Пироженко Світлана Сергіївна,

учитель Чигиринського НВК І – ІІІ ступенів №2 Чигиринської районної ради Черкаської області

Кола Ейлера

Теоретична частина

Один з найвидатніших математиків Леонард Ейлер за своє довге життя написав більше 850 наукових робіт. В одній з цих робіт і з'явилися «кола». Ейлер писав, що «саме вони дуже підходять для того, щоб полегшити наші роздуми під час розв'язування цілого класу однотипних задач».

Кола Ейлера (їх ще називають діаграми Ейлера) – це фігури на площині, які ілюструють перетин і об'єднання множин. Як фігури найчастіше використовують кола, але можна розглядати квадрати, прямокутники й інші фігури.

Множину можна уявити собі як сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за якоюсь ознакою. У математиці множини — це одне з основних неозначуваних понять.

Кожний об'єкт, що входить до множини A, називається *ементом* цієї *множини*.

Зазвичай елементи позначають малими латинськими літерами: a, b, c, d тощо.

Якщо a належить множині A, то пишуть $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

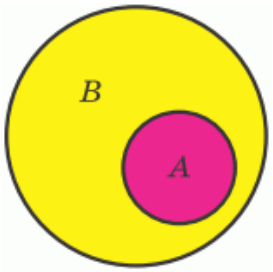
Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою множиною* і позначається $\emptyset$.

Дві *множини* A і B називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B, і навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$.

З означення випливає, що множина однозначно визначається своїми елементами.

Для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають *діаграмами (кругами)* *Ейлера-Венна*.



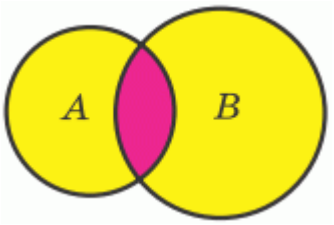
Підмножина

Якщо кожен елемент однієї множини A є елементом другої множини B, то кажуть, що перша множина A є підмножиною другої множини B і записують так: $A \subset B$.

Використовують також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B, або дорівнює множині B.

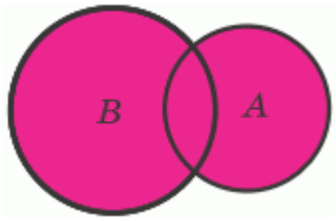
Операції над множинами

Перетин (переріз) множин



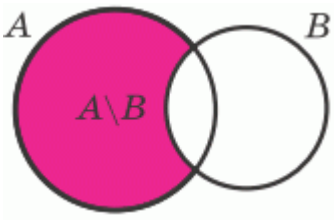
Перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B. Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$.

Об'єднання множин



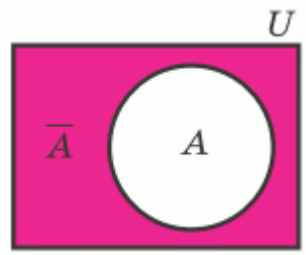
Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B.
Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$.

Різниця множин



Різницею множин A і B називається множина, яка складається з усіх елементів, які належать множині A і не належать множині B. Різницю A і B позначають так: $A \setminus B$.

Доповнення множини



Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої *універсальної множини* U, то різниця $U \setminus A$ називається *доповненням множини* A. Тобто доповненням множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині A (але які належать універсальній множині U). Доповнення множини A позначають так: $\overline{A}$.

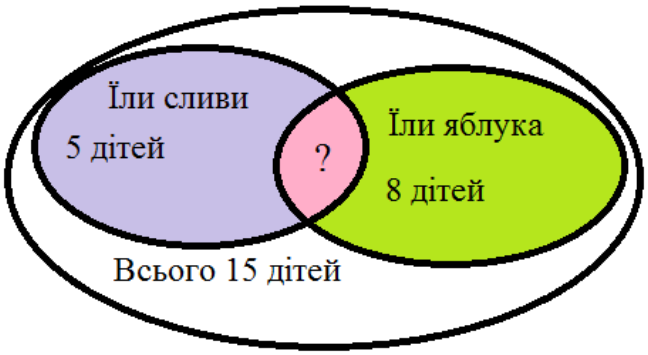
Приклади задач з розв'язанням

Задача 1

За святковим столом сиділо 15 дітей. П'ятеро з них їли тільки сливи, восьмеро — тільки яблука. Фруктами смакували усі. Скільки дітей їли і сливи, і яблука?

Розв’язання

Зобразимо умову даної задачі за допомогою кругів Ейлера.



Знайдемо, яка кількість дітей їла тільки сливи або тільки яблука. Маємо, $5 + 8 = 13$. Зважаючи на те, що за столом сиділо 15 дітей і всі смакували фруктами, знаходимо $15 - 13 = 2$ дітей, які їли і сливи, і яблука.

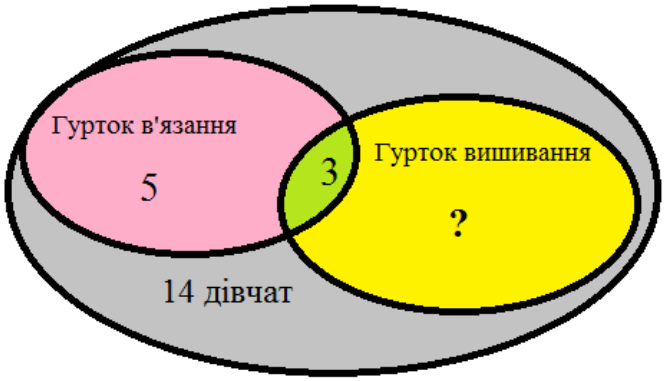
Відповідь: 2 дітей їли і сливи, і яблука.

Задача 2

У класі навчається 14 дівчат. П'ять із них відвідують лише гурток в'язання, а три — і гурток в'язання, і гурток вишивання. Скільки дівчат відвідують лише гурток вишивання?

Розв’язання

Зобразимо умову даної задачі за допомогою кругів Ейлера.



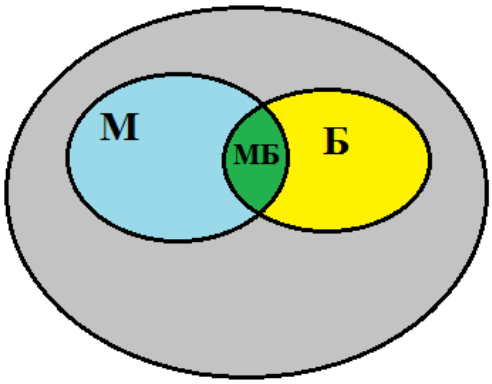
Знайдемо кількість дівчаток, які відвідували гурток в'язання: $5 + 3 = 8$.
Оскільки, дівчат у класі 14, то гурток вишивання відвідували $14 - 8 = 6$.

Відповідь: 6 дівчат відвідували тільки гурток вишивання.

Задача 3

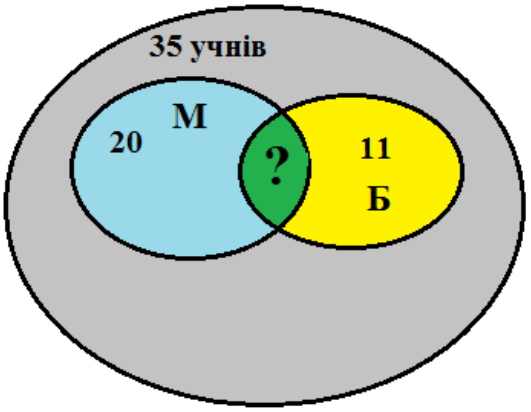
У класі 35 учнів. З них 20 займаються у математичному гуртку, 11 — у біологічному, 10 учнів не відвідують ці гуртки. Скільки біологів захоплюються математикою?

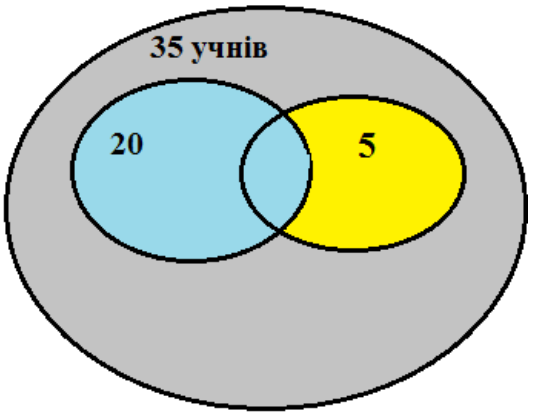
Розв’язання



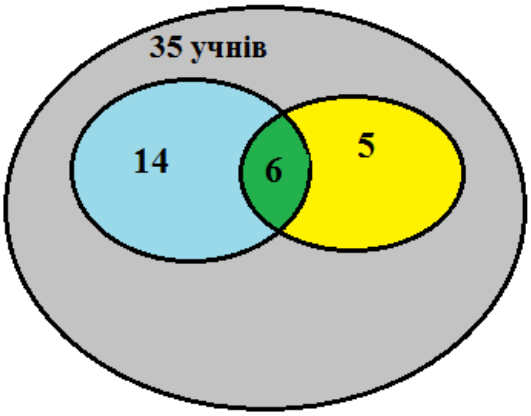
Можемо накреслити велике коло, а в ньому два менших, як показано на малюнку.
У ліве коло, позначене буковою **М**, помістимо усіх математиків, а у праве, позначене буквою **Б**, усіх біологів. Очевидно, що у спільній частині кіл, яку можна позначити буквами **МБ**, опиняться ті самі математики-біологи, які нас цікавлять.

Останніх школярів, а їх 10, попросимо не покидати зовнішнього найбільшого кола. Тепер порахуємо: всього усередині великого кола 35 школярів, усередині двох менших $35 - 10 = 25$. У середині «математичного» кола М знаходяться 20 учнів, значить, у тій частині «біологічного» кола, яка розташована поза колом М та зображена на малюнку жовтим кольором, знаходяться $25 - 20 = 5$ біологів, які не відвідують математичний гурток.





Решта біологів, а їх$11 - 5 = 6$ учнів, знаходяться у спільній частині кіл М і Б.



Таким чином, 14 учнів захоплюються тільки математикою, 5 учнів — тільки біологією, 6 учнів захоплюються математикою і біологією.

Відповідь: 6 біологів захоплюється математикою.

Задачі , які розв'язуються за допомогою кіл Ейлера

1.[1] Соня поклала до коробки 4 зелених круга, 6 трикутників, і 3 червоних многокутника, всього 11 фігур. Скільки червоних трикутників положила Соня? (2)

2.[1] У зоопарку живуть 30 мавп. 10 з них беруть у відвідувачів цукерки, 15- печиво, а 9 – не беруть нічого. Скільки мавп беруть у відвідувачів цукерки і печиво? Тільки печиво? (4,11)

3.[2] На одній вулиці проживають 40 сусідів. 12 з них увечері п'ють чай, 28 – дивляться телевізор, а 5- не роблять ні того, ні другого, так як рано лягають спати. Скільки сусідів увечері п'ють чай, дивлячись телевізор? (5)

4.[2] Серед учнів нашого класу проводили опитування щодо улюблених жанрів фільмів. Усього в класі 38 учнів. Фантастичним фільмам надає перевагу 21 учень, серед яких троє полюбляють ще й комедії, шестеро — мультфільми, а один — усі три жанри. Комедії подобаються 13 учням, серед яких п'ятеро вибрали одразу два жанри. Скільки учнів полюбляють мультфільми?

5.[2] 26 картин, представлених на шкільній виставці 12 виконано аквареллю, 17 — портрети, а 13 написано в стилі кубізм. Відомо, що аквареллю було виконано 4 портрета й 5 картин у стилі кубізм, крім того, 9 портретів були написані в стилі кубізм. Скільки портретів було виконано аквареллю в стилі кубізм?

6.[2] У класі навчаються 20 учнів, із них 16 вивчають англійску мову, 13 — французьку, а 12 — німецьку. Доведіть, що хоча б один учень цього класу вивчає всі три мови.

7.[3] До Ані на день народження прийшли 10 друзів. 5 з них полюбляють цукерки «Лілія», 5- іриски, 6- льодяники. Відомо, що тільки один чоловік з 10 любить льодяники і іриски. Скільки друзів люблять тільки «Лілію» і льодяники; тільки «Лілію» і іриски, якщо кожен з друзів любить хоча б один сорт цукерок? (можливі три випадки)

8.[3] У таборі відпочинку 70 дітей. З них 27 займаються у драматичному гуртку, 32 співають у хорі, 22 захоплюються спортом. У драматичному гуртку 10 дітей з хору, у хорі 6 спортсменів, у драматичному гуртку 8 спортсменів, 3 спортсмени відвідують і гурток і хор. Скільки дітей не співають у хорі, не захоплюються спортом і не відвідують драматичний гурток? (10)

9.[3]У класі 38 учнів. З них 16 грають у баскетбол, 17 – у хокей, 18 – у волейбол. Захоплюються двома видами спорту – баскетболом і хокеєм -4, баскетболом і волейболом – 3, волейболом і хокеєм – 5.троє не захоплюються ні баскетболом, ні хокеєм, ні волейболом. Скільки учнів

захоплюються одночасно трьома видами спорту? Скільки учнів захоплюються лише одним із цих видів спорту? (2,21)

10.[3] Під час формування шкільної команди з баскетболу з'ясувалося, що зі 100 претендентів 30 школярів займаються бігом, 28 — стрибками в довжину, 42 — плаванням. Бігом і стрибками займаються 8 учнів, стрибками й плаванням — 10, бігом і плаванням —5. А ще є троє учнів, які займаються всіма трьома видами спорту. Скільки претендентів не займаються ні бігом, ні стрибками, ні плаванням?

11.[4] Задача про килими. Підлога площею 12 $м^2$ покрита трьома килимами: площа одного килима 5 $м^2$, другого – 4 $м^2$, а третього – 3 $м^2$. Кожні два килими перекриваються на площі 1,5 $м^2$, причому 0,5$м^2$ із цих півтора квадратних метрів приходяться на ділянку підлоги, де перекриваються усі три килима. Яка площа підлоги, не покрита килимами? Яка площа ділянки, покритої тільки одним першим килимом? (4$м^2$; 2,5$м^2$)

Список рекомендованої літератури

1. Скоропад Г. Круги Ейлера. Задачі на перетин і доповнення множин. — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://ukped.com/statti/teorija-navchannja/5606-kruhy-eylera-zadachi-na-peretyn-i-dopovnennia-mnozhyn.html

2. Множина. Підмножина. Операції. Круги Ейлера – Венна. — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://bondarenko.dn.ua/mathematics/basic-formulas/mnozhina-pidmnozhina-operatsiyi-krugi-ejlera-venna/

3. Бєлова Л.П. 101 логічна задача: [факультативний курс] Математичний калейдоскоп/ Л.П. Бєлова, М.М. Корнієнко, Л.Ю. Полякова. — Харків: Ранок, 2014. — 64 с.