

□ Bài 02

MOẠT SOÁ PHỒNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C$.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x) dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x)) u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$, suy ra $dt = u'(x) dx$.

Khi đó ta được nguyên hàm: $\int g(t) dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$.

Chú ý: Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $\int f(x) dx = \int u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx \end{cases}$.

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$.

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

• **Dạng 4.** $I = \int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt $u = \begin{cases} \sin x \\ e^x \end{cases}$ hoặc có thể đặt ngược lại $u = \begin{cases} e^x \\ \sin x \end{cases}$.

CAÂU HOÙI TRÁEC NGHIEÄM



Vấn đề 1. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ



Câu 1. Biết $\int f(u) du = F(u) + C$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\int f(2x-1) dx = 2F(2x-1) + C$.
 B. $\int f(2x-1) dx = 2F(x) - 1 + C$.
 C. $\int f(2x-1) dx = F(2x-1) + C$.
 D. $\int f(2x-1) dx = \frac{1}{2}F(2x-1) + C$.

Lời giải. Đặt $u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx$

Khi đó $\int f(2x-1) dx = \int f(u) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int f(u) du = \frac{1}{2} F(u) + C = \frac{1}{2} F(2x-1) + C$.

Chọn D.

Câu 2. Tìm hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F'(x) = (2x+1)^{2017}$ và $F\left(\frac{1}{2018}\right) = 2018$.

- A. $F(x) = \frac{(2x+1)^{2018}}{2018} + 2018$.
 B. $F(x) = \frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + 2018$.
 C. $F(x) = 2017(2x+1)^{2016} + 2018$.
 D. $F(x) = 4034(2x+1)^{2016} + 2018$.

Lời giải. Ta có $\int (2x+1)^{2017} dx$. Đặt $u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx$

Khi đó $\int (2x+1)^{2017} dx = \frac{1}{2} \int u^{2017} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{2018}}{2018} + C = \frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + C$.

Theo giả thiết $F\left(\frac{1}{2018}\right) = 2018 \Rightarrow C = 2018$.

Vậy $F(x) = \frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + 2018$. Chọn B.

Câu 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x^2+1)^9$.

- A. $\int f(x) dx = -\frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C$.
 B. $\int f(x) dx = \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C$.
 C. $\int f(x) dx = 2(x^2+1)^{10} + C$.
 D. $\int f(x) dx = (x^2+1)^{10} + C$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = \int x(x^2+1)^9 dx$. Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2xdx$.

Khi đó $\int x(x^2+1)^9 dx = \frac{1}{2} \int t^9 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{10}}{10} + C = \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C$.

Vậy $\int f(x) dx = \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C$. Chọn B.

Câu 4. (ĐỀ MINH HỌA NĂM 2016 – 2017)

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$ B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$
 C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C.$ D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C.$

Lời giải. Ta có $\int \sqrt{2x-1} dx = \int \sqrt{2x-1} dx$. Đặt $t = \sqrt{2x-1} \Rightarrow t^2 = 2x-1 \Rightarrow 2t dt = dx$.

Khi đó $\int \sqrt{2x-1} dx = \int t \cdot 2t dt = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$

Chọn B.

Câu 5. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x} \sqrt{\ln^2 x + 1}$ và $F(1) = \frac{1}{3}$.
 Tính $\int_1^9 f(x) dx$.

- A. $\int_1^9 f(x) dx = \frac{8}{3}$ B. $\int_1^9 f(x) dx = \frac{8}{9}$ C. $\int_1^9 f(x) dx = \frac{1}{3}$ D. $\int_1^9 f(x) dx = \frac{1}{9}$

Lời giải. Ta có $\int \frac{\ln x}{x} \sqrt{\ln^2 x + 1} dx$.

Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Rightarrow t^2 = (\ln^2 x + 1) \Rightarrow 2t dt = \frac{2 \ln x}{x} dx \Rightarrow t dt = \frac{\ln x}{x} dx$.

Khi đó $\int \frac{\ln x}{x} \sqrt{\ln^2 x + 1} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3} + C.$

Theo giả thiết $F(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + C = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0.$

Suy ra $F(x) = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3} \Rightarrow \int_1^9 f(x) dx = \frac{8}{9}$ **Chọn B.**

Câu 6. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ và $F(e^2) = 4$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C$ B. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2$
 C. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - 2$ D. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + x + C$

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{\ln x}{x} dx$. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Khi đó $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Theo giả thiết $F(e^2) = 4 \Rightarrow \frac{\ln^2(e^2)}{2} + C = 4 \Rightarrow C = 2.$

Suy ra $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2$ **Chọn B.**

Chú ý: Đáp án A được gọi là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Câu 7. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ và thỏa $F(0) = -\ln 2$.
 Tìm tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 3$.
 A. $S = \{\pm 3\}$. B. $S = \{3\}$. C. $S = \mathbb{R}$ D. $S = \{-3\}$.

Lời giải. Ta có $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} dx = \int dx - \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = x - \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.
 Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$. Khi đó
 $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x + 1| + C = \ln(e^x + 1) + C$.
 Do đó $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = x - \ln(e^x + 1) + C$.
 Theo giả thiết $F(0) = -\ln 2 \Rightarrow 0 - \ln 2 + C = -\ln 2 \Rightarrow C = 0$.
 Suy ra $F(x) = x - \ln(e^x + 1)$.
 Xét phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 3 \Rightarrow x - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x + 1) = 3 \Rightarrow x = 3$. **Chọn B.**

Câu 8. Hàm $F(x)$ nào dưới đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{x^2}$?
 A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2$. B. $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5)$.
 C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. D. $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2})$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = \int xe^{x^2} dx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$.
 Khi đó $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.
 Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên đáp án A đúng với $C = 2$, đáp án B đúng với $C = \frac{5}{2}$, đáp án D đúng với $C = -1$. Vậy chỉ có đáp án C là sai. **Chọn C.**
Cách trắc nghiệm. Ta thấy các đáp án A, B, D sai khác nhau hằng số nên chắc chắn rằng nó là một nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 9. Cho $I = \int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$ và $t = \ln x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
 A. $I = \int te^t dt$. B. $I = \int e^t dt$. C. $I = \int \frac{e^t}{t} dt$. D. $I = \int t dt$.

Lời giải. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Khi đó $I = \int e^t dt$. **Chọn B.**

Câu 10. Kí hiệu $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x \cos x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
 A. $F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} + C$. B. $F(x) = \frac{\cos^4 x}{4} + C$.

C. $F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

D. $F(x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = \int \sin^4 x \cos x dx$. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Khi đó $\int f(x) dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

Chọn D.

Câu 11. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 + 2$.

B. $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2$.

C. $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 - 2$.

D. $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 - 2$.

Lời giải. Ta có $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$.

Đặt $t = 1+3\cos x \Rightarrow dt = -3\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -\frac{1}{3} dt$.

Khi đó $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln|t| + C = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$.

Theo giả thiết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow C = 2$.

Suy ra $F(x) = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + 2 \Rightarrow F(0) = 2 - \frac{1}{3} \ln 2^2 = 2 - \frac{2}{3} \ln 2$.

Chọn B.

Câu 12. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln \sqrt{2}$.

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln 2$.

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln 2$.

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \ln 2$.

Lời giải. Ta có $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Khi đó $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$.

Theo giả thiết $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + C = 0 \Rightarrow C = \ln(\sqrt{2})$.

Suy ra $F(x) = \ln(|\sin x|) + \ln(\sqrt{2}) \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln 2$.

Chọn B.

Câu 13. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan 2x$ thỏa mãn $F(0) = 0$.
Tính $T = \sqrt{2}e^{F\left(\frac{\pi}{6}\right)} - e^{F\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

A. $T = 1.$

B. $T = \sqrt{2}.$

C. $T = -\sqrt{2}.$

D. $T = 0.$

Lời giải. Ta có $\int \tan 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \, dx.$

Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2 \sin 2x \, dx \Rightarrow \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} dt.$

Khi đó $\int \tan 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| + C.$

Theo giả thiết $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$

Suy ra $F(x) = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x|$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = -\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2})$

Vậy $T = \sqrt{2} \cdot e^{\ln \sqrt{2}} - e^0 = 2 - 1 = 1.$ **Chọn A.**

Câu 14. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sin x} \cos x$ và $F(p) = 5$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = e^{\sin x} + 4.$

B. $F(x) = e^{\sin x} + C.$

C. $F(x) = e^{\cos x} + 4.$

D. $F(x) = e^{\cos x} + C.$

Lời giải. Ta có $\int f(x) \, dx = \int e^{\sin x} \cos x \, dx.$ Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx.$

Khi đó $\int f(x) \, dx = \int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^t \, dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$

Theo giả thiết $F(p) = 5 \Rightarrow e^{\sin p} + C = 5 \Rightarrow 1 + C = 5 \Rightarrow C = 4.$

Suy ra $F(x) = e^{\sin x} + 4.$ **Chọn A.**

Câu 15. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ và $F(0) = 2017$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = e^{\tan x}.$

B. $F(x) = e^{-\tan x}.$

C. $F(x) = e^{\tan x} + 2016.$

D. $F(x) = e^{\tan x} + 2018.$

Lời giải. Ta có $\int f(x) \, dx = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx.$ Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} \, dx.$

Khi đó $\int f(x) \, dx = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx = \int e^t \, dt = e^t + C = e^{\tan x} + C.$

Theo giả thiết $F(0) = 2017 \Rightarrow e^{\tan 0} + C = 2017 \Rightarrow C = 2016.$

Suy ra $F(x) = e^{\tan x} + 2016.$ **Chọn C.**



Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP LẤY NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN



Câu 16. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ và thỏa mãn $F(1) = 3$.

Tính $F(e^2)$.

A. $F(e^2) = 4.$

B. $F(e^2) = 3e^2 + 4.$

C. $F(e^2) = -e^2 + 4.$

D. $F(e^2) = e^2 + 4.$

Lời giải. Ta có $\int \ln x \, dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}.$

Khi đó $\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$.

Theo giả thiết $F(1) = 3\frac{3}{4} - 1 + C = 3 \Rightarrow C = 4$.

Suy ra $F(x) = x \ln x - x + 4\frac{3}{4} \Rightarrow F(e^2) = e^2 + 4$.

Chọn D.

Câu 17. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$.

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$.

C. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

D. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

Lời giải. Ta có $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4} = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Xét $\int f'(x) \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó $\int f'(x) \ln x dx = \ln x \cdot f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

Chọn C.

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x}$.

A. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) + C$.

B. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) + \ln x + C$.

C. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$.

D.

$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln(\ln x) + \ln x + C$.

Lời giải. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Suy ra $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln t dt$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}$.

Khi đó $\int \ln t dt = t \ln t - \int 1 dt = t \ln t - t + C = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$.

Chọn C.

Câu 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^x$.

A. $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C$.

B. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + C$.

C. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$.

D. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$.

Lời giải. Ta có $\int xe^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$. **Chọn C.**

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)e^x$ và thỏa mãn $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = (x-1)e^x$. B. $F(x) = (x-2)e^x$.
C. $F(x) = (x+1)e^x + 1$. D. $F(x) = (x-2)e^x + 3$.

Lời giải. Ta có $\int (x-1)e^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C = (x-2)e^x + C$.

Theo giả thiết $F(0) = 1 \Rightarrow (0-2)e^0 + C = 1 \Rightarrow C = 3$.

Vậy $F(x) = (x-2)e^x + 3$. **Chọn D.**

Câu 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cdot e^{-x}$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = -1$. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $F(x) + x + 1 = 0$.

- A. $S = -3$. B. $S = 0$. C. $S = 2$. D. $S = -1$.

Lời giải. Ta có $\int x \cdot e^{-x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$.

Khi đó $\int x \cdot e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$.

Theo giả thiết $F(0) = -1 \Rightarrow -0 e^{-0} - e^{-0} + C = -1 \Rightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = -x e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$.

Xét phương trình $F(x) + x + 1 = 0 \Rightarrow -e^{-x}(x+1) + x + 1 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(-e^{-x} + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ e^{-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow S = -1 + 0 = -1$.

Chọn D.

Câu 22. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ và thỏa mãn $F(p) = 2p$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2F(0) - 8F(2p)$.

- A. $T = 6p$. B. $T = 4p$. C. $T = 8p$. D. $T = 10p$.

Lời giải. Ta có $\int x \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Khi đó $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

Theo giả thiết $F(p) = 2p \Rightarrow -p \cos p + \sin p + C = 2p \Rightarrow C = p$.

$$F(x) = -x \cos x + \sin x + p \Rightarrow \begin{cases} F(0) = p \\ F(2p) = -2p \cos(2p) + \sin(2p) + p \end{cases} \Rightarrow T = 2p - 8(-2p \cos(2p) + \sin(2p) + p) = 10p.$$

Suy ra
Chọn D.

Câu 23. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos^2 \frac{x}{2}$ và thỏa $F(0) = \frac{1}{2}$.
 Tính $F(p)$.

- A. $F(p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}x$ B. $F(p) = \frac{p^2}{4} - \frac{1}{2}x$ C. $F(p) = \frac{p^2}{4} + \frac{1}{2}x$
 D. $F(p) = \frac{p^2}{4} + 1$.

Lời giải. Ta có $\int x \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int x \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{2} \int x \cos x dx$.

• $\frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{x^2}{4} + C_1$. (1)

• $\frac{1}{2} \int x \cos x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Suy ra $\frac{1}{2} \int x \cos x dx = \frac{1}{2} (x \sin x - \int \sin x dx) = \frac{1}{2} (x \sin x + \cos x + C_2)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\int x \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} + C_1 + \frac{1}{2} (x \sin x + \cos x + C_2)$.

Theo giả thiết $F(0) = \frac{1}{2} = \frac{0^2}{4} + C_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} C_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 + \frac{1}{2} C_2 = 0$.

Suy ra $F(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} (x \sin x + \cos x)$ và $F(p) = \frac{p^2}{4} - \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 24. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cos x$.

- A. $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + 2C$.
 B. $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$.
 C. $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C$.
 D. $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + x \cos x - \sin x - C$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Khi đó $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$. (1)

Tính $\int x \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Ta được $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x + C)$
 $= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C$. **Chọn C.**

Câu 25. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \sin x$.

- A. $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x + C$. B. $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x + e^x \cos x) + C$.
 C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + C$. D. $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) + C$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $\int \sin x e^x dx = e^x \sin x - \int \cos x e^x dx = e^x \sin x - K$ (1)

Tính $K = \int \cos x e^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Suy ra $K = e^x \cos x + \int \sin x e^x dx$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\int \sin x e^x dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int \sin x e^x dx)$

$\Rightarrow 2 \int \sin x e^x dx = e^x \sin x - e^x \cos x \Rightarrow \int \sin x e^x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x)$.

Vì các nguyên hàm sai khác nhau hằng số C nên ta **Chọn D**.