

TP N° 4 sur Machine :

Observation spectrale par TFD et Résolution en fréquence.

Exercice 1

Observation spectrale par TFD

La transformée de Fourier discrète correspond à un échantillonnage (dans le domaine fréquentiel) de la transformée de Fourier d'un signal discret (parfois notée TFTD pour Transformée de Fourier à Temps Discret).

Matlab fournit un calcul de la TFD par la fonction *fft*.

Dans cet exercice, nous allons superposer le résultat du calcul d'une TFD sur un nombre de points fixé ($N=32$ par exemple) à la TFTD dont nous obtenons une approximation en faisant appel au même programme *fft* mais en utilisant un nombre beaucoup plus grand de points (1024 par exemple), pour simuler son caractère continu.

- 1) Observer le résultat de la TFD lorsque le signal sinusoïdal est de fréquence multiple ou non de $1/N$. Conclure.
- 2) Les ondulations présentes sur la courbe de la TFTD sont une conséquence de la largeur de la fenêtre d'observation (rectangulaire par défaut). Expliquer le phénomène et modifier la durée d'observation du signal. Apposer une fenêtre de Hamming et comparer.

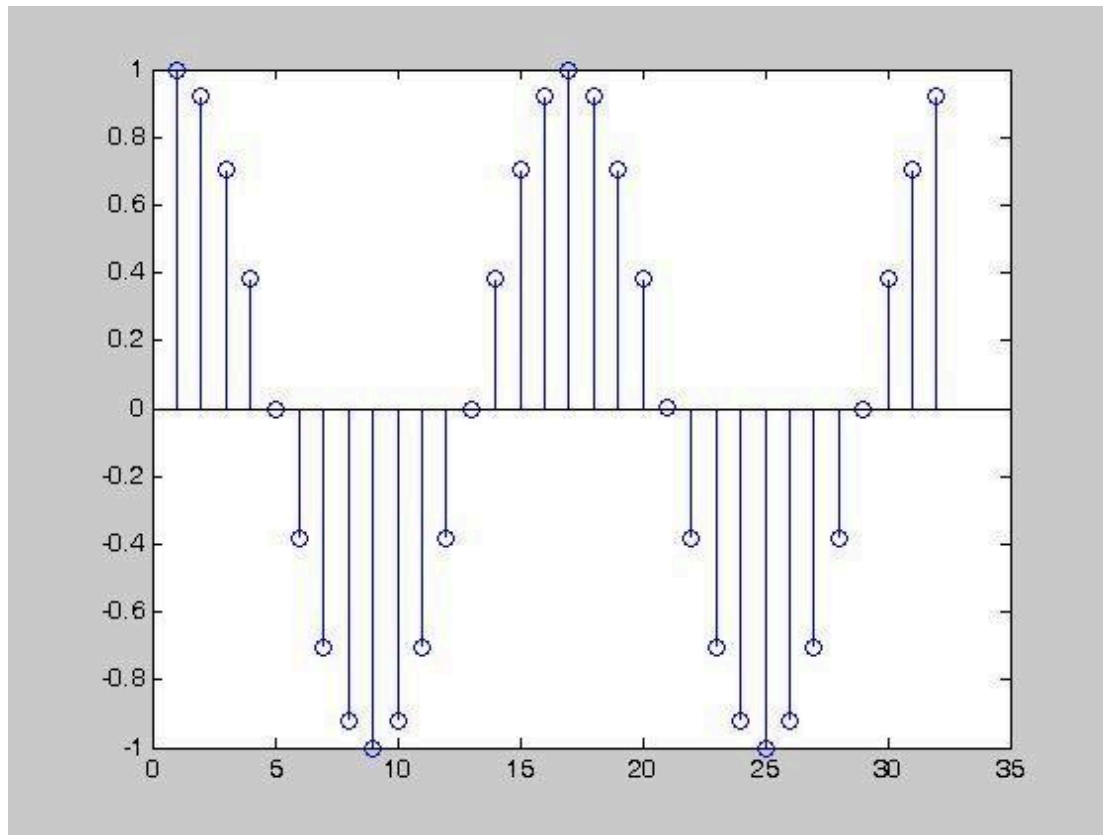
Solution

```
1)
clear;
N=32
f0=1/N
%génération sinusoïde
t=[0:N-1];
xt=exp(2*j*pi*f0*t);
stem(real((xt)));
%calcul de la TFD
Nfft=32
f=[0:Nfft-1]/Nfft;
xf=fft(xt,Nfft);
figure(2); plot(f,abs(xf),'rx');
```

%simulation de la TFtd

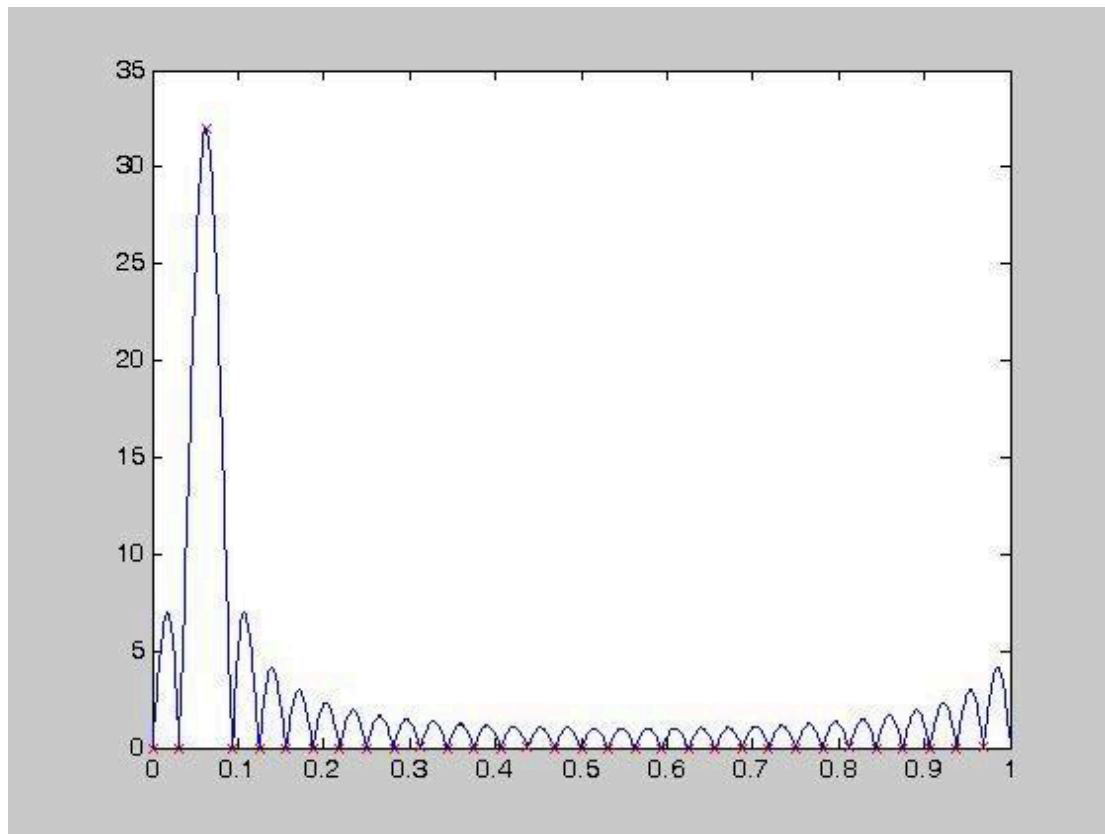
```
Nc=input('entrer nombre de points pour simuler la TFtd (par défaut 1024) : ');
tc=[0:Nc-1];
fc=[0:Nc-1]/Nc;
xfc=fft(xt,Nc);
plot(fc,abs(xfc),'-b'); hold off;
```

Avec $f_0=2/32$ et $n=32$, nous obtenons :
 La sinusoïde :

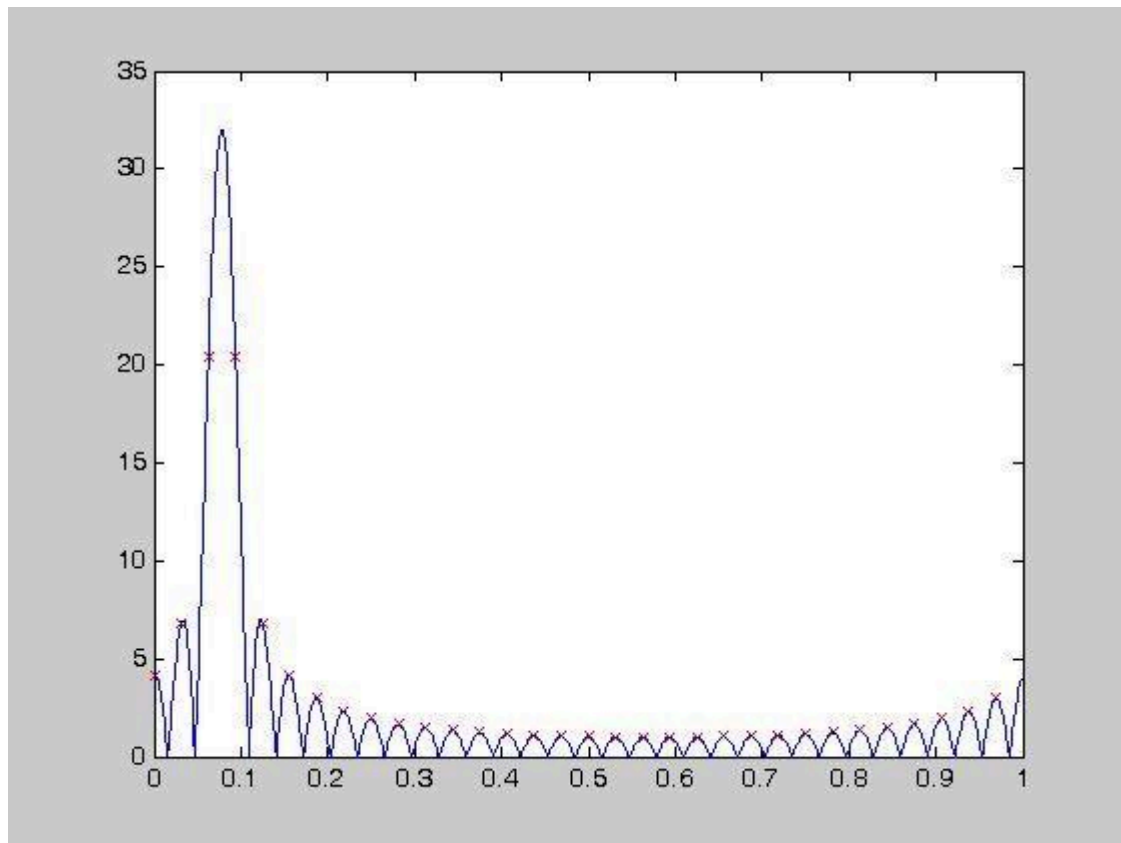


La TFD superposée à la TFTD :

(Remarque : en utilisant un signal complexe, on constate qu'il n'y a qu'un pic principal et non 2 comme ce serait le cas si on avait généré s à l'aide d'une fonction sinus ou cosinus seulement.)



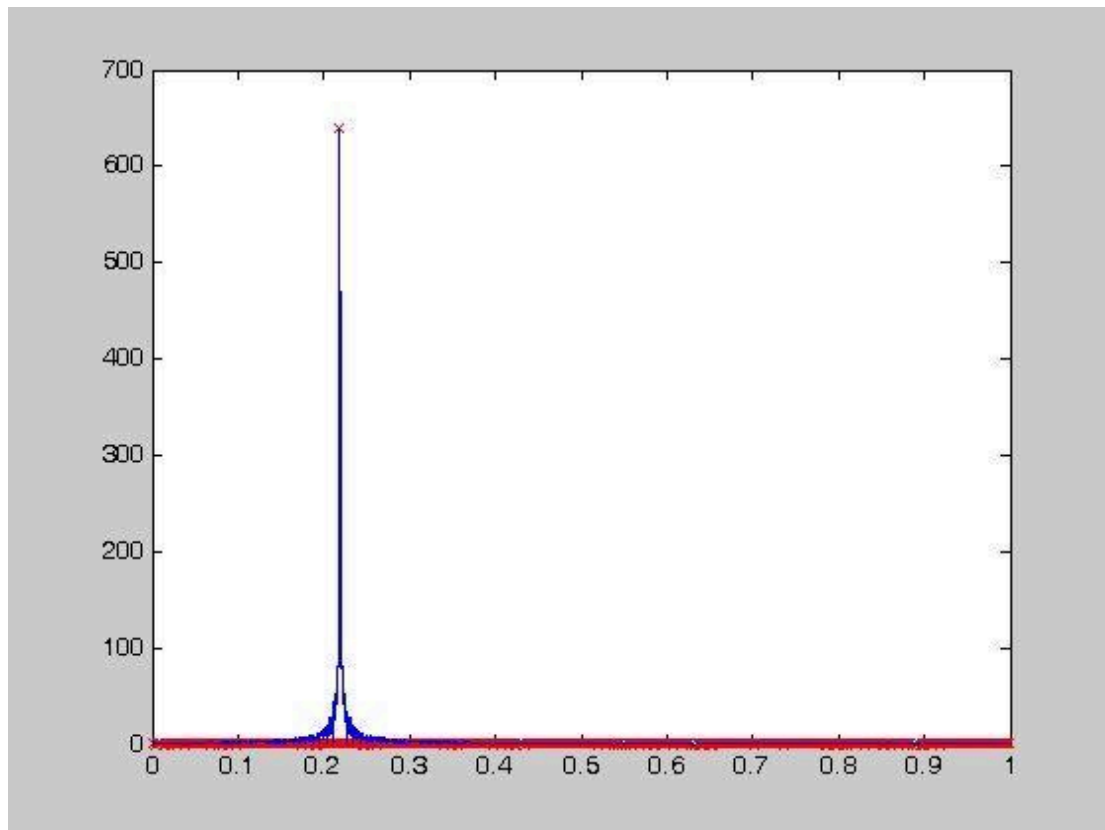
On constate que la TFD (croix rouges) présente une seule valeur non nulle, à la fréquence espérée. C'est un cas absolument particulier puisque cette fréquence est un multiple de $1/N$. Pour tous les autres cas (faire les tests), le résultat de la TFD provoque une imprécision sur la détermination de la fréquence du signal :



La précision en fréquence de la TFD est donc en $1/N$ si N est le nombre de points du calcul.
En Hz, la précision est donc de F_e/N Hz.

2)

Augmentons la durée du signal et la fenêtre d'étude :



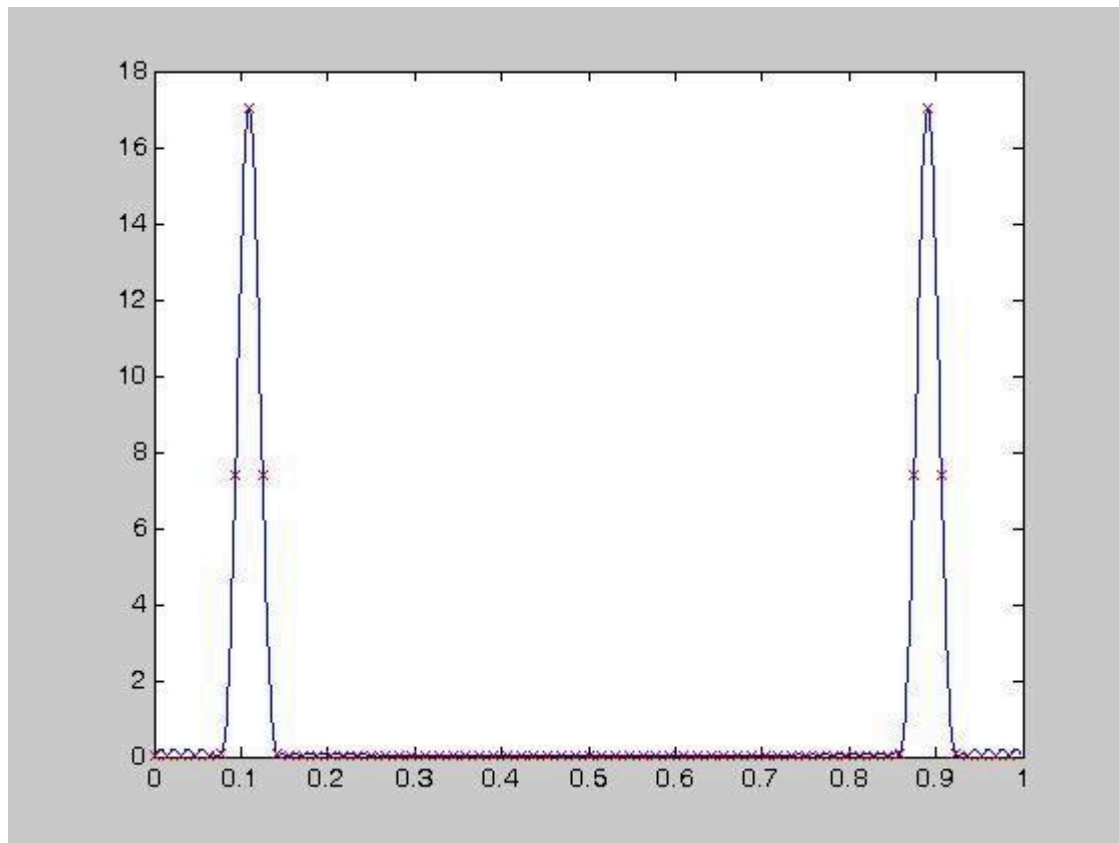
Les ondulations sont toujours présentes, semblables en amplitude mais se resserrent.

On peut visualiser l'effet d'un fenêtrage par Hamming.

On peut utiliser la fonction *hamming* de Matlab, ou encore la fonction *Windows* en précisant le type de fenêtre.

```
%utilisation d'une fenetre de Hamming
w=window(@hamming,N);
xtw=(real(xt)).*w;
xfh=fft(xtw,Nfft);
figure(3); plot(f,abs(xfh),'rx');hold on
xfc=fft(xtw,Nc);
plot(fc,abs(xfc),'-b'); hold off;
```

Avec $N=64$ et $f_0=7/64$, on obtient :



On constate que les lobes secondaires ont quasiment disparu, mais en revanche le lobe principal s'est élargi. On n'a plus une seule valeur non nulle même dans le cas particulier de la fréquence multiple de $1/N$.

Les conséquences sur la résolution en analyse vont être étudiées dans l'exercice suivant.

Exercice 2

Résolution en fréquence.

La résolution en fréquence correspond à l'aptitude à distinguer deux fréquences voisines dans un signal.

(la résolution peut être quantifiée par l'écart minimal entre les fréquences de 2 sinusoïdes pour observer dans le spectre résultant, un creux de plus de 3dB entre les 2 maxima).

Dans la situation de l'exemple précédent, la résolution est de l'ordre de F_e/N , valeur inverse du temps d'analyse du signal $N.T_e$.

Du fait des lobes secondaires, la possibilité de séparer 2 sinusoïdes de fréquences proches va dépendre des amplitudes respectives des 2 sinusoïdes.

- 1) générer un signal, somme de 2 sinusoïdes proches, dont on pourra faire varier les amplitudes et l'écart entre elles. Observer le spectre dans une représentation en dB.
- 2) Déterminer par observation spectrale, la limite de résolution dans le cas où les amplitudes sont égales et dans le cas où les amplitudes présentent un rapport de 20 dB.
- 3) Effectuer la même étude en utilisant une fenêtre de Hamming.

Solution

- 1)
code matlab :

```

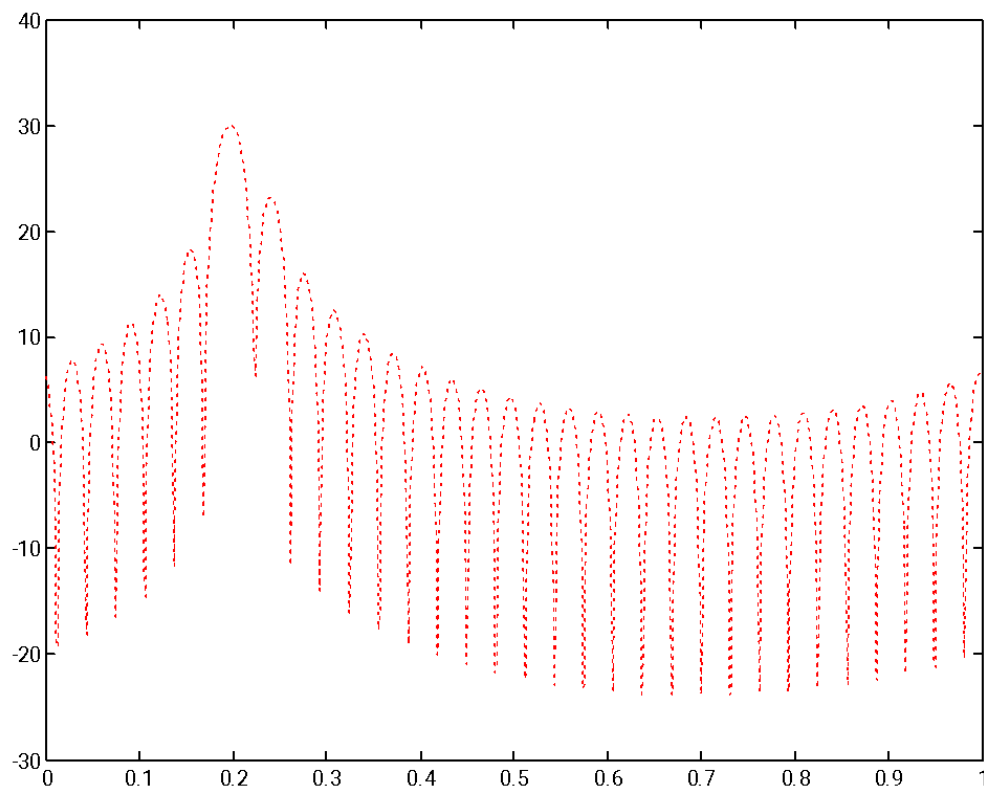
clear;
N=input('entrer N nombre de points du signal (par défaut 32) : ');
Nfft=input('entrer L nombre de points pour calcul de la FFT (par défaut 1024) : ');
f1=input('entrer fréquence de la première sinusoïde (par défaut, 0.2 : ');
f2=input('entrer fréquence de la seconde sinusoïde (par défaut, 0.5 : ');
r=input('entrer le rapport en dB entre les amplitudes des 2 sinus (par défaut, -10) : ');

%génération signal
t=[0:N-1];
rap=10^(r/20);
xt=exp(2*j*pi*f1*t) + rap*exp(2*j*pi*f2*t);

%calcul de la TFD
xf=fft(xt,Nfft);
f=[0:Nfft-1]/Nfft;
figure(1); plot(f,20*log10(abs(xf)),':r');

```

cela donne :



En prenant des amplitudes identiques, on distingue jusqu'à $f_1=0.2$ Hz et $f_2=0.23$ Hz, soit un écart proche de F_e/N .

2 et 3)

```
%utilisation d'une fenêtre de Hamming
w=window(@hamming,N);
xtw=(real(xt)).*w;
xfh=fft(xtw,Nfft);
figure (2); plot(f,20*log10(abs(xfh)),'r');
```

Lorsque les amplitudes sont égales, la résolution va dépendre de la largeur du lobe principal. On n'a donc pas intérêt à utiliser une fenêtre de Hamming.

En revanche, quand les amplitudes sont différentes, les lobes secondaires jouent dans la résolution : il ne faut pas que le 2^{ème} pic se confonde avec l'un d'entre eux. La fenêtre de Hamming devient intéressante.

Il n'y a donc pas de meilleure solution a priori.

Exemple avec $f_1=0.2$, $f_2=0.23$ et rapport de -30dB sur $N=128$ points.

