

	Prueba de Acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II	EJERCICIO Nº páginas: 3
---	--	--	--

APARTADO 1 (Bloques A+C)

1. [3 puntos] Una empresa fabrica dos tipos de máquinas, A y B. Para satisfacer toda la demanda, debe producir, mensualmente, al menos 6 unidades del tipo A y como mucho 15 unidades del tipo B. El coste de fabricación es de 500 euros por cada unidad de tipo A y 300 euros por unidad de tipo B, sin que puedan superarse los 12000 euros mensuales en la fabricación total de ambos tipos. Sabiendo que el beneficio por unidad vendida de tipo A es 250 euros y por unidad vendida de tipo B es 200 euros, determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de unidades de cada tipo de máquina que se han de fabricar mensualmente para obtener el beneficio máximo de su venta. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

Resolución

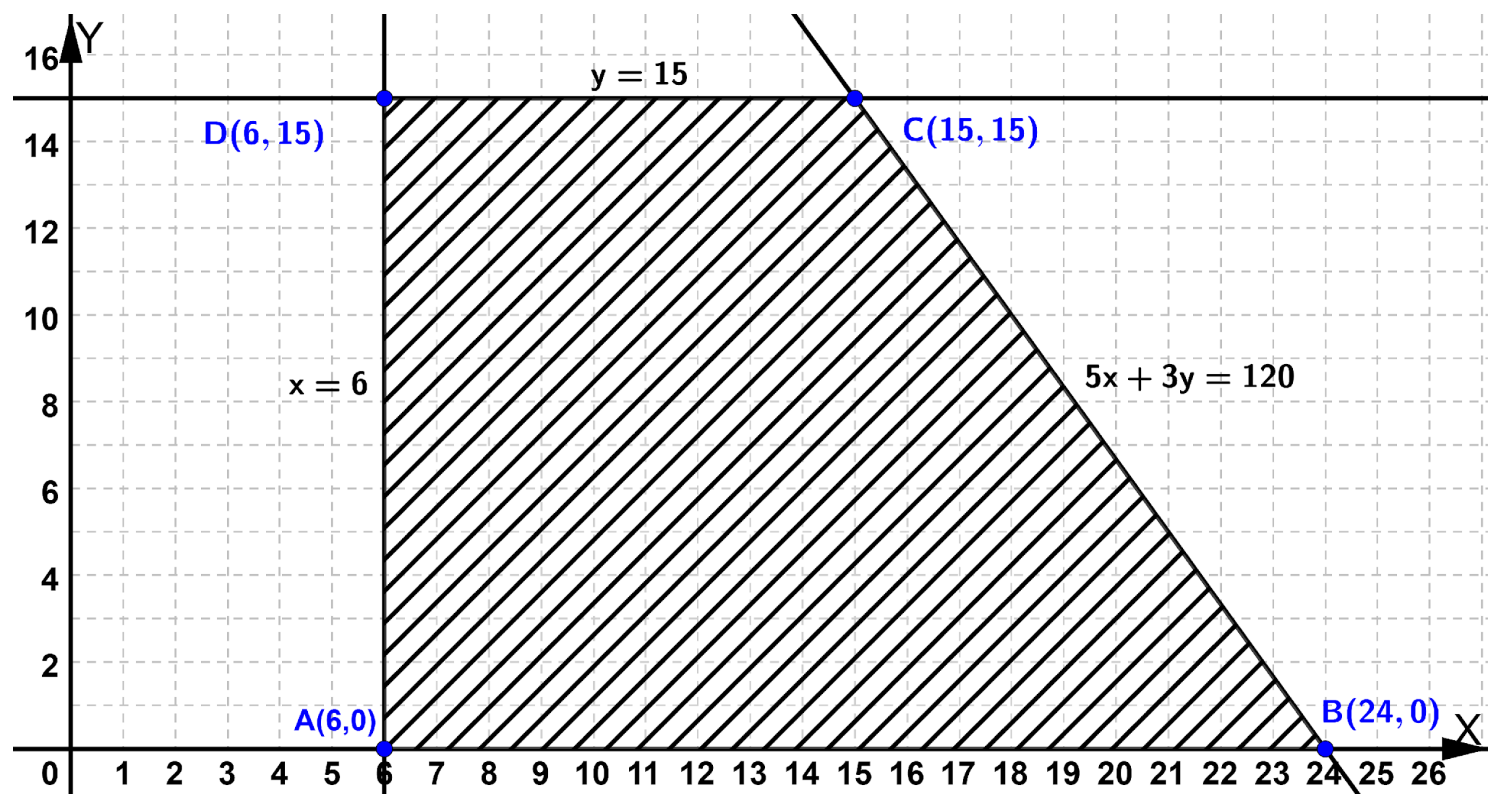
Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de unidades	coste (en €)	beneficio (en €)
máquina A	x	500x	250x
máquina B	y	300y	200y
total	x + y	500x + 300y	250x + 200y

Restricciones: $\{x \geq 6 \quad y \leq 15 \quad 500x + 300y \leq 12000 \rightarrow 5x + 3y \leq 120 \quad x \geq 0, y \geq 0\}$.

Función a optimizar (maximizar), beneficio: $f(x, y) = 250x + 200y$

Dibujamos los ejes de coordenadas, hacemos la escala adecuada y dibujamos el recinto solución



Veamos en qué vértice, A(6, 0), B(24, 0), C(15, 15) ó D(6, 15) alcanza el máximo $f(x, y) = 250x + 200y$

$$f(A) = f(6, 0) = 250 \cdot 6 + 200 \cdot 0 = 1500 \quad f(B) = f(24, 0) = 250 \cdot 24 + 200 \cdot 0 = 6000$$

$$f(C) = f(15, 15) = 250.15 + 200.15 = 6750 \quad f(D) = f(6, 15) = 250.6 + 200.15 = 4500$$

El beneficio máximo es 6750 € y se consigue con 15 máquinas de cada tipo

APARTADO 2 (Bloque B)

2. Una planta de carburantes analiza la cantidad de gasolina, medida en miles de litros, almacenada en el nuevo depósito instalado, que viene dada por $f(t)$, donde t es el tiempo (en horas):

$$f(t) = \left\{ \frac{3}{4}t^2 + 2, \text{ si } 0 \leq t \leq 2 \quad \frac{15}{t+1}, \text{ si } t > 2 \right.$$

Responder a dos de las siguientes cuestiones (2.1, 2.2, 2.3):

2.1 [1.5 puntos] Determinar la cantidad de litros de gasolina almacenada inicialmente y al cabo de 108 minutos.

Resolución

Como $f(0) = \frac{3}{4}0^2 + 2 = 2$, inicialmente había 2000 litros

108 min = 1 h 48 min = 1,8 horas ; $f(1,8) = \frac{3}{4}1,8^2 + 2 = 4,43 \Rightarrow$ a los 108 minutos había 4430 litros

2.2 [1.5 puntos] Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

Resolución

Para $t \neq 2$, f es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas

$$= f(2) = \frac{3}{4}2^2 + 2 = 5 = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = \frac{15}{2+1} = 5 \Rightarrow f \text{ es continua en } t = 2$$

Luego, f es continua en su dominio, que es $[0, +\infty)$

2.3 [1.5 puntos] Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $(2, \infty)$.

Resolución Para $t \in (2, \infty)$, $f(t) = \frac{15}{t+1}$; $f'(t) = \frac{-15}{(t+1)^2} < 0$. Luego, f es decreciente

APARTADO 3 (Bloque D)

3. Un ayuntamiento estudia la movilidad hacia un campus universitario. El estudio detecta que, para ir al campus, el 20% de los ciudadanos circula por aceras o carriles bici (a pie o bicicleta) y el resto circula por la calzada (patinete, coche o transporte público). Entre los usuarios de aceras o carriles bici únicamente el 10% encuentra problemas de circulación, porcentaje que llega al 30% entre los usuarios de la calzada. Responder a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):

3.1

a) [1 punto] Si se elige un usuario al azar que va al campus, calcular la probabilidad de que sufra problemas de circulación.

b) [1 punto] Sabiendo que, al ir al campus, un usuario ha tenido problemas de circulación, ¿con qué probabilidad ha circulado por la calzada?

Resolución

A = circular por aceras o carriles bici B = circular por calzada C = encontrar problemas de circulación

Según el enunciado, $p(A) = 0,2$ $p(B) = 1 - 0,2 = 0,8$ $p(C/A) = 0,1$ $p(C/B) = 0,3$

a) Se pide $p(C) = p(A)p(C/A) + p(B)p(C/B) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,26 = 26\%$

b) Nos piden $p(B/C) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)} = \frac{p(B)p(C/B)}{p(C)} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,26} \cong 0,9231 = 92,31\%$

3.2. Un estudio reciente midió el tiempo de retraso según lo previsto (en minutos) que experimentaron 100 ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario. El tiempo medio de retraso en la muestra es de 4,2 minutos, con una desviación típica de 1,5 minutos.

a) [1 punto] Calcular un intervalo de confianza del 95% para la media del tiempo de retraso que experimentan los ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario en la población.

Resolución

$X = \text{tiempo (en min)} \rightarrow N(\mu, 1, 5)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para estimar el tiempo medio, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x} = 4,2$ la media de la muestra de tamaño $n = 100$

y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ usando la tabla de la $N(0, 1)$ por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{100}} = 0,294 ; I_c = (4,2 - 0,294 ; 4,2 + 0,294) \cong (3,906 ; 4,494)$$

b) [1 punto] Calcular qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de ciudadanos para que, con un nivel de confianza del 99%, el error máximo admisible sea de 0,12 minutos en la estimación de la media.

Resolución

$X \rightarrow N(\mu; 6) ; E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es el máximo error de estimación

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,99}{2} = 0,995$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,995$ usando la tabla de la $N(0, 1)$, por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

Piden hallar n para que

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0,12 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{0,12} \leq \sqrt{n} \text{ elevando al cuadrado } \rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\sigma^2}{0,12^2} \leq n$$

Sustituyendo: $n \geq 2,575^2 \cdot \frac{1,5^2}{0,12^2} \cong 1036,04 \Rightarrow$ el tamaño mínimo de la muestra debe ser 1037 ciudadanos.

3.3. Se considera que el 45% de los ciudadanos utiliza el transporte público para desplazarse al campus. Se pregunta a 10 ciudadanos a su llegada al campus si han utilizado el transporte público.

a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que exactamente 8 de ellos usen transporte público.

b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que más de 8 ciudadanos usen transporte público.

Resolución

Realizamos 10 veces el experimento aleatorio de elegir al azar un ciudadano y ver si usa el transporte público y la probabilidad de que lo use es 45% = 0,45, entonces la variable aleatoria $X = \text{"nº de ciudadanos que usan el transporte público"} \rightarrow B(10 ; 0,45)$

La ley de probabilidad es $p_k = p(X = k) = \binom{10}{k} 0,45^k 0,55^{10-k}$, con $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10$.

a) Se pide $p(X = 8) = \binom{10}{8} 0,45^8 0,55^2 = 45 \cdot 0,45^8 0,55^2 \cong 0,0229 = 2,29\%$

b) Se pide $p(X > 8) = p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{9} 0,45^9 0,55^1 + \binom{10}{10} 0,45^{10} 0,55^0$
 $= 10 \cdot 0,45^9 \cdot 0,55 + 1 \cdot 0,45^{10} \cdot 1 \cong 0,0045 = 0,45\%$