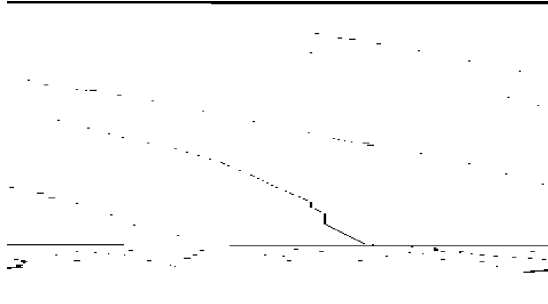


PREMIER PROBLEME

L'énoncé ne le précise pas, mais nous supposons que x, y s'expriment en mètres et t en secondes.

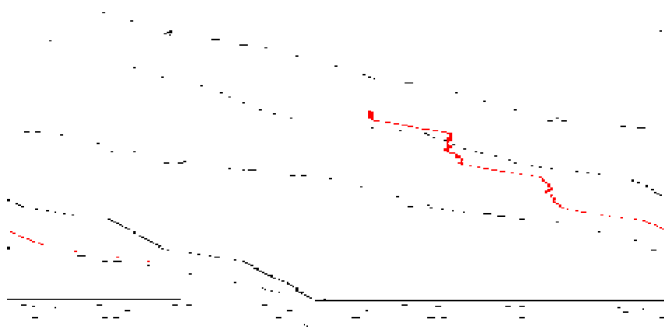
1) Les deux trajectoires sont données par $y = \frac{x^2}{4} - 1$, x variant de 0 à $+\infty$.



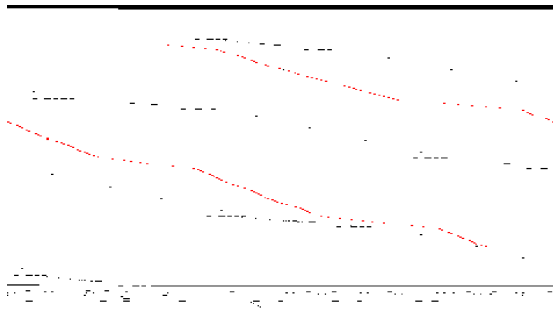
On obtient un arc de parabole.

Les deux trajectoires sont identiques mais cela ne signifie pas pour autant que les mobiles sont au même point.

2) Il faut tracer d'une part $t = \frac{\sqrt{x}}{2}$ et d'autre part la fonction implicite $t = \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48}$.



Les deux graphes se coupent en un point, il existe donc en dehors de l'origine un deuxième point de rencontre. Pour connaître cet instant il suffit de tracer ces deux courbes avec une plus grande précision.



3) On adoptera comme solution à 1% près.

$$t_0 = 0,728s$$

4) L'équation donnant la valeur de x est donnée par $\frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} = \sqrt{\frac{x}{4}}$ donc pour l'équation en t , on obtient : $t = t^2 + \frac{4t^6}{3}$ soit avec t^1 , l'équation $\frac{4}{3}t^5 + t - 1 = 0$, pour éviter la confusion l'équation a été écrite en t et non pas en x . On vérifie que 0,728 s est bien solution de cette équation.

5) La réponse est immédiate en dérivant les composantes par rapport au temps. $v_x = 8t, v_y = 16t^3, v_p = 8t\sqrt{1 + 4t^4}$. De même le moment cinétique donne $\vec{I}_p = 8mt(4t^4 - 1)\vec{u}_z$

6) En remarquant que $dt = dw(1 + 4w^2)$ on obtient $v_x = \frac{4}{1+4w^2}, v_y = \frac{8w}{1+4w^2}$ et $v_p = \frac{4}{\sqrt{1+4w^2}}$

le moment cinétique donne $\vec{I}_p = 4m\vec{u}_z$. Il y a conservation du moment cinétique.

7) On calcule de même l'accélération pour $\vec{g}_p = 8\vec{u}_x + 48t^2\vec{u}_y$ et $g_p = 8\sqrt{1 + 36t^4} m/s^2$, pour P on trouve $\vec{g}_p = \frac{-32w}{(1+4w^2)^3}\vec{u}_x + \frac{8(1-4w^2)}{(1+4w^2)^3}\vec{u}_y$ et pour la norme $g_p = \frac{8}{1+4w^2}$.

8) On peut remarquer que $x^2 + y^2 = r^2 = (4w^2 + 1)^2$ d'où $\vec{g}_p = \frac{-8}{r^3} [4w\vec{u}_x + (4w^2 - 1)\vec{u}_y] = \frac{-8\vec{r}}{r^3}$
On a une accélération centrale.

9) Force centrale, on retrouve la conservation de la quantité de mouvement établie dans la question 6.

10) L'énoncé ne précise pas la durée du balayage. En notant $d\vec{l}$ le déplacement élémentaire, on a $d\vec{A} = \frac{1}{2}r d\vec{l} = \frac{1}{2}r\vec{v} dt = \frac{\vec{l}}{2m} dt$; l'intégration est immédiate $A = 2t$.

11) $\vec{v} = r\vec{u}_r + r\dot{q}\vec{u}_q$ et pour l'accélération $\vec{g} = (r'' - r\dot{q}^2)\vec{u}_r + (2r\dot{q}' + r\ddot{q})\vec{u}_q$.

12) $\vec{g}_p = -\frac{8}{r^2}\vec{u}_r$, $d\vec{A} = \frac{1}{2}r^2 d\vec{u}_z = 2dt\vec{u}_z$ d'où $C = r^2\dot{q} = 4$.

13) $\vec{f} = -\frac{8m}{r^2}\vec{u}_r$, $dU = -\vec{f} \cdot d\vec{l} = \frac{8m}{r^2} dr$, d'où avec $U = 0$ pour $r \rightarrow \infty$ et avec $r = 4w^2 + 1$ on obtient :
 $U = \frac{-8m}{4w^2 + 1}$.

14) $T = \frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{1}{2}m\frac{16}{1+4w^2}$, $T = \frac{8m}{1+4w^2}$ et $E = 0$.

15) $u = \frac{1}{r}r' = \frac{1}{u}\vec{u}_r \cdot \vec{v}_p = -4\frac{du}{dq}\vec{u}_r + 4u\vec{u}_q$ (formule de Binet), d'où $v_p = 4\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{dq}\right)^2}$

16) $\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{8m}{r} = 0$, avec $v_p^2 = 16\left(u^2 + \left(\frac{du}{dq}\right)^2\right)$, il vient alors $u^2 + \left(\frac{du}{dq}\right)^2 = u$

17) On utilise le changement de variable proposé par l'énoncé, $h = u - \frac{1}{2}$, l'équation différentielle se simplifie et on obtient : $\left(\frac{dh}{dq}\right)^2 = \frac{1}{4} - h^2$, en dérivant une fois on a $\frac{d^2h}{dq^2} = -h$, dont la solution s'écrit : $h = a\cos(q + j)$. (a et j) étant déterminés par les conditions initiales.

18) Les conditions initiales sont données par à $t = 0, r = 1$ et $q = -\frac{p}{2}$ et $v_p = 4$. En remplaçant dans l'équation $h = \frac{1}{r} - \frac{1}{2} = a\cos(q + j)$ on obtient $a^2(\cos j)^2 = 1$ et $\frac{1}{2} = a\sin j$ d'où $j = \frac{p}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$ d'où la solution $\frac{1}{r} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sin q$.

19) La solution générale avec $q_0 = -\frac{p}{2}, E = 0, K = 8m$, et $I = 4m$ donne $\frac{1}{r} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos(q + \frac{p}{2})$ on retrouve bien le même résultat.

20) Etats liés pour E négatif et états non liés pour E négatif ou nul.

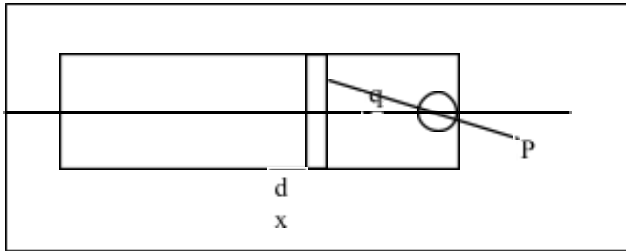
DEUXIEME PROBLEME

1) On a $V = \frac{m_0 I}{4p} 2p(1 - \cos q) = \frac{m_0 I}{2}(1 - \cos q)$ avec $\cos q = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, on déduit alors

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi x} \vec{u}_x = -\frac{m_0 I}{2} \frac{\mu_0}{4\pi x} (1 - \cos q) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \frac{\mu_0}{4\pi x} (1 - \cos q) = \frac{\mu_0}{4\pi x} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) = \frac{-R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{d'où}$$

$$\vec{B} = \frac{m_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x = \frac{m_0 I}{2R} \sin^3 q \frac{\vec{u}_x}{x}$$

2)



On a $d\vec{B} = \frac{m_0 I}{2R} \frac{N}{L} \sin^3 q \, dx \frac{\vec{u}_x}{x}$, en écrivant

$$\tan q = \frac{R}{x-x'}, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{R dq}{\sin^2 q}, \quad \text{d'où}$$

l'expression demandée $\frac{dB}{dq} = \frac{m_0 NI}{2L} \sin q$

3) L'intégration donne :

$$B = \frac{m_0 NI}{2L} \int \sin q \, dq = \frac{m_0 NI}{2L} (\cos q_1 - \cos q_2),$$

$$\text{soit avec } \cos q_1 = \frac{x + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (x + \frac{L}{2})^2}} \text{ et } \cos q_2 = \frac{x - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (x - \frac{L}{2})^2}},$$

$$B = \frac{m_0 NI}{2L} (\cos q_1 - \cos q_2) = \frac{m_0 NI}{2L} \left(\frac{x + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (x + \frac{L}{2})^2}} - \frac{x - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (x - \frac{L}{2})^2}} \right).$$

$$4) A(l) = \int B(x) dx = \frac{m_0 NI}{2L} \int \left[\frac{x + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (x + \frac{L}{2})^2}} - \frac{x - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (x - \frac{L}{2})^2}} \right] dx \quad \text{d'où la réponse :}$$

$$A(l) = \frac{m_0 NI}{L} \left[\sqrt{R^2 + \left(l + \frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(l - \frac{L}{2}\right)^2} \right]$$

$$5) \text{ On choisit } l = \frac{L}{2} \text{ on obtient } A\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{m_0 NI}{L} \left[\sqrt{R^2 + L^2} - L \right] \text{ avec } R \ll L \text{ il reste :}$$

$$A\left(\frac{L}{2}\right) = m_0 NI.$$

6) On fait un développement limité comme le suggère l'énoncé, on a

$$A(l) = \frac{m_0 NI}{L} \left(l \left[1 + \frac{R^2}{l^2} + \frac{L}{l} \right]^{\frac{1}{2}} - l \left[1 + \frac{R^2}{l^2} - \frac{L}{l} \right]^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{m_0 NI}{L} \left(l \left(1 + \frac{L}{2l} \right) - l \left(1 - \frac{L}{2l} \right) \right) = m_0 NI.$$

$$A = m_0 NI.$$

7) On retrouve le théorème d'Ampère. Pour la question 5 B est nul à l'extérieur du solénoïde.

$$8) \text{ On décale l'origine de } L/2, \text{ on trouve } B(x) = \frac{m_0 NI}{2L} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{x-L}{\sqrt{(x-L)^2 + R^2}} \right].$$

$$\text{On fait tendre } L \text{ vers l'infini, le rapport } N/L \text{ tend vers } n, \text{ il vient alors } B_{\infty}(x) = \frac{m_0 n I}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} + 1 \right).$$

9) Un solénoïde semi-infini donne un champ par la formule établie dans la question précédente. Les deux formules ne diffèrent que par le terme 1 et $\frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + R^2}}$, il faut que ces deux termes ne diffèrent pas de plus de 1%

$$\text{jusqu'à } x = 10R, \text{ avec } L \gg R \text{ on obtient } \left(1 + \frac{R^2}{(L-10R)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \gg 1 - \frac{R^2}{2(L-10R)^2} = 1 - 10^{-2}, \text{ d'où la valeur}$$

$$\frac{L-10R}{R} = \sqrt{50} = 7,07 = \frac{L}{R} - 10, \text{ d'où } \frac{L}{R} = 17,07.$$

10) La quantité β définie dans l'énoncé est égale à $\beta = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$, on fait un développement limité au voisinage de zéro. Il vient $\beta = \frac{x}{R} \left(1 - \frac{x^2}{2R^2} \right)$, pour avoir une fonction linéaire en x à 1% près il suffit de choisir $x^2 = 2 \cdot 10^{-2} R^2$, d'où la valeur $x_1 = 0,14R$.

11) Le calcul donne $\frac{dB}{dx} = m_0 \frac{nI}{2} \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $\frac{d^2B}{dx^2} = m_0 \frac{nI}{2} \frac{-3xR^2}{(R^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$

12) On a $F = M_1 I$ d'où le résultat $M_1 = \frac{m_0 n}{2} N_1 S_1 \left[\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} + 1 \right]$.

13) On superpose le champ créé par deux solénoïdes semi-infinis mais parcourus par des courants en sens inverses, on change la première expression x en $-x$ et I en $-I$, la somme donne $B = m_0 n I \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right)$. Le théorème d'Ampère donne 0.

14) On obtient alors $M = m_0 n N_1 S_1 \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$

15) $e = - \frac{dF}{dt} = - \frac{d(MI)}{dt}$, pour x constant on a $e = m_0 n N_1 S_1 \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} i_0 \omega \sin \omega t$

16) l'application numérique donne comme valeur efficace $e = 0,4 V$

17) On suppose que l'on se trouve dans le domaine $0 < x < x_0$, dans le référentiel lié à l'accéléromètre on a

$kx = mg$, d'où la valeur efficace $e = \frac{m_0 n N_1 S_1}{R\sqrt{2}} i_0 \omega \frac{mg}{k}$.

18) L'application numérique donne $g_M = 50 m/s^2$ et $g_m = 2 \cdot 10^{-4} m/s^2$

19) L'équation différentielle s'écrit : $-kx + mg - c \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$

20) $e = - \frac{d(MI)}{dt}$, donc $\int_0^t e dt$ mesure la variation de la quantité Mi .