】

(1) 定義域為 i ，值域為 $\{1,0\}$。

(2)



學習內容:

F-12甲-1函數:對應關係，圖形的對稱關係(奇偶性)，凹凸性的意義，反函數之數式演算與圖形對稱關係，合成函數。

F-12乙-1函數:對應關係，圖形的對稱關係(奇偶性)，凹凸性的意義。

學習表現:

f-V-1認識函數，理解式與函數的關連並能靈活轉換，理解函數圖形的意義，並能用以溝通。

g-V-2理解並欣賞坐標平面上的圖形對稱性，並能用以溝通及推論。