Guía elaborada por el profesor Joel Fariñez

Racionalización

La racionalización consiste en que dada una fracción en donde el denominador contiene alguna raíz se procede a eliminar dicha raíz del denominador por el procedimiento respectivo, para ello se usa la propiedad de la radicación que establece que $\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[n]{a^q}=\sqrt[n]{a^{p+q}}=\sqrt[n]{a^n}=a$ asumiendo que p +q =n, todo esto será desarrollado en detalle con ejemplos concretos, en esta guía vamos a desarrollar los tres casos más comunes de racionalización.

Primer Caso

Denominador con raíz cuadrada

Veamos con un ejemplo concreto como eliminar la raíz cuadrada del denominador de una fracción dada

$\frac{7}{\sqrt{3}}$ aquí vamos a realizar el siguiente procedimiento: multiplicamos tanto el numerador como el denominador por raíz de 3 y así habremos eliminado la raíz del denominador

$$\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 3}}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

aquí se aplica la propiedad mencionada al inicio de esta guía pues $\sqrt{3^2}=3^{\frac{2}{2}}=3^1=3$

veamos otro ejemplo

$\frac{3}{\sqrt{2x}}$ aquí aplicamos el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior

$$\frac{3}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}=\frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{2x\cdot 2x}}=\frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{2^2x^2}}=\frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{(2x)^2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2x}}{2x}$$

aquí hemos aplicado las propiedades de la potenciación (potencia de un producto) pues $2^2 x^2 = (2x)^2$ y además

$$\sqrt{(2x)^2} = (2x)^{\frac{2}{2}} = (2x)^1 = 2x$$

Segundo caso

Denominador con raíz de índice diferente mayor que 2

Veamos con un ejemplo concreto como eliminar la raíz de índice mayor que 2 del denominador de una fracción dada

$\dfrac{7}{\sqrt[5]{2\cdot 3^2\cdot 5^3}}$ aquí como los exponentes del 2, 3 y 5 son respectivamente 1, 2 y 3 realizamos las siguientes operaciones con el índice 5: $5-1=4$; $5-2=3$; $5-3=2$ luego los números obtenidos 4, 3 y 2 serán los exponentes de los números 2, 3 y en el radical que multiplicaremos tanto arriba como abajo, es decir

$$\frac{7}{\sqrt[5]{2\cdot 3^2\cdot 5^3}} = \frac{7}{\sqrt[5]{2\cdot 3^2\cdot 5^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}$$

aquí procedemos a realizar las respectivas multiplicaciones

$$\frac{7}{\sqrt[5]{2\cdot 3^2\cdot 5^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}} = \frac{7\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{\sqrt[5]{2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}$$

$$= \frac{7\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{\sqrt[5]{2^{1+4}\cdot 3^{2+3}\cdot 5^{3+2}}}$$

$$\frac{7\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{\sqrt[5]{2^{1+4}\cdot 3^{2+3}\cdot 5^{3+2}}}=\frac{7\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{\sqrt[5]{2^5\cdot 3^5\cdot 5^5}}=\frac{7\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{\sqrt[5]{(2\cdot 3\cdot 5)^5}}$$

$$=\frac{7\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{2\cdot 3\cdot 5}$$

en este paso hemos aplicado la propiedad

$$\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[n]{a^q}=\sqrt[n]{a^{p+q}}=\sqrt[n]{a^n}=a$$

$\frac{7\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{7\sqrt[5]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2}}{30}$ y así concluye este ejercicio, también se puede presentar el caso con variables y no sólo con números

<u>Tercer caso</u>

Denominador teniendo un binomio

Veamos con un ejemplo concreto como eliminar un binomio con raíz o raíces del denominador de una fracción dada

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$$

en este caso vemos que el denominador está compuesto por un binomio conteniendo dos raíces que son $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ lo primero que hay que hacer es hallar el conjugado de esa expresión, el conjugado de $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ es $\sqrt{2}-\sqrt{7}$ es decir para encontrar el conjugado de un binomio solo hay que cambiar el signo de dicho binomio, si es positivo se cambia a negativo, y si es negativo se cambia a positivo, luego hay que multiplicar el conjugado del denominador tanto arriba como abajo para empezar el proceso de racionalización.

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ aquí debemos multiplicar distributivamente tanto arriba como abajo teniendo en cuenta las multiplicaciones de radicales de igual índice

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}$$

como se observará en la parte de abajo se aplicó un producto notable el cual se trató en su debido momento en matemática de 2do año que se llama suma por diferencia y cuya fórmula se expresa de la siguiente manera $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ en este caso el $a=\sqrt{2}$ y $b=\sqrt{7}$ ahora continuemos con las operaciones indicadas en la última expresión

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{35}}{2-7}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{35}}{2-7}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{35}}{-5}$$

y así concluye el ejercicio

<u>Ejercicios propuestos</u>

a.) Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones

$$\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{7}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{7}}$$

b.) Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones

$$\frac{8}{\sqrt[9]{2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^6}}$$

$$\frac{2}{\sqrt[7]{x^4 \cdot y^2 \cdot z^5}}$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt[11]{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^7}}$$

$$\frac{5\sqrt[8]{a^2 \cdot b \cdot c^3}}{\sqrt[17]{a^6 \cdot b^7 \cdot c^{12}}}$$

c.) Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$\frac{4 + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$