

5.1°) et

5.2°) Pour un métal parfait, en son voisinage: et $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$
5.3°) soit
5.4°)

5.5°) Méthode de séparation des variables:; pour pouvoir assurer les conditions limites, il faut: , avec ; les solutions sont sinusoïdales
et données par et ;
Pour le champ électrique doit être normal et et donc
Pour le champ électrique doit être normal et
et donc
Selon la parité de ces entiers: ; la solution du texte n'est valable que si les deux entiers sont impairs.

5.6°)

5.7°)

5.8°) On a une condition de résonance analogue à
5.9°) si n est impair ou si n est pair; si n est impair.

5.10°) ; on fait l'hypothèse que la conductivité est réelle; l'équation de Maxwell-Ampère en régime sinusoïdal forcé s'écrit: et donc si ; d'après l'équation de Maxwell-Faraday et la formule de calcul vectoriel , on obtient l'équation .

5.11°) avec et
La solution générale est combinaison linéaire des deux solutions: soit
. Pour une propagation selon Oz: ; en plus le champ est transverse.

5.12°) Dans le métal:

ou

Dans le vide:

et ; or est la norme du vecteur d'onde

5.13°) En $z=Z/2$, on écrit:

la continuité du champ électrique selon y'y:

la continuité du champ magnétique (pas de courants surfaciques) selon x'x:

Pour avoir des champs non nuls, il faut que le déterminant du système soit nul: .

5.14°) Avec les expressions de et de on a et (p est impair car le champ électrique est en cosinus); on a
Au premier ordre près, on peut remplacer par et du fait que deux angles complémentaires ont des tangentes dont le produit vaut 1, on a: ; en assimilant la tangente à l'angle et en remplaçant par sa valeur, on obtient la formule du texte:

5.15°) amortissement temporel de constante de temps ; c'est comparable au régime transitoire du Fabry-Pérot quand on enlève la source (2.17°).

5.16°)

= ; or et - puis 5.13°- =

On remplace et par leurs valeurs ce qui donne:

En remplaçant le carré du sinus par celui du cosinus de l'angle complémentaire et en effectuant un développement limité au premier ordre en , on obtient: .

La densité moyenne d'énergie est et après calcul ; on peut alors calculer l'énergie dans la cavité par intégration sur son volume:

et par développement limité au premier ordre:

La puissance perdue dans le métal est en tenant compte des deux faces dans la cavité et par ailleurs ; on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants en W dont l'intégration donne avec (de 5.15°); quand on passe de l'amplitude à l'énergie, l'exposant est divisé par 2; l'énergie varie plus rapidement que l'amplitude.

6.1°) L'onde est voisine d'une onde plane: la dépendance en z (passage par toutes les valeurs de z) est contenue dans e^{ikz} dont la variation se fait sur la longueur caractéristique (longueur d'onde); u varie donc peu sur une distance de quelques longueurs d'onde.

Par ailleurs, le faisceau est étroit et donc limité latéralement; u varie rapidement avec x et y alors qu'il varie lentement en z . D'où: $\frac{\partial u}{\partial z} \ll \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial z} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$

6.2°) Le champ électrique vérifie: $\nabla^2 u = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; il suffit de le remplacer par $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ pour obtenir $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; or $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u$; en tenant compte des approximations: équation d'onde paraxiale.

6.3°) Pour une onde sphérique divergente en $M(x,y,z)$, issue de $O(0,0,0)$, en appelant r la distance à OM le champ est $u = \frac{A}{r} e^{ikr} e^{-i\omega t}$; en $z > 0$ d'où $r \approx z$. Pour une onde sphérique convergente en O , en $z < 0$, on aurait la même expression.

6.4°) Si $z \gg x$ et y , alors

6.5°) et de même en y
d'où

Par ailleurs; on en déduit:

est solution exacte de l'équation d'onde paraxiale.

6.6°) $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; le même genre de calcul qu'en 6.5° donne: $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; on cherche $A=A(z)$ et de ce fait le coefficient de $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ doit être nul et $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$; puis soit en intégrant ou

6.7°) $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et selon le texte avec $u = \frac{A}{R} e^{ikR} e^{-i\omega t}$; en identifiant les phases on en déduit $kR = k z$ et en identifiant les amplitudes $A = \frac{1}{R}$.

6.8°) On a avec $R = \sqrt{z^2 + r^2}$ et
d'où $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{R}$ et

$R(z)$ représente le rayon de courbure de l'onde; il varie avec z ; l'onde est plane si R devient infini et donc si $z \rightarrow \infty$ et $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$; on pose $R = \frac{1}{2} \frac{d^2 z}{dz^2}$ et on obtient (longueur de Rayleigh); avec ces notations: $R = \frac{1}{2} \frac{d^2 z}{dz^2}$ et puis $\frac{d^2 R}{dz^2} = -\frac{1}{R^3}$ et

6.9°) En remplaçant dans l'expression du champ électrique, on trouve: avec

Pour une surface d'onde, la phase est constante d'où:

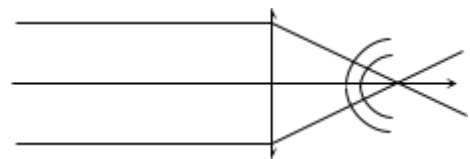
$w(z)$ est la distance, selon une direction perpendiculaire à l'axe du faisceau, au bout de laquelle l'amplitude est divisée par e et l'intensité par e^2 ; on l'appelle le rayon focal: il est fonction de z .

6.10°) $w(z)$ s'annule si $\frac{dR}{dz} = 0$; on a un minimum de $w(z)$; en cet endroit le faisceau a une « section » minimale de rayon focal (« waist » en anglais) et le rayon de courbure est infini. Le texte parle de « foyer », mais le nom est incorrect.

L'approximation est vérifiée si $\frac{d^2 R}{dz^2} \ll \frac{1}{R^3}$.

Enfin d'après l'expression du champ de 6.9°, l'abscisse z_0 de la zone à rayon focal minimal et la valeur w_0 de ce minimum déterminent totalement la géométrie du faisceau.

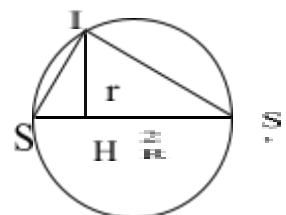
6.11°) L'onde en sortie est sphérique convergente de centre le foyer image F .



6.12°) On note e l'épaisseur de la lentille mince et n l'indice du verre dont elle est faite. Dans le cadre de l'approximation de Gauss, un rayon incident parallèle à l'axe traverse la lentille mince selon le segment IJ très court (inférieur à e) par rapport aux rayons de courbure R_1 et R_2 des faces et peu incliné par rapport à l'axe de la lentille. Le retard de phase introduit par la présence de la lentille est donc $\frac{2\pi}{\lambda} (n-1)e$. Soit en appelant H et H' les projections de I et J sur l'axe et S_1 et S_2 les sommets des faces: $\frac{2\pi}{\lambda} (n-1)e$; pour évaluer les deux segments, on raisonne sur le cercle ci-contre.

Soit α l'angle entre SS' et IS' qu'on retrouve entre IS et $I'H$:

; or la vergence de la lentille est $\frac{1}{f} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ d'où



Les rayons de courbure sont comptés avec la convention: et (attention au signe moins)

6.13°) Soit un point A sur $z'z$ émettant une onde sphérique divergente avec w_1 pour $z=0$ et après traversée de la lentille, expression compatible avec une onde sphérique divergente centrée en A', d'abscisse z_2 positive qui s'écrit: $w_2 = \frac{w_1}{1 - iz_2/R_2}$; on ne cherche pas la relation entre les amplitudes complexes; il suffit d'identifier les phases et ce pour toute valeur de r dans le cadre de l'approximation de Gauss. On en déduit: $z_2 = \frac{R_2}{1 - R_2/R_1}$; on peut généraliser à un système centré mince quelconque (indices extrêmes n et n'); il introduit un retard de phase ϕ ce qui conduit à $w_2 = \frac{w_1}{1 - iz_2/R_2} e^{i\phi}$ pour un dioptré sphérique: $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (n - n')$ et pour un miroir sphérique: $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (2n - 1)$.

6.14°) Pour l'onde incidente en $z=0$,
Juste après traversée de la lentille: ce qui est compatible avec une onde émergente du même type:
En identifiant les exposants imaginaires en r^2 , on a: $z_2 = \frac{R_2}{1 - R_2/R_1}$ et $w_2 = \frac{w_1}{1 - iz_2/R_2}$; la première relation est la relation de conjugaison des « foyers » et la seconde exprime la continuité du rayon focal sur la lentille.

On a $z_2 = \frac{R_2}{1 - R_2/R_1}$ et $w_2 = \frac{w_1}{1 - iz_2/R_2}$;

et

On obtient: $z_2 = \frac{R_2}{1 - R_2/R_1}$ et $w_2 = \frac{w_1}{1 - iz_2/R_2}$

Comme en 6.13° pour un système mince.

A partir des 2 équations à 2 inconnues obtenues on peut calculer w_2 et z_2 .

et

Mais ces expressions ne servent à rien ensuite; merci d'en avoir demandé le calcul!

6.15°) Pour un miroir sphérique: $R_1 = R_2 = R$ et $n = n'$

et $w_1 = w_2$

Le faisceau est stable si la zone de resserrement est unique (le faisceau résultant a une forme gaussienne) caractérisé par w_1 et z_1 et par les distances algébriques z_1, z_2 aux miroirs avec $z_2 = \frac{R}{1 - R/R_1}$; à partir de la relation de conjugaison, on obtient: $z_1 = \frac{R}{1 - R/R_1}$ et $w_1 = \frac{w_2}{1 - iz_2/R}$; on remarque que les rayons de courbure du faisceau gaussien au niveau des miroirs sont les rayons de courbure des miroirs.

On a 3 équations à trois inconnues qui permettent de déterminer z_1, z_2 et w_1 . On calcule seulement z_1, z_2 .

Avec $z_1 = \frac{R}{1 - R/R_1}$ on peut écrire >0 ; c'est la condition de stabilité.

Notons que $z_1 = \frac{R}{1 - R/R_1}$ et $w_1 = \frac{w_2}{1 - iz_2/R}$

6.16°) Si les deux rayons de courbure sont égaux:

La condition de stabilité est réalisée si $R > L/2$.

6.17°) Condition de résonance: sur un aller et retour, le long de $z'z$ en particulier, le déphasage doit être un multiple entier de 2π soit sur un aller seulement un multiple entier de π ; or $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (2n - 1)$ et donc q entier positif ou nul; on pose $q = \frac{2n - 1}{2}$; le calcul donne $z_1 = \frac{R}{1 - R/R_1}$ puis $z_2 = \frac{R}{1 - R/R_1}$ si les deux rayons sont égaux.

7.1°) L'équation de propagation de la composante x du champ électrique est

$\nabla^2 E_x = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$ pour pouvoir assurer les conditions limites, il faut: $E_x = 0$ et $\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0$ avec $z = 0$ et $z = L$; avec un des sommets de la cavité à l'origine des axes:

''

Les conditions limites sont:

$$g(0) = g(Y) = 0 \text{ et } h(0) = h(Z) \text{ impliquent } C = E = 0$$

et de même

Du fait que $\nabla^2 E_x = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$ il existe une combinaison linéaire entre les dérivées de ces composantes vraie pour tout x, y, z dans le domaine de la cavité; on peut en conclure qu'on a les mêmes composantes de vecteur d'onde entre les trois composantes du champ et donc que $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ avec l, m, n .

La combinaison linéaire est également vraie en $x = 0$ ou X , en $y = 0$ ou Y , en $z = 0$ ou Z ; on en déduit $k_x^2 = k_y^2 = k_z^2 = k^2$ et $k_x = k_y = k_z = k$; en fait, il n'existe que deux constantes indépendantes;

On peut également calculer les composantes du champ magnétique et vérifier que le champ magnétique a des composantes normales nulles sur les faces de la cavité.

Enfin implique.

7.2°) Dans l'espace des vecteurs d'onde, les extrémités des vecteurs d'onde possibles définissent un réseau cubique dont la maille élémentaire a des cotés de longueur λ ; la zone sphérique de rayons k et $k+dk$ a le volume $\frac{4}{3}\pi k^3$; un mode correspond à une onde progressive qui se réfléchit sur les différentes faces soit à $\frac{\lambda}{2}$; il faut compter un huitième du volume de la zone sphérique; en plus, pour l,m,n donnés on a deux états de polarisation indépendants (ou); le nombre de modes de norme de vecteur d'onde compris entre k et $k+dk$ est $\frac{4\pi k^3}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2$; c'est aussi le nombre de modes de fréquence comprise entre ν et $\nu+d\nu$ et

7.3°) Le calcul de I fait intervenir des intégrales du type $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx$ ou bien en sinus, qu'on linéarise en intégrales de cosinus faisant figurer la somme ou la différence des deux entiers; ces intégrales sont nulles si les entiers sont différents. De ce fait .

7.4°) Les champs électrique et magnétique sont combinaison linéaire des champs des modes propres; quand on les remplace dans l'expression de la densité d'énergie électromagnétique on fait intervenir en développant des intégrales de produits de champs qui sont nulles et des intégrales proportionnelles au carré des champs des modes propres; pour chaque mode un terme est proportionnel au carré du champ électrique et un autre au carré du champ magnétique; on a deux termes quadratiques par mode propre; en retenant, selon le théorème d'équipartition de l'énergie, l'énergie $kT/2$ par degré de liberté, on a l'énergie kT par mode propre. On retrouve le théorème de Rayleigh-Jeans qui dit que chaque mode est équivalent à un oscillateur harmonique linéaire. D'où:

soit une densité d'énergie spectrale .

7.5°) ; l'intégrale n'est pas définie; l'énergie emmagasinée ne peut être infinie.

7.6°) La probabilité de l'énergie ν pour le mode propre de fréquence ν est $\frac{e^{-\beta h \nu}}{1 + e^{-\beta h \nu}}$; or (ne pas oublier $n=0$; la probabilité de l'état d'énergie nulle est non nulle); d'où

7.7°) L'énergie moyenne du mode de fréquence ν est

En fait cette démonstration n'est pas valable car les photons obéissent à la statistique de Bose-Einstein et l'énergie d'un oscillateur linéaire n'est pas $\frac{1}{2}h\nu$ mais $h\nu$; dans l'état fondamental, à une température absolue de 0 K , avec la formule du texte, l'oscillateur a une énergie nulle; c'est-à-dire que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est nulle; de ce fait vitesse et abscisse sont nulles simultanément ce qui est contraire au principe d'indétermination de Heisenberg.

7.8°) ; c'est la loi de Planck, relative au corps noir (intérieur d'un four isotherme); l'énergie du corps noir est ; elle est finie car la fonction se comporte comme $\frac{1}{\nu^3}$ quand la fréquence tend vers l'infini et que l'exponentielle l'emporte.

7.9°) On peut définir la densité d'énergie totale u , d'une part car l'intégrale qui l'exprime est définie mathématiquement et d'autre part car on a équilibre thermique; l'énergie se répartit sur tous les modes et se répartit également dans l'espace de la cavité.

7.10°) soit

avec $u = \frac{15}{4} \frac{\pi^5}{15} \frac{k^4 T^4}{15 \pi^5} = \frac{15}{4} \frac{\pi^5}{15} \frac{k^4 T^4}{15 \pi^5}$; c'est la loi de Stéphan-Boltzmann; la densité d'énergie totale est proportionnelle à la puissance quatrième de la température absolue.