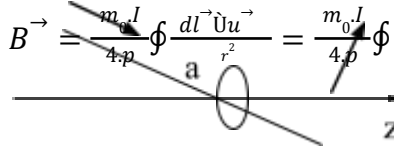


Concours Spécial 95 -II-

I-1-a On utilise la loi de Biot et Savart . En appelant z l'axe perpendiculaire au plan de la spire, orienté par le sens du courant, on obtient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl \sin \alpha}{(R/\sin \alpha)^2} \vec{z} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{z}$$


I-1-b On divise le champ par deux lorsque $\sin^3 \alpha = 1/2$.

On est alors à la distance $d = R \cot \alpha = 0,77 R$.

I-1-c On retrouve la géométrie habituelle des deux fils rectilignes parcourus par le même courant (en sens inverse). Le champ magnétique créé par un fil sur l'autre est donné par

$B = \mu_0 I / 2 \pi a$ et la force par unité de longueur par

$$F = I_1 B = \mu_0 I^2 / 2 \pi a . \text{ (force répulsive).}$$

I-1-d . AN : b- $d = 7,66 \text{ cm}$; c- $F = 0,090 \text{ N/m}$;

I-2-a Soit P le plan contenant les courants surfaciques.

Le plan de figure est un plan de symétrie donc le champ B est perpendiculaire au plan de figure (vers l'avant ou l'arrière).

Le plan P contenant les courants est un plan de symétrie donc champ B est vers l'avant au dessus du plan, il est vers l'arrière dessous. $\otimes B$

Le théorème d'Ampère appliqué à un rectangle symétrique par

au plan P et dont les côtés sont parallèles au champ donne : $lB + lB = \mu_0 l j_s$ soit $B = \mu_0 j_s / 2$

ou $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2l} \vec{u} \times \vec{n}$ avec $\vec{n}$ la normale au plan de la nappe.

I-2-b On superpose les deux champs créés par chaque nappe, et on obtient un champ double entre les deux plans soit $B = \mu_0 j_s$ et zéro à l'extérieur.

D'autre part, j_s est donné par $j_s = I / l$.

Pour un solénoïde infini parcouru par un courant I ,

$B = \mu_0 n I = \mu_0 j_s = \mu_0 I / l$. On obtient la même chose.

I-2-c Le champ magnétique vu par l'élément de courant

vaut : $B = \mu_0 I / 2l$; la force vaut : $d\vec{F} = j_s \vec{u} \times B \cdot dS$

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I^2}{2l} \cdot d \cdot \vec{z} = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{I}{l} \right)^2 \cdot d^2 \vec{z}$$

C'est une force répulsive (orientée vers l'extérieur de la nappe).

II-1-a Supposons la sphère en équilibre thermique avec l'enceinte. Sa température est donc égale à T_1 . Elle

rayonne la puissance $S \cdot \sigma \cdot T_1^4$. Sa température restant constante au cours du temps, elle reçoit donc de la part de

l'enceinte, la même puissance. Cette puissance reçue ne dépend que de la température de l'enceinte soit $S \cdot \sigma \cdot T_1^4$ même si, maintenant la sphère n'est plus en équilibre thermique avec l'enceinte.

II-1-b-c On fait le bilan algébrique de l'énergie reçue par la sphère pendant l'intervalle de temps $d\theta$: $\delta W_{\text{reçue}} = (S \cdot \sigma \cdot T_1^4 - S \cdot \sigma \cdot T^4) d\theta = S \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T^4) \cdot d\theta \approx 4 \cdot S \cdot \sigma \cdot T_1^3 \cdot (T - T_1) \cdot d\theta$

On pose $\lambda = 4 \cdot S \cdot \sigma \cdot T_1^3$; alors $\delta W_{\text{reçue}} = -\lambda \cdot (T - T_1) \cdot d\theta$

II-1-d-e L'énergie reçue élève la température de la sphère de $d(T - T_1)$

d'où : $\delta W_{\text{reçue}} = -\lambda \cdot (T - T_1) \cdot d\theta = M \cdot c \cdot d(T - T_1)$ en

appelant M

et c la masse et la chaleur massique de la sphère.

Le calcul donne :

$$\ln(T - T_1) = -(\lambda / Mc) \cdot \theta + \text{constante} ;$$

on pose $\tau = Mc / \lambda$

En utilisant les conditions initiales,

$$T - T_1 = (T_0 - T_1) \cdot \exp(-\theta / \tau)$$

Application numérique :

$\tau = 3900 \text{ secondes} = 65 \text{ minutes}$. (seul le rayonnement intervient dans ce mécanisme; en réalité, si l'enceinte était remplie d'air, la conduction serait prédominante et la constante de temps serait plus faible).

II-2-a On pose $\mu = \lambda(T_1 = T_0 ; S = 1) = 4 \cdot \sigma \cdot T_0^3$.

L'énergie reçue par unité de surface par la paroi intermédiaire :

$$\delta W_{\text{reçue}} = -\mu \cdot (T - T_1) \cdot d\theta - \mu \cdot (T - T_2) \cdot d\theta$$

L'échauffement correspondant dT stocke l'énergie :

$$\delta W_{\text{stockée}} = (\rho \cdot e \cdot 1) \cdot c \cdot dT$$

On égale ces deux termes :

$$-\mu \cdot (T - T_1) \cdot d\theta - \mu \cdot (T - T_2) \cdot d\theta = (\rho \cdot e \cdot 1) \cdot c \cdot dT \text{ soit } -\mu \cdot [2 \cdot T - (T_1 + T_2)] d\theta = \rho \cdot e \cdot c \cdot dT$$

On pose $T_\infty = (T_1 + T_2) / 2$: c'est la température d'équilibre de la paroi

d'où : $dT / (T - T_\infty) = -(2 \cdot \mu / \rho \cdot e \cdot c) \cdot d\theta = -d\theta / \tau'$ avec $\tau' = \rho \cdot e \cdot c / 2 \cdot \mu$

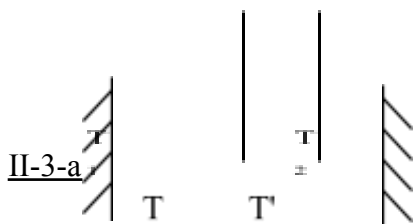
et finalement, compte tenu des conditions initiales :

$$T - T_\infty = (T_0 - T_\infty) \cdot \exp(-\theta / \tau') .$$

II-2-b

A.N : $\tau' = 240 \text{ secondes} = 4 \text{ minutes}$.

$$T_\infty = 278 \text{ K} .$$



II-3-a

Bilan thermique pour la paroi à la température T comprise entre T_1 constante et T' variable :

$$\text{échauffement} = \rho.e.c.dT = -\mu.[T - T_1 + T - T'].d\theta = \text{puissance reçue par unité de surface.}$$

De même, pour la deuxième paroi comprise entre T_2 constante et T variable :

$$\text{échauffement} = \rho.e.c.dT' = -\mu.[T' - T_2 + T' - T].d\theta = \text{puissance reçue par unité de surface.}$$

Au bout d'un temps infini, $dT = dT' = 0$: On a alors $2.T = T_1 + T'$ et $2.T' = T_2 + T$

En résolvant, on trouve $T = T_{\infty} = (2.T_1 + T_2)/3$ et $T' = T_{\infty}' = (2.T_2 + T_1)/3$

Le système devient, avec la même valeur de τ' :

$$(1) \quad dT = -[T - T_1/2 - T'/2] \cdot d\theta / \tau'$$

$$(2) \quad dT' = -[T' - T_2/2 - T/2] \cdot d\theta / \tau'$$

ce système peut se résoudre en remarquant que les combinaisons linéaires (1) +/- (2) donnent des solutions simples :

$$(1) + (2) : d(T+T') = -[(T+T')/2 - (T_1+T_2)/2] \cdot d\theta / \tau'$$

$$(1) - (2) : d(T - T') = -[(T - T')/3 - (T_1 - T_2)/2] \cdot d\theta / \tau'$$

$$\text{soit } T+T' = (T_1+T_2) + [T_0+T_0' - (T_1+T_2)].\exp(-\theta/2.\tau')$$

$$\text{et } T-T' = (T_1-T_2)/3 + [T_0-T_0' - (T_1-T_2)/3].\exp(-3.\theta/2.\tau')$$

$$\text{Finalement } T = T_{\infty} + 1/2 \cdot \{[T_0+T_0' - (T_1+T_2)].\exp(-\theta/2.\tau') + [T_0-T_0' - (T_1-T_2)/3].\exp(-3.\theta/2.\tau')\}$$

$$T' = T_{\infty}' + 1/2 \cdot \{[T_0+T_0' - (T_1+T_2)].\exp(-\theta/2.\tau') - [T_0-T_0' - (T_1-T_2)/3].\exp(-3.\theta/2.\tau')\}$$

$$\text{A.N. : } T_{\infty} = 277 \text{ K ; } T_{\infty}' = 281 \text{ K ;}$$

T' tend vers T_{∞}' par valeur supérieure.

II-3-b-c

Lorsqu'on intercale deux parois, les constantes de temps augmentent légèrement; On ralentit les échanges.

Par contre les différences de températures entre deux parois voisines sont approximativement divisées par le nombre de parois. Comme l'énergie échangée entre deux parois est proportionnelle à cette différence de température, cet échange est fortement diminué. Le flux total allant de la source chaude T_2 vers la source froide T_1 sera donc minimisé.

III-1-a Soit une surface partiellement réfléchissante (dioptré ou miroir).

Soient $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_1'$ et $\mathbf{u}_2$ les vecteurs unitaires des rayons incident, réfléchi et réfracté.

Soient i_1 , i_1' et i_2 les angles entre les vecteurs unitaires précédents et la normale (compris entre 0 et $\pi/2$).

Les lois de Snel-Descartes s'énoncent comme suit :

- 1) les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale.
- 2) les rayons réfléchi et réfracté traversent la normale.
- 3) pour la réflexion, $i_1 = i_1'$; pour la réfraction $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ en appelant n_1 et n_2 les indices de réfraction des milieux.

Si $n_1 > n_2$, alors $i_1 < i_2$: le rayon venant du milieu 1 s'éloigne de la normale dans le milieu 2. L'angle i_2 atteint la valeur $\pi/2$ avant i_1 (lorsque $n_1 \sin i_{\text{lim}} = n_2$). Lorsque $i_1 > i_{\text{lim}}$ la réfraction est impossible : seule la réflexion existe : c'est la réflexion totale.

A.N. : pour l'interface eau-air $i_{\text{lim}} = \arcsin 1,333 = 48^\circ 36'$.

III-2-a

Le plan de figure contient au point A le rayon incident et la normale : c'est le plan d'incidence : le rayon réfracté reste dans plan et ainsi de suite pour les autres réflexions ou réfractions.

III-2-b

L'angle d'incidence en B est égal à l'angle de réfraction en est donc inférieur à l'angle limite. (tout rayon qui est entré la goutte peut en sortir). Il ne peut pas y avoir de réflexion totale ni en B, ni en C.

III-2-c

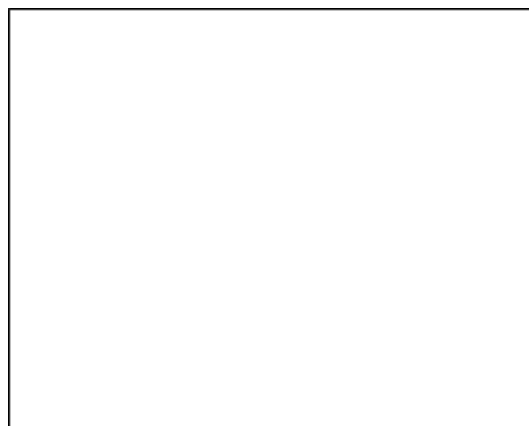
On compte algébriquement dans le sens des aiguilles d'une montre les déviations successives en A, en B et en C :

en A : $i - r$; en B : $\pi - 2r$; en C : $i - r$.

Au total : $\pi + 2i - 4r = \pi - \alpha$ soit $\alpha = 4r - 2i$.

III-2-d

On remplace r par sa valeur calculée par les lois de Descartes : $r = \arcsin (\sin i / n)$.



ce

A ; il
dans

III-3-a

La symétrie de révolution autour de l'axe $x'Ox$ permet de se limiter à l'étude dans le plan de figure.

Dans le plan de figure, la symétrie par rapport à l'axe $x'Ox$ permet de se limiter à l'étude de i positif soit $0 \leq$

$$i \leq \pi/2 .$$

III-3-b

On différencie : $\frac{d\alpha}{di} = 4 \cdot \frac{dr}{di} - 2 = 4 \cdot \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - 2$

III-3-c

L'extremum est obtenu pour $d\alpha/di = 0$ soit $4 \cdot \cos^2 i = n^2 - \sin^2 i \dots \sin^2 i = (4 - n^2)/3$.

A.N. : $i_{\max} = 59,41^\circ$ (alors $\alpha = 42,08^\circ$)

i (rad)	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
α (rad)	0	0,258	0,491	0,666	0,734	0,624	0,252
i (en $^\circ$)	0	15	30	45	60	75	90
α (en $^\circ$)	0	14,78	28,12	38,15	42,07	35,75	14,43

III-3-d voir courbe.

III-4-a

Les rayons qui arrivent sur la sphère entre les angles i et $i + di$ sont situés dans un cylindre de génératrices parallèles à $x'Ox$ et rayon moyen $R \cdot \sin i$. L'épaisseur de ce cylindre vaut $d(R \cdot \sin i) = i \cdot di$. La puissance transportée par ces rayons vaut :

$$d\phi = \Phi_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sin i \cdot R \cdot \cos i \cdot di$$



III-4-b

On peut vérifier ce résultat en calculant la puissance totale reçue par la sphère : $\Phi_0 \cdot \pi \cdot R^2$:

$$F = 2 \cdot p R^2 \cdot F_0 \cdot \int \sin i \cdot \cos i \cdot di = 2 \cdot p R^2 \cdot F_0 \cdot \left[\frac{\sin^2 i}{2} \right]_0^{\pi/2} = p R^2 \cdot F_0$$

III-4-c

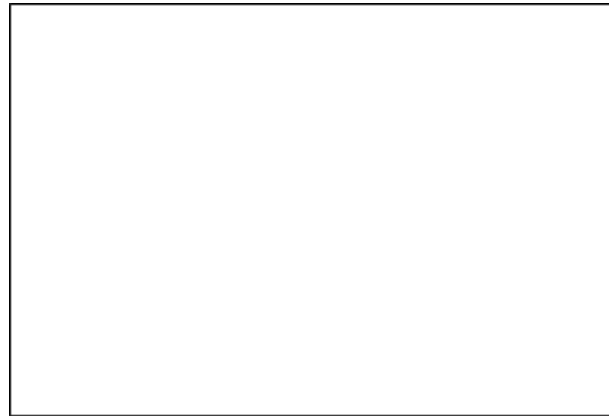
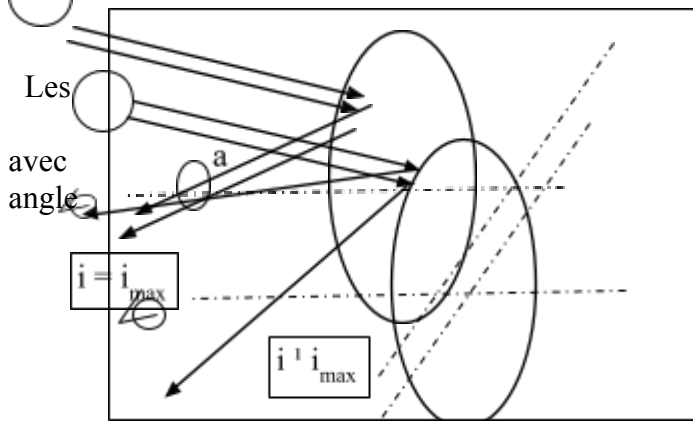
$$d\phi/di = \Phi_0 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 2 \cdot \sin i \cdot \cos i$$

$$\text{A.N. : pour } i = 59^\circ 25' \quad d\phi/di = 0,876 \cdot \Phi_0 \cdot \pi \cdot R^2.$$

Le maximum est obtenu pour $i = 45^\circ$: $d\phi/di = \Phi_0 \cdot \pi \cdot R^2$.

III-5-a

L'observateur est placé **loin** de la goutte.



rayons
arrivant
un
i très

différent de $i_{\max}$ ressortent de la goutte non parallèles entre eux et donnent donc un faisceau divergent : la puissance surfacique transportée est donc faible (elle diminue lorsqu'on s'éloigne de la goutte).

Les rayons arrivant sur la goutte avec un angle i voisin de $i_{\max}$ sont tous déviés d'un même angle et ressortent parallèles entre-eux : ils transportent donc une puissance surfacique constante, ce qui donne, pour l'observateur un phénomène lumineux.

Pour un observateur donné, seules les gouttes vérifiant $i = i_{\max}$ donnent cette impression visuelle. Ce sont les gouttes qui sont sur le cône d'axe (observateur - direction des rayons provenant du soleil) et de demi-angle au sommet $\alpha(i_{\max})$. Généralement l'horizon empêche de voir entièrement le cône.

III-5-b

Le soleil doit être derrière l'observateur. Si le soleil est incliné de 10° au-dessus de l'horizon, la hauteur angulaire maximale de l'arc en ciel sera de 32° ($\alpha_{\max} - 10^\circ$). Il faut qu'il y ait des gouttes d'eau (pluie ou brouillard).

Comme l'indice de l'eau dépend de la longueur d'onde, $\alpha(i_{\max})$ en dépend aussi : le phénomène observé est en couleurs, chaque couleur correspond à une inclinaison.

III-6-a

On recalcule plus précisément les valeurs de $\alpha_{\max}$ pour les longueurs d'onde extrêmes du spectre visible.

$$\text{rouge : } n = 1,331 \quad i_{\max} = 59,527^\circ \quad \alpha = 42,370^\circ$$

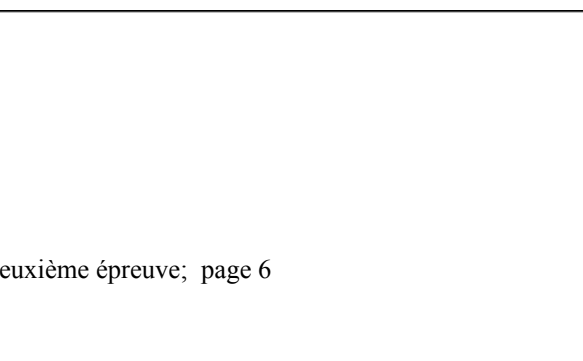
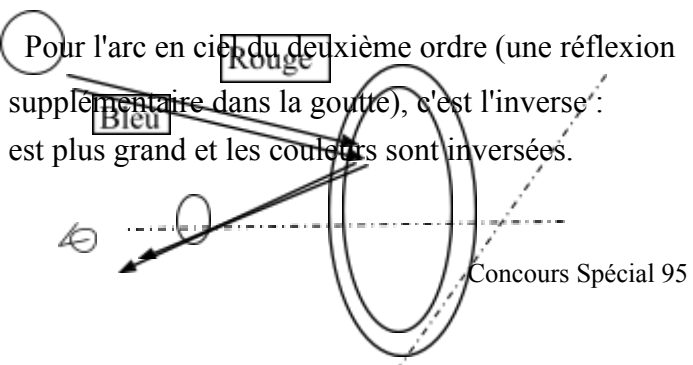
$$\text{bleu : } n = 1,337 \quad i_{\max} = 59,178^\circ \quad \alpha = 41,500^\circ$$

$$\Delta\alpha = 0,87^\circ$$

III-6-b

L'angle α augmente du bleu au rouge donc le rouge est à l'extérieur de l'arc en ciel

Pour l'arc en ciel du deuxième ordre (une réflexion supplémentaire dans la goutte), c'est l'inverse : est plus grand et les couleurs sont inversées.



l'angle α

Pour l'analyse historique de l'arc en ciel, on pourra consulter l'ouvrage :
Rainbows, Halos and Glories
par Robert Greenler (Cambridge University Press).