I.V.P. 1994 option P' Freinage d'une navette par l'atmosphère
Interaction entre deux spires.

1 Préliminaire

$p = \mu \frac{RT}{M}$. atmosphère en équilibre isotherme $\Rightarrow \mu * \vec{g} = grad(p)$

$\frac{\partial p}{\partial z} = -\mu * g \longrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial z} = -\mu \cdot g \frac{M}{RT}$ $\mu = \mu_S \cdot \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = \mu_S \exp\left(-\frac{z}{d}\right)$

$d = \frac{RT}{Mg} = 8000\,m \Rightarrow T = 279\ K$

2 Freinage vertical

2.1 $\frac{dv}{dt} = -\mu \cdot \frac{C_1}{m} \cdot v^2 = \frac{dv}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$

avec $\frac{dh}{dt} = -v$; et $\frac{d\mu}{dh} = -\frac{\mu}{h}$

$v = v_0 \cdot \exp\left(\frac{d.C_1}{m} \cdot (\mu_0 - \mu)\right)$

2.2 $dv/v = -(C_1 .d/m).d\mu \Rightarrow Ln(v/v_0) = C_1 .d/m.(\mu_0-\mu)$

2.3 A l'altitude h_0 la masse volumique est très faible ($\mu_0 = 4{,}8.10^{-6}$) et le freinage très peu efficace; dans le cadre de ce modèle très grossier la vitesse à l'arrivée au sol est très faible:

$v = v_0 * \exp(-20{,}8) = 7{,}4 .10^{-6}$ m/s

bien, sur la force de freinage, qui varie comme le carré cette vitesse, n'est plus efficace; qualitativement on voit que l'efficacité du freinage passe par un maximum; il resterait à définir quantitativement cette " efficacité".

2.4 $\delta = -dv/dt = \mu(h).C_1 /m.V^2 = .C_1 /m.V_0^2\, \mu.\exp\{ 2.C_1\ (d./m).(\mu_0-\mu)\}$

il y aurait un maximum de décélération là où $d\delta /d\mu. = 0 = [1 - \mu. 2.C_1\ d./m.]* \delta /\mu$

soit quand $\mu_M = \frac{m}{2 \cdot d \cdot C_1} = \frac{5.10^3}{8.10^3.2.10} = \frac{1}{32} kg/m^3$

ce qui correspond à une altitude $h_M = d \cdot Ln(\frac{\mu_S}{\mu_M}) = 8000.Ln\,42 = 29{,}9km$

la décélération serait $\delta_M = \mu_M \cdot \frac{C_1}{m} \cdot V_0^2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot \frac{V_0^2}{2.d} = 1470\ m \cdot s^{-2}$

soit, dans le cadre de ce modèle, environ 150 fois G.

2.5 Si l'on réintroduit l'attraction terrestre son effet est notable au départ car μ est faible, la vitesse va donc augmenter; on peut majorer cette augmentation en évaluant la vitesse de la navette au sol s'il n'y avait pas d'atmosphère($v' = (64.10^6+10.10^5)^{1/2}$ =8,06 km/s

Sous l'action de la gravitation la navette atteindrait une vitesse limite $V_l = \sqrt{\frac{m.G}{\mu.C_1}}$

qui correspond en h=0, où μ = 1,3kg/m3, à $V_1 = 62$ m/s. Dans le cadre du modèle où l' on néglige la gravitation cette vitesse de 62m/s correspond à une altitude calculable par les

relations du § 2.2 : $\mu(h) = m/.(C_1\ d.).Ln(8000/62) = 0{,}30$ kg/m3**,** on aurait cette masse volumique donc cette vitesse(62 m/s) en h= d.Ln(1,3/0,3) soit en h = 11,6 km ,(13,2km en tenant compte de $\mu(h)$), altitude nettement inférieure à celle (environ 30 km) où l' on prévoyait une décélération maximale de 150* G, qu'il ne faut pas faire subir à d'hypothétiques passagers. **L'allure générale de la courbe v=f(h), et ses conséquences, sont donc peu modifiées.**

3 Freinage sur une spirale

3.1 **O**n projette sur la tangente à la trajectoire la relation fondamentale en "oubliant" là encore le terme de gravitation lié à la terre(m.G.cosα) : $\frac{dv}{dt} = -\mu \cdot \frac{C_1}{m} \cdot v^2 = \frac{dv}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$

relation inchangée, mais avec dh /dt = - Vcosα $\frac{dv}{d\mu} + \frac{C_1 \cdot d}{m.\cos\alpha} \cdot v = 0$

3.2 Le freinage sur l'air raréfiée de la très haute atmosphère provoque une perte lente d'énergie mécanique pour un satellite, même en orbite circulaire ($\alpha = \pi/2$) et donc une lente diminution de l'altitude. Ce phénomène n'est pas pris en compte ici. Donc si $\alpha = \pi/2$ il n'y a pratiquement pas freinage et si $\alpha = 0$ la rentrée est la plus "brutale".

3.3 On observera le maximum de décélération pour $d\delta/d\mu.=[1 - \mu.\ 2.C_1\ d./m.\cos\alpha.].(\delta/\mu)$

La décélération maximale sera $\dot{\delta}_M = \dot{\mu}_M \cdot \frac{C_1}{m} \cdot V_0^2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{\cos\alpha}{e} \cdot \frac{V_0^2}{2.d} = 1470 \cdot \cos\alpha$

pour qu'elle soit inférieure à 10.G il faudra $\cos\alpha < 1/14{,}7$ soit $\pi/2 > \alpha > \pi/2 - 0{,}068$

La longueur L de la trajectoire parcourue par la navette sera :

$$L = \int_{t=0} v.dt = \int_{t=0} \frac{dh}{dt} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} dt = 14{,}7.h_0 = 1470\ \text{km}$$

3.4 On néglige, lors de la descente de la navette, la perte d'énergie potentielle gravitationnelle devant la perte d'énergie cinétique 64 fois plus importante:$-\Delta Ec = 1/2.m.v^2 = 1{,}6.10^{11}$ **joules**

Pour dissiper cette énergie on songe à la vaporisation d'une céramique; il en faudrait:

$$-\Delta E_c = \left[L_{Fus} + l_{vap} \right] m_{ceram} \qquad \text{Soit} \quad m_{ceram} = \frac{1{,}6.10^{11}}{10^7} = 16\ \text{tonnes}$$

Cette valeur est bien sur incohérente avec la valeur, 5 tonnes, de la masse de la navette; on peut penser qu'il y a en plus évacuation de la chaleur par convection et surtout par rayonnement, l'importance de ces facteurs augmente.si la durée du vol spirale croît($\alpha \to \pi/2$)

Pb 2 : INTERACTION ENTRE DEUX SPIRES

1 Etude des phénomènes électromagnétiques

1.1 $B_z = \frac{\mu_0 I_1}{2a} \left[1 + \frac{a^2}{z^2} \right]^{\frac{3}{2}} \cong \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2z^3}$

1.2 L'Inductance mutuelle M entre les deux spires:

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \cong \frac{\mu_0 \pi a^4}{2z^3} \quad \text{et} \quad I_2 = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{1}{R}\frac{3\mu_0 \pi a^4}{2z^4} I_1 \frac{dz}{dt}$$

M≠0 alors que L_1 et L_2 sont nulles peut surprendre. On peut espérer qu'un candidat s'en étonnant et invoquant $L_2.L_1 \geq M^2$ aura été **fortement récompensé !**

1.3 . a

1°) Symétrie de révolution autour de oz $\Rightarrow$ $\vec{B}$ indépendant de θ

2°) Le plan $M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ est plan de "symétrie négative" $\Rightarrow$ $\vec{B}$ (M) $\in$ au plan $M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$

1.3 . b $\quad 2\pi.r.dz.B_r + \pi.r^2.\frac{\partial B_z}{\partial z}.dz = 0 \quad \Rightarrow \quad B_r = -\frac{a}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{a}{2}.\frac{3\mu_0 \pi a^2 I_1}{2z^4}$

1 3 . c $\quad \vec{F} = \oint_{M_2} . d\vec{l} \wedge \vec{B} = -\vec{u}_z . 2\pi a . B_r$

$$F_z = -\frac{a}{2}.\frac{3\mu_0 \pi a^2 I_1}{2z^4} 2\pi a \frac{3\mu_0 \pi a^4 I_1}{2z^4} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{R.z^8}\frac{3\mu_0 \pi a^4}{2}\frac{dz}{dt}$$

prend la forme demandée avec $k = \frac{1}{2.m.R}.\left(3\mu_0 \pi a^4 I\right)^2$ Bien sur $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

2 Etude des mouvements des spires

2.1 $\quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{d^2 z_2}{dt^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 z_2}{dt^2} = -\frac{k}{2.z^8}.\frac{dz}{dt} = -\frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2 z}{dt^2}$

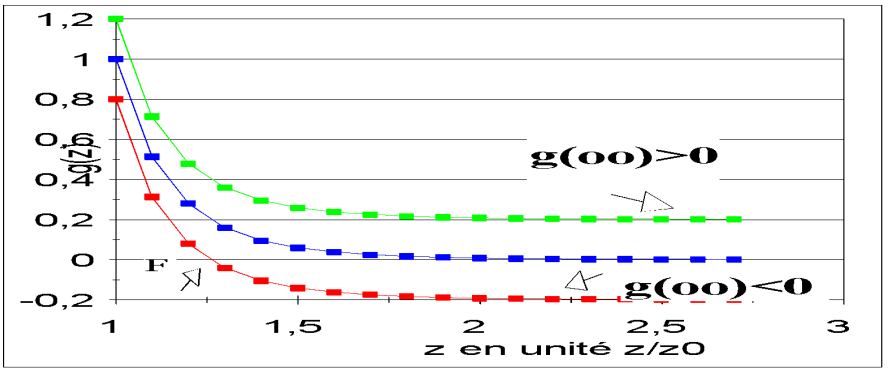
et $\quad \frac{dz}{dt} = \frac{k}{7.z^7} + C = \frac{k}{7.z_0^7}\left(\frac{z_0^7}{z^7} - 1\right) + v_0 = g(z)$

2.2. a $\quad d^2z/dt^2$ est négatif à la date t = 0, puisque $v_0 > 0$; mais selon la valeur de v_0 et surtout du signe de $(7.v_0.z_0^7 - k)$, deux cas sont possibles; dans le premier $g(z \to \infty) > 0$

alors$(7.v_0.z_0^7 - k) > o$,

pour g(z®µ)>0 :

Le régime permanent lorsque t® µ est un <u>mouvement uniforme</u> à la vitesse ; les spires s'écartent indéfiniment.



2.2 . b Si maintenant $g(z \to \infty) < 0$, c'est à dire qu'alors $(7.v_0.z_0^{7}-k) < 0$, la vitesse d'éloignement, s'annule pour une valeur finie de z; c'est le point F du graphe inférieur. Les spires s'immobilisent et comme on a toujours $\ddot{z} \cdot \dot{z} \leq 0$, le mouvement, ne peut reprendre.

2.2 . c La courbe intermédiaire du graphe est bien la courbe séparatrice du diagramme des phases.

2.3 D'un point de vue énergétique on peut écrire que la variation de la somme de l'énergie magnétostatique et de l'énergie cinétique deux spires est égale à la somme des énergies reçues de l'extérieur c'est à dire ici au travail du générateur qui maintient le courant I_1 constant et la chaleur " reçue"de l'extérieur , algébriquement négative, contrepartie de l'effet joule. On peut aussi écrire le théorème de l'énergie cinétique: c'est à dire: variation de l'énergie cinétique des deux spires égale au travail de toutes les forces, ici les forces de Laplace sur les deux spires. Il reste une difficulté relative à l'état initial de la seconde bobine- (à t = o, il est possible de considérer $I_2 = 0$, il faudra alors un L faible mais non nul, **ou** $I_2 \neq 0$, cela à quelques répercutions sur le bilan; **A noter que**

$$\Delta(M.I_1.I_2) = I_1.\Delta(M.I_2) = -M.I_1.I_{2_0} = -\frac{7m.v_0^2}{12}$$, n'est pas négligeable)

si $7.v_0.z_0^{7} = 2k$ les spires s'éloignent indéfiniment (§ 2.2.a) et $dz/dt = (v_0/2).(1+ z_0^{7}/z^{7})$

Travail des forces de Laplace:

$$W_L = -\int_{z=z_0} \frac{k.m}{2} \cdot \frac{1}{z^8} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot dz = -(m.v_0 \cdot \frac{7}{4}) \cdot \frac{v_0}{2} \int_{u=1} u^{-15} + u^{-8} du = -\frac{3}{16} \cdot mv_0^2$$

énergie joule:

$$W_J = \int_{t=0} R.I_2(t)^2.dt = \int R.\frac{1}{R}\frac{3\mu_0\pi a^4}{2z^4} I_1 \frac{dz}{dt} dt = \int \frac{k.m}{2.z^8}\frac{dz}{dt} \cdot dt = -W_L$$

variation d'énergie cinétique:

$$E_{c_{initiale}} = 2.\left[\frac{m}{2} \cdot (\frac{v_0}{2})^2\right] = \frac{m.v_0^2}{4} \quad ; \quad E_{c_{finale}} = 2.\left[\frac{m}{2} \cdot (\frac{v_0}{4})^2\right] = \frac{m.v_0^2}{16} \Rightarrow \Delta E_c = \frac{3.m.v_0^2}{16}$$