Oscillations de puissance à haute fréquence

I) le magnétron, oscillateur hyperfréquence.

A) le magnétron sans champ magnétique

1) La symétrie cylindrique montre que le champ est purement radial. Les invariances (en négligeant les effets de bord) que la composante ne dépend que de r. Dans le vide inter armature ; l'équation de Maxwell-Gauss se résume donc à : $div\vec{E} = 0 = \frac{1}{r}\frac{d(rE(r))}{dr}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$.

On a donc l'équation en V : $0 = \frac{1}{r}\frac{d(r\frac{dV}{dr}))}{dr}$ qui donne $\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r}$ et $V = A\ln(r) + cte$.

Les conditions aux limites du système fixent V(a) = 0 et V(b) = V_0. Ceci permet d'obtenir alors :

.



2) On suppose ici le potentiel inchangé (une particule dans le potentiel précédent). En utilisant l'énergie mécanique, qui se conserve lors de ce mouvement non dissipatif : $0 + 0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - eV(r)$, obtenu car la vitesse est purement radiale (aucune cause de mouvement latéral). On en tire la dérivée de r (vitesse radiale) en utilisant l'expression de v(r) du 1) :



$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{\frac{2eV_0}{m}\frac{\ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{b}{a})}}} = \sqrt{m\frac{\ln(\frac{b}{a})}{2eV_0}}\int_a^b \frac{1}{\ln(\frac{r}{a})}\frac{dr}{a}a$$

3) On sépare les variables pour obtenir τ :

Ceci donne en utilisant les notations du texte :



B) le magnétron vide avec un champ magnétique.

4) Le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à l'électron donne sur $\mathbf{e}_z$: $m\ddot{z} = 0$. La vitesse suivant z ne varie pas et est initialement nulle. Comme dz :dt=0, on en déduit que le mouvement s'effectue à $z=z_0$ = cte à la cote initiale et donc dans un plan.

La force de Lorentz dérivant d'un potentiel, le problème est conservatif (la partie magnétique de cette force ne travaille pas) : l'énergie mécanique de l'électron se conserve donc. Par contre, la vitesse

change d'expression puisque le mouvement n'est plus rectiligne (force magnétique latérale) : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et donc $E_m = 0 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - eV_0\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$ qui constitue un invariant du mouvement. On peut aussi écrire :



5) Projetons le théorème du moment cinétique (TMC) sur l'axe Oz : $\frac{dL_{Oz}}{dt} = [\overrightarrow{OM} \wedge (-e\vec{v} \wedge \vec{B})].\vec{e}_z$ puisque la force électrostatique a un bras de levier nul. On a donc $\frac{dL_{Oz}}{dt} = [(\overrightarrow{OM}.e\vec{v})\vec{B} - (\vec{B}.\overrightarrow{OM})e\vec{v}].\vec{e}_z = [er\dot{r}\vec{B} - \vec{0}];\vec{e}_z = er\dot{r}B_0 = \frac{d(\frac{1}{2}er^2B_0)}{dt}$. Cette relation s'intégre en donnant :

$L_{Oz}(t) - L_{Oz}(0) = \frac{1}{2}er^2B_0 - \frac{1}{2}ea^2B_0$ et, comme $L_{Oz}(0)$ est nulle (vitesse initiale nulle), on a finalement :



qui apparaît comme une autre constante du mouvement. Le calcul de L_{Oz} donne $mr^2d\theta/dt$

6) Les deux constantes du mouvement permettent d'éliminer $d\theta/dt$ et d'obtenir la vitesse radiale en fonction de r : $(\dot{r}^2 + \frac{r^4\dot{\theta}^2}{r^2}) = \frac{2eV_0}{m}\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} = (\dot{r}^2 + \frac{L_{Oz}^2}{m^2r^2}) = (\dot{r}^2 + \frac{(eB_0(r^2-a^2))^2}{4m^2r^2})$

Soit finalement : $\dot{r}^2 = \frac{2eV_0}{m}\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} - \frac{(eB_0(r^2-a^2))^2}{4m^2r^2})$. Pour que l'électron puisse atteindre l'électrode en b, il faut que cette expression puisse rester positive jusqu'à b (et en particulier en b) :

$\dot{r}^2 = \frac{2eV_0}{m}\frac{\ln(b/a)}{\ln(b/a)} - \frac{(eB_0(b^2-a^2))^2}{4m^2b^2} > 0$ soit $\frac{2eV_0}{m} > \frac{e^2B_0{}^2(b^2-a^2)^2}{4m^2b^2}$ il faut donc :



Si b>>a, on peut alors donner l'expression approchée : $B_c = \sqrt{\frac{2mV_0}{e}}\frac{2}{b}$ (équation de HULL).

Pour $B_0 > B_c$, l'électron ne peut atteindre l'anode et dr/dt s'annule pour $r = r_0 < b$. En reprenant l'expression de $(dr/dt)^2$, on trouve alors, dans le cas particulier où $r_0 \to b$, $B_0 = B_c$ et donc : $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L_{Oz}}{mr^2} = \frac{e(r^2-a^2)B_0}{2mr^2}$ et $\omega_c = \frac{e(b^2-a^2)}{2mb^2}\sqrt{\frac{2mV_0}{e}}\frac{2b}{b^2-a^2}$. On a donc :



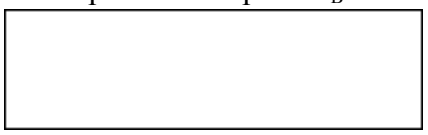
C) Le magnétron, avec charge d'espace et champ magnétique

7) L'équilibre impose (PFD en projection radiale) : $-mr\omega_B^2 = -er\omega_B B_B - eE$ avec une vitesse de rotation uniforme et un champ radial comme dans la partie précédente. E varie alors en r et non plus en 1/r comme précédemment : le potentiel considéré alors est donc incompatible au problème. Une charge volumique dans l'espace interélectrodes permet alors de modifier ce potentiel et son évolution (équation de Poisson)

8) On reprend l'expression du 7) : $\frac{dV}{dt} = -E = r\omega_B B_B - \frac{mr\omega_B^2}{e}$ qui s'intègre en $V(r) = \frac{r^2 - a^2}{2}(\omega_B B_B - \frac{m\omega_B^2}{e})$. En b, on obtient, $V(b) = V_0 = \frac{b^2 - a^2}{2}(\omega_B B_B - \frac{m\omega_B^2}{e})$ et en combinant les deux relations :



En réutilisant V_0, on obtient une expression particulière pour B_B : $\frac{2V_0}{b^2 - a^2} = \omega_B B_B - \frac{m\omega_B^2}{e}$.



9) L'énergie mécanique en a est nulle (pas de vitesse donc pas d'énergie cinétique et potentiel nul donc pas d'énergie potentielle). De manière générale, $E_m = \frac{1}{2}mr^2\omega_B^2 - eV_0\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$. On utilise alors l'expression de l'équilibre du 7) :

$$E_m = \frac{1}{2}r(er\omega_B B_B - e\frac{dV}{dr}) - eV_0\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{1}{2}r(er\omega_B B_B - eV_0\frac{2r}{b^2 - a^2}) - eV_0\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

$$= \frac{1}{2}er^2\omega_B B_B - eV_0\frac{2r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

Cette expression évolue en r^2 et ne peut donc être constante. Seules les zones pour lesquelles r est voisin de b permettent de simplifier l'expression et de retrouver la nullité de E_m. On a alors : $0 = \frac{1}{2}eb^2\omega_B B_B - eV_0\frac{2b^2 - a^2}{b^2 - a^2}$ ce qui donne une deuxième relation entre B_B et ω_B. On en tire $\omega_B B_B = \frac{2eV_0}{eb^2}\frac{2b^2 - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{2V_0}{b^2 - a^2} + \frac{m\omega_B^2}{e}$ qui donne $\omega_B^2 = \frac{2eV_0}{mb^2}$ et $B_B = \frac{2V_0}{(b^2 - a^2)}\sqrt{\frac{mb^2}{2eV_0}} + \frac{m}{e}\sqrt{\frac{2eV_0}{mb^2}} \approx 2\sqrt{\frac{2mV_0}{eb^2}}$ en considérant a<<b.

Finalement :  et 

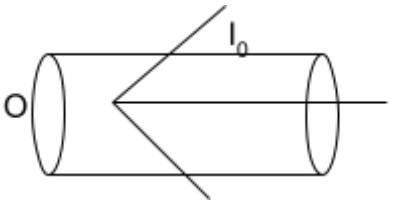
10) $V_0 = \frac{mb^2\omega_B^2}{2e} = \frac{mb^2 4\pi^2 f_B^2}{2e}$ d'après ce qui précède. Numériquement, on obtient : 16800 V. On en déduit B_B = 0,12 T.

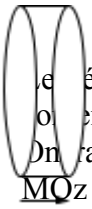
Fin de la partie I

II- Le klystron, amplificateur hyperfréquence

II.A. Etude du faisceau d'électrons du tube

11)





Les électrons traversant une section s pendant dt sont contenu dans un cylindre de section s et de hauteur $u_0 dt$ (voir schéma). Leur charge est donc $dq = \rho u_0 \pi a^2 dt$ pour une valeur de $I_0 = -\rho\pi a^2 u_0$ (ρ est négatif alors que I_0 est pris conventionnellement positif)

On raisonne comme en électrostatique (ARQS) La symétrie cylindrique permet de dire que le plan MQz est plan de symétrie tout comme le plan passant par M et orthogonal à Oz. Le champ électrique est donc sur l'intersection de ces plans, i.e. radial. La distribution de charges est invariante par rotation autour de Oz et la composante radiale du champ ne dépend donc pas de θ. Elle ne dépend pas non plus de z car la distribution est invariante par translation le long de l'axe (en assimilant cette distribution à une distribution infini, les effets de bords étant ignorés). On a donc : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

On utilise alors le théorème de Gauss sur un cylindre S d'axe Oz, de hauteur h et rayon r.

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int à}S}}{\varepsilon_0} = 2\pi rhE(r) = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0} = \frac{-I_0\pi r^2 h}{\varepsilon_0 \pi a^2 u_0}$$

On a donc :



12) le PFD donne $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}(a)$ et en considérant le champ uniforme, en projection sur la direction radiale : $\ddot{r} = \frac{eI_0 a}{2\pi\varepsilon_0 ma^2 u_0}$ qui s'intègre en $\dot{r} - 0 = \frac{eI_0 t}{2\pi\varepsilon_0 mau_0}$ puis

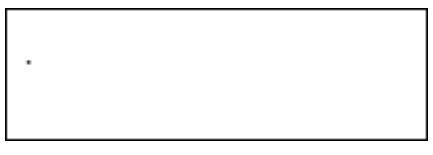
$$r - a = \Delta r = \frac{eI_0 t^2}{4\pi\varepsilon_0 mau_0} = \frac{-e\vec{E}(a)t^2}{2m}$$



Le sceau restera cylindrique si $\frac{\Delta r}{a} << 1$ soit, en reprenant l'expression obtenue ci-dessus : $\frac{eI_0 l^2}{4\pi\varepsilon_0 ma^2 {u_0}^3} << 1$ qui aboutit à $I_0 << \frac{4\pi\varepsilon_0 ma^2 {u_0}^3}{el^2} = I_1$

13) On doit négliger le champ radial. L'équation de Mawxell-Gauss donne $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{I_0}{s\varepsilon_0 u_0} = \frac{dV}{dz}$.

L'équation de Poisson, obtenue en injectant $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\frac{d^2V}{dz^2}\vec{e}_z$ dans la relation précédente donne alors $\Delta V = \frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{I_0}{s\varepsilon_0 u_0}$ qui s'intègre en $V(z) = \frac{I_0}{2s\varepsilon_0 u_0}z^2 + \alpha z + \beta$. Les conditions aux limites sont alors V(0) = V(l) = V_A. ce qui conduit à :

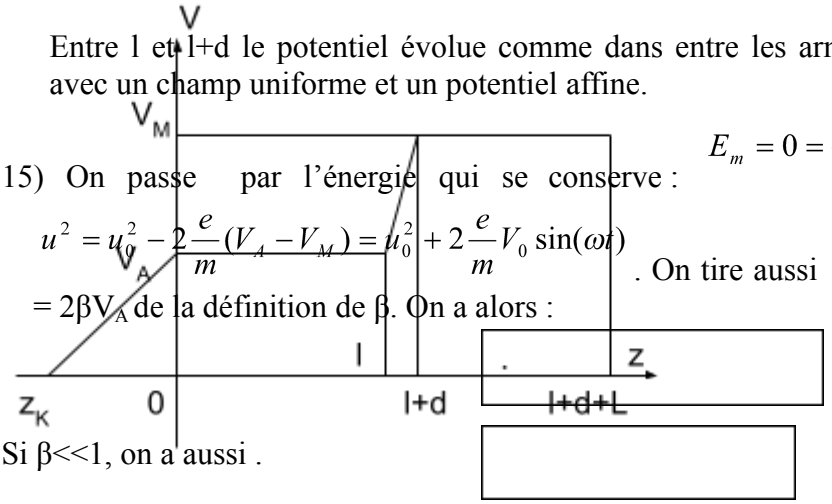


Ce potentiel est uniforme sur l si la variation de V est négligeable devant V_A. Le minimum de z^2-zl est obtenu en l/2 et vaut $-l^2/4$. Si $\frac{I_0}{8s\varepsilon_0 u_0} l^2 << V_A$ le potentiel est quasi uniforme sur l. Cette condition donne alors :

Le résultat sur V revient à prendre $V(z) = V_A$ et donc l'équation de Poisson donne $\rho = 0$: cette approximation revient à négliger la charge d'espace.

14) On supposera ici que le champ est uniforme entre K et A en l'absence d'informations complémentaires. Entre A et M_1 et entre M_2 et D_1 les potentiels sont constants comme vu en 13).
On aboutit alors à une représentation comme suit :

Entre l et l+d le potentiel évolue comme dans entre les armatures d'un condensateur plan (infini) : avec un champ uniforme et un potentiel affine.



15) On passe par l'énergie qui se conserve : $E_m = 0 = \frac{1}{2}mu_0^2 - eV_A = \frac{1}{2}mu^2 - eV_M$ qui donne $u^2 = u_0^2 - 2\frac{e}{m}(V_A - V_M) = u_0^2 + 2\frac{e}{m}V_0 \sin(\omega t)$. On tire aussi $u_0^2 = 2\frac{e}{m}V_A$ de la première relation et $V_0 = 2\beta V_A$ de la définition de β. On a alors :

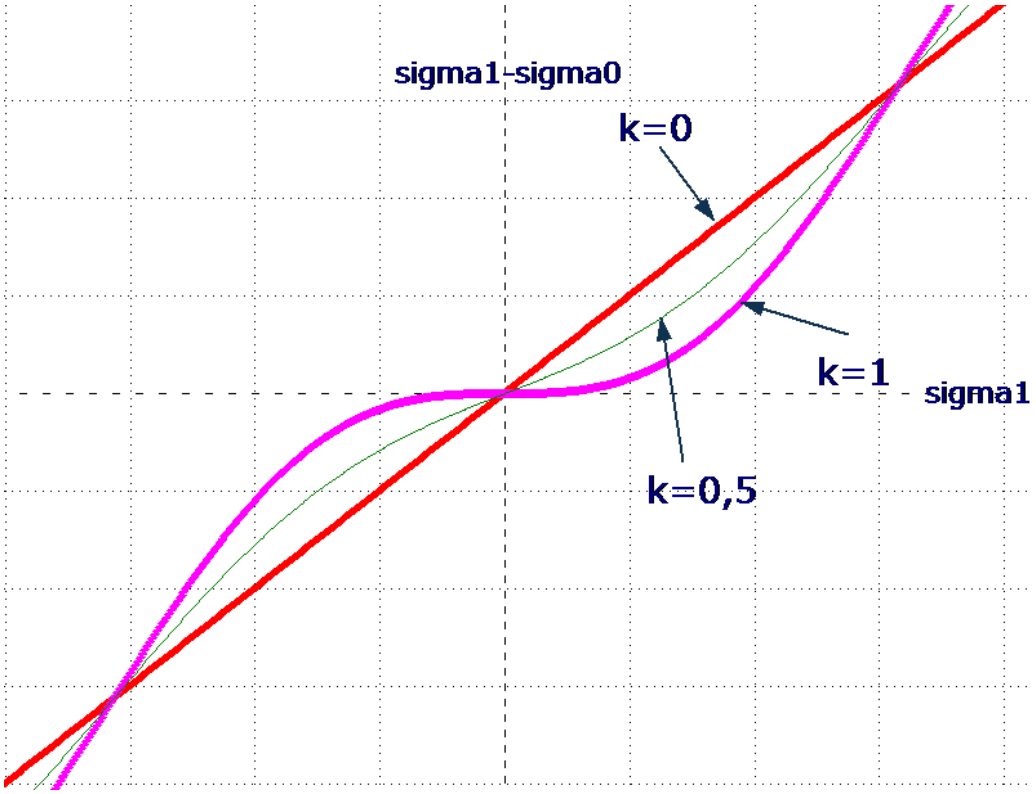
Si β<<1, on a aussi .

16) Sur la dernière expression, on voit que $\langle u^2 \rangle = u_0^2$ en se limitant au premier ordre. Il n'y a donc pas globalement de gain d'énergie. Si on tient compte des ordres supérieur, il y a consommation d'énergie par le dispositif. De plus, les éléments résistifs consomment forcément de l'énergie par effet Joule (résistance interne du générateur, résistance des fils, de fuite du condensateur…)

II.B. Etude de la modulation de vitesse du faisceau d'électrons

17) Les trois σ ont même dimension physique : ce sont des phases (sans dimension car ω est l'inverse d'un temps) et k est de la dimension de β, rapport de potentiels donc sans dimension non plus.En utilisant la vitesse de déplacement entre M_2 et D_2, on a $t_2 - t_1 = L/u(t_1)$ soit $L/u_0\ (1-\beta\sin(\omega t))$ par DL à l'ordre un en β. En multipliant par ω, on a alors :

18) Suivant la valeur de k, les paquets d'électrons seront plus ou moins *groupés* : k définit la *forme* du paquet, d'où le nom paramètre de groupement.



19) Nous supposerons pour répondre à cette question que les 1% du texte sont 1% de la période σ_2 doit varier de $\pi/100$ pour définir le moment $dt_1/2$On résout donc numériquement X-sin(X) = $\pi/100$ pour obtenir $\omega dt_1/2$. On obtient 0,577 rad. On obtient alors $\underline{dt_1 = 193\ ps}$. E = $dt_1/T=\omega dt_1/2\pi$ = $\underline{18{,}8\%}$.On a donc un fort regroupement des électrons.

$$I(\sigma_1) = dQ/dt_2 = \frac{dQ}{dt_1 \frac{dt_2}{dt_1}} = \frac{I_0}{\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}} = \frac{I_0}{1 - k\cos(\sigma_1)}$$

20) On a : qui est bien la relation attendue.

21) $\underline{\varphi = \sigma_2 - \sigma_0 = \sigma_1 - k\sin(\sigma_1)}$pour k<1, on a bien bijection entre σ_1 et φ. I peut donc être considérée comme une fonction de φ Le phénomène, 2π périodique en σ_1 l'est aussi en φ car,quand σ_1 varie de 2π,φ aussi. La parité de I en φ est la même qu'en σ_1 : la fonction I est donc $\underline{\text{paire}}$ ($\cos(\sigma_1)$ étant paire en σ_1).

22) En moyenne le courant est de I_0 par conservation de la charge et donc$\underline{\langle I\rangle = I_0}$. La fonction étant paire, $\underline{b_n = 0}$ (le développement ne peut contenir de termes impairs).

Calcul : $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} I(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi$ en tenant compte de la valeur de la période de I(φ) et de la parité de I. On développe et on change de variable : $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{I_0}{1 - k\cos(\sigma_1)}\cos(n\varphi)d\varphi$ et $d\varphi = d\sigma_1(1-k\cos(\sigma_1))$.

On a finalement

II.C. Dimensions et accord du klystron

23) Pour que le courant détecté soit d'amplitude maximale, il faut que J le soit. On a donc α_m = 1,84 = $(\beta\omega L_m)/u_0$ et donc

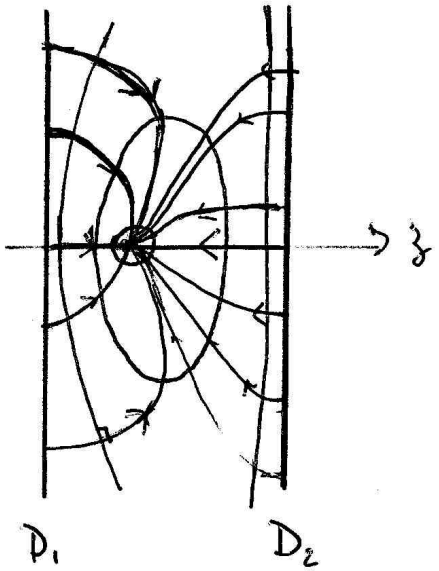
24) $f = \dfrac{\alpha_m \sqrt{\dfrac{2eV_A}{m}}}{2\pi\beta L_m}$ d'après ce qui précède et donc f = 9,51 10^9 Hz = 9,51 GHz. On es t dans le domaine des ondes hertzienne (λ de l'ordre de 30 cm).

II.D. Etude du système de détection

25) Le problème est celui d'un condensateur plan infini (effets de bord négligés). Le champ y est uniforme et le théorème de Coulomb donne les deux charges surfaciques : $\vec{E} = \dfrac{V_1 - V_2}{d}\vec{e}_z = \dfrac{-v_D}{d}\vec{e}_z = \dfrac{\Sigma_{01}}{\varepsilon_0}\vec{e}_z = -\dfrac{\Sigma_{02}}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$. On a donc :



26)Les lignes de champ sortent orthogonalement aux plaques, sont orientées vers la charge négative. Les équipotentielles sont les quasi plans près des plaques et des quasi sphères près de la charge. L'allure est la suivante :



Les lignes de champ sortant des plaques, les charges surfaciques et les charges sont positives. L'influence étant totale (toute ligne de champ partant des plaques arrivant sur l'électron), $q_1 + q_2 = e$.

27) La charge étant près d'un des plans, le champ intense existant près de la surface fait que celle-ci prend la charge opposée à –e. Comme $q_1 + q_2 = e$, l'autre plaque a une charge nulle. On a donc $q_{1i} = e$ et $q_{2i} = 0$. de même, $q_{1f} = 0$ et $q_{2f} = e$. (cette question est-elle raisonnablement au programme ?). La charge ayant circulé entre les plaques est alors 2e.

28) Si I_K est constant, aucune variation n'est détectée et donc $i_D = 0$: le régime est statique.

29) $i_K = i_0\cos(\omega(t-z+e+/u_0))$ et $q = i_K dt$ avec $dt = dz/u_0$

On a donc $q(t) = \int_0^d i_0 \cos(\omega(t - \dfrac{z_e}{u_0})\dfrac{dz_e}{u_0} = \dfrac{i_0}{\omega}[\sin(\omega(t - \dfrac{z_e}{u_0}))]_0^d$. On a donc :

$q(t) = -\frac{2i_0}{\omega}\cos(\omega(t-\frac{d}{2u_0})\sin(\frac{\omega d}{2u_0})$ en utilisant les relations trigonométriques. En différentiant, il vient : $dq) = 2i_0 \sin(\omega(t-\frac{d}{2u_0})\sin(\frac{\omega d}{2u_0})dt \approx i_0 \frac{\omega d}{u_0}\sin(\omega t)dt$. On a alors $\underline{i_D = dq/dt = i_0\omega d/u_0 \sin(\omega t)}$.
En utilisant la relation donnée en IIC, $\underline{\eta = \omega d/2u_0}$ relativement faible d'après les hypothèses faites.