

**Тема: Задачі, що приводять до поняття інтеграла.
Визначений інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца**

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Розглянемо функцію f , яка є неперервною на проміжку $[a; b]$ і набуває на ньому невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.

На рисунку 1 наведено приклади криволінійних трапецій.

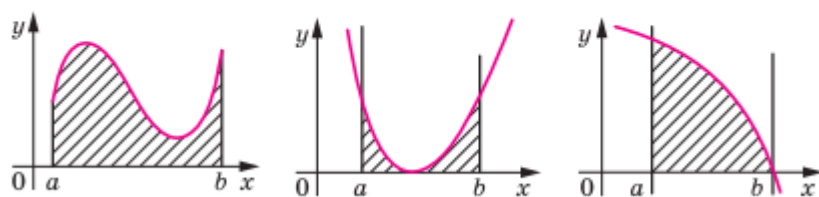


Рис. 1

Розглянемо теорему, яка дає змогу обчислювати площі криволінійних трапецій.

Теорема 1 Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), можна обчислити за формулою

$$S = F(b) - F(a),$$

де F — будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Задача 1. Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = \sin x$ та прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 2 зображено криволінійну трапецію, площу якої потрібно знайти.

Однією з первісних функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ є функція $F(x) = -\cos x$. Тоді $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$. ◀

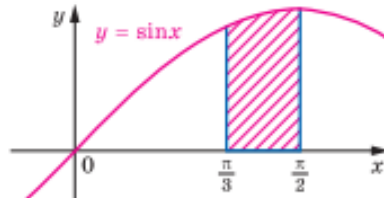


Рис. 2



Рис. 3

Задача 2. Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 4x - x^2$ і прямою $y = 0$.

Розв'язання. Графік функції f перетинає пряму $y = 0$ у точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 4$ (рис. 3). Тоді фігура, площу якої треба знайти, є криволінійною трапецією, обмеженою графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Однією з первісних функції f на проміжку $[0; 4]$ є функція $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

Тоді

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Відповідь: $\frac{32}{3}$. ◀

Означення. Нехай F — первісна функції f на проміжку I , числа a і b , де $a < b$, належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$.

Визначений інтеграл функції f на проміжку $[a; b]$ позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»). Отже,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (1)$$

де F — довільна первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тоді для довільних чисел a і b , де $a < b$, можна записати:

$$\int_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Зауважимо, що значення різниці $F(b) - F(a)$ не залежить від того, яку саме первісну функції f вибрано. Справді, кожну первісну G функції f на проміжку I можна подати у вигляді $G(x) = F(x) + C$, де C — деяке число. Тоді

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Рівність (1) називають **формулою Ньютона—Лейбніца**.

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за фор-

мулою Ньютона—Лейбніца потрібно:

- 1) знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;
- 2) обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
- 3) знайти різницю $F(b) - F(a)$.

Під час обчислення визначених інтегралів різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$.

Використовуючи таке позначення, обчислимо, наприклад,

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$. Маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

Задача 3. Обчисліть $\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2) dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^4 + x^2 - 2) dx &= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 \right) = 6 \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Відповідь: $6 \frac{8}{15}$. ◀

Формула Ньютона—Лейбніца дає змогу встановити зв'язок між визначеним інтегралом і площею S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$).

Використовуючи теорему 11.1, можна записати:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Ця формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла.

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал п.11.
2. Законспектувати означення, формули, теореми.
3. Виконати письмово вправи: 11.3, 11.8.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://www.youtube.com/watch?v=-pEiWKb0CHI>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .