УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя оргкомитета
III (областного) этапа республиканской
олимпиады,
заместитель начальника управления
образования Могилёвского облисполкома
_____________ С. В. Леонова
8 ноября 2010 года

Задания для II этапа республиканской олимпиады по математике

20 ноября 2010 года

8 класс

1. Доказать, что для любых действительных чисел x и y верно неравенство:

$$x^2+y^2+z^2-x-y-z\geq -\frac{3}{4}$$

2. Имеется доска размером 3×10 клеток и неограниченный набор прямоугольных пластинок, размером 1×2 клетки. Надя и Ваня играют в такую игру. Они делают ходы по очереди. За один ход разрешается положить на доску одну пластинку, полностью закрыв две свободные клетки с общей стороной. Проигрывает тот, кто не сможет положить очередную пластинку. Первой ходит Надя. Кто из ребят может обеспечить себе победу независимо от игры соперника и как ему это сделать?

3. Найти все тройки различных простых чисел a, b и c таких, что

$$a^4+b^4+c^2=2010\ .$$

4. Дан квадрат размером 3×3 клетки и краски трех цветов: синего, красного и белого. Сколькими способами можно закрасить клетки этого квадрата так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречалось бы ровно по одной клетке каждого цвета? Одну клетку можно закрашивать только одним цветом и никакую клетку нельзя закрашивать дважды.

5. Разрезать прямоугольник на несколько трапеций так, чтобы среди полученных трапеций не было бы ни одной прямоугольной. Число разрезов и число трапеций не ограничено.

Пользоваться калькулятором не разрешается
Время работы: 4 часа

Указания к решению

8 класс

1. *Решение*:

Проведем равносильные преобразования: $x^2+y^2+z^2-x-y-z \ge -\frac{3}{4}$,

$$x^2+y^2+z^2-x-y-z+\frac{3}{4} \ge 0,$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}+z^2-z+\frac{1}{4} \ge 0,$$

$$\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}\right)+\left(z^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{4}\right) \ge 0,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0.$$

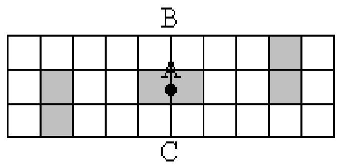
Последнее неравенство верно, поскольку квадрат любого числа есть величина неотрицательная.

2. *Решение*.

Выиграет Надя. Для этого ей первым ходом надо положить пластинку в центр доски (см. рис.) и далее свои ходы делать симметрично ходам Вани относительно центра доски (точки А). Тогда на каждый ход Вани у Нади будет ответ и первым не сможет положить пластинку Ваня.

***Ответ*: при правильной игре выиграет Надя.**

Замечание: если Надя будет ходить симметрично ходам Вани не относительно центра доски А, а относительно прямой ВС (см. рис.), то она может проиграть и такое решение не может считаться верным.



3. *Решение.*

Так как числа *a*, *b* и *c* – простые, то среди чисел a^4, b^4, c^2 будет не менее двух нечетных. Сумма трех нечетных чисел – нечетна, значит, среди слагаемых будет ровно одно четное. Тогда одно из чисел *a*, *b, c* равно 2 (других простых четных чисел нет).

Пусть *a* = 2, тогда $2^4+b^4+c^2=2010$, $b^4+c^2=1994$, $c^2=1994-b^4$. Так как $7^4=2401>1994$, то $b=3$ или $b=5$.

Если $b=3$, то $c^2=1994-3^4=1994-81=1913$. Но число 1913 не является точным квадратом.

Если $b=5$, то $c^2=1994-5^4=1994-625=1369=37^2$. Откуда *c* = 37. Итак, *a* = 2, *b* = 5, *c* = 37.

Аналогично, если *b* = 2, то *a* = 5, *c* = 37.

Пусть теперь *c* = 2. Тогда $a^4+b^4+2^2=2010$, $a^4+b^4=2006$, но $7^4=2401>2006$, $3^4+5^4=81+625=706<2006$. Это означает, что простых чисел *a* и *b*, таких, что $a^4+b^4=2006$, не существует.

Ответ: $a=2, b=5, c=37$ **или** $a=5, b=2, c=37$

4. *Решение.*

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Пронумеруем клетки, как показано на рисунке.

Начнем красить квадрат с левого верхнего угла. Клетку № 1мы можем покрасить тремя способами, клетку № 2 – двумя, клетку № 3 – одним. Тогда первую строку можно покрасить 3·2·1 = 6 способами. Клетку № 4 можно покрасить двумя способами (кроме цвета клетки № 1). Если цвета клеток № 2 и № 4 не совпадают, то клетку № 5 можно покрасить только одним способом (цветом клетки № 1)

Если цвета клеток № 2 и № 4 совпадают, то клетку № 5 также можно покрасить только одним способом – цветом, отличным от цвета клеток № 1 и № 2 (если пары клеток №№ 1 и 5, а также №№ 2 и 4 покрашены в одинаковые цвета, то клетки №№ 7 и 8 также окажутся покрашены в одинаковые цвета, чего не должно быть). Клетку № 6 можно покрасить одним способом. Таким образом, вторую строку можно покрасить 2·1·1 = 2 способами, а первые две строки - 6·2 = 12 способами. Очевидно, что после покраски первых двух строк, цвет клеток третьей строки определяется однозначно. Итого, имеем 12 способов покраски квадрата.

Ответ: **12 способов.**

5. *Решение.*

Приведем пример разрезания прямоугольника на 12 трапеций. Заметим, что произвольный непрямоугольный треугольник ABC можно легко разрезать на 3 трапеции, взяв внутри него произвольную точку M и сделав разрезы MK, ME и MF параллельно сторонам треугольника (см рис 1). Тогда, разрезав прямоугольник диагоналями на 4 треугольника, а каждый из треугольников на 3 трапеции, получим требуемое разрезание.

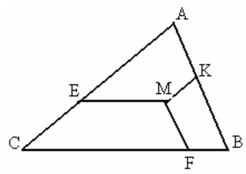


рис. 1