Un brin d'optique du papillon

Ce problème, inspiré de la lecture d'un fort bel ouvrage de Serge Berthier: « Iridescences, les couleurs physiques des insectes », va tout d'abord traiter des équations de base de l'électromagnétique. On s'intéressera ensuite à la transmission, à la réflexion et à la polarisation des ondes électromagnétiques sur les dioptres entre milieux diélectriques avant d'évoquer les couleurs qui se développent sur les ailes de papillon par interférences sur couches minces. Les couleurs de ces insectes ne s'expliquent pas uniquement grâce aux modèles simples exposés ici et le candidat curieux pourra avec profit consulter l'ouvrage cité plus haut qui traite bien plus complètement du sujet que ce problème.

De nombreuses questions de ce problème sont indépendantes. Les candidats sont invités à répondre aux questions qualitatives comme aux autres : succinctement et précisément. De nombreux points sont attribués sur la rédaction, la présentation et les qualités d'expression qui apparaissent sur la copie. Toute réponse non justifiée est sans valeur.

Partie I - les équations de base de l'électromagnétisme.

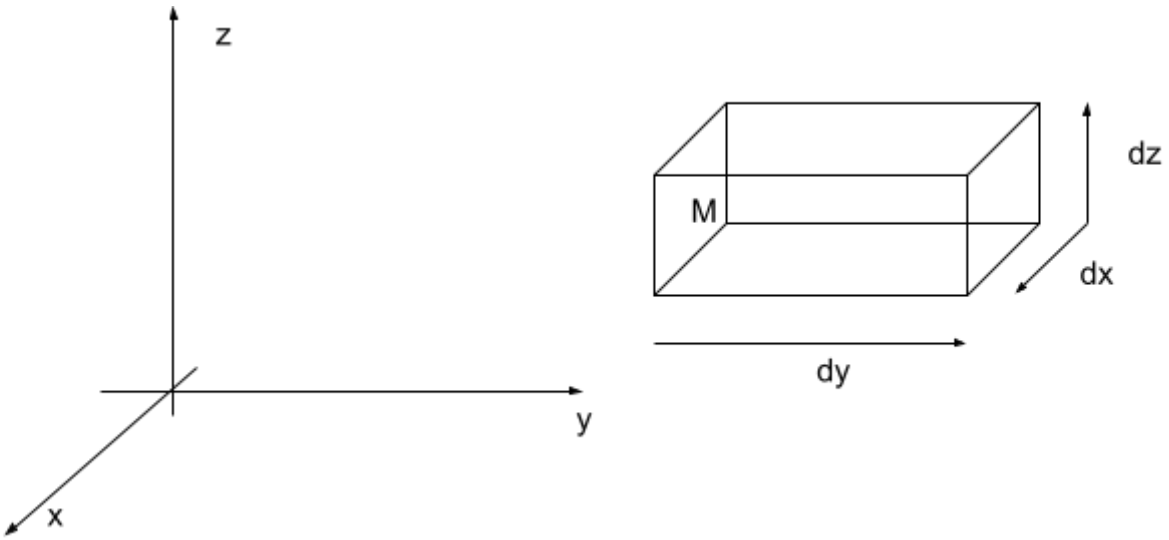
Avant d'aborder les aspects optiques du sujet, on va se pencher sur les équations de base de l'électromagnétisme : interprétations des équations de Maxwell, utilisation pour obtenir les équations de propagation des signaux électromagnétiques dans le vide puis dans un milieu diélectrique.

1) les équations utilisant le flux.

a) On commencera par raisonner sur un champ de vecteurs $\vec{C}$ quelconque. On considère un volume élémentaire dessiné à partir d'un point M(x,y,z) en augmentant x de dx, y de dy et z de dz (volume élémentaire cartésien : voir figure ci-dessous). Déterminer $\delta\varphi$, le flux de ce vecteur $\vec{C}$ sortant du volume élémentaire ainsi défini. Interpréter alors l'opérateur divergence en terme de flux.

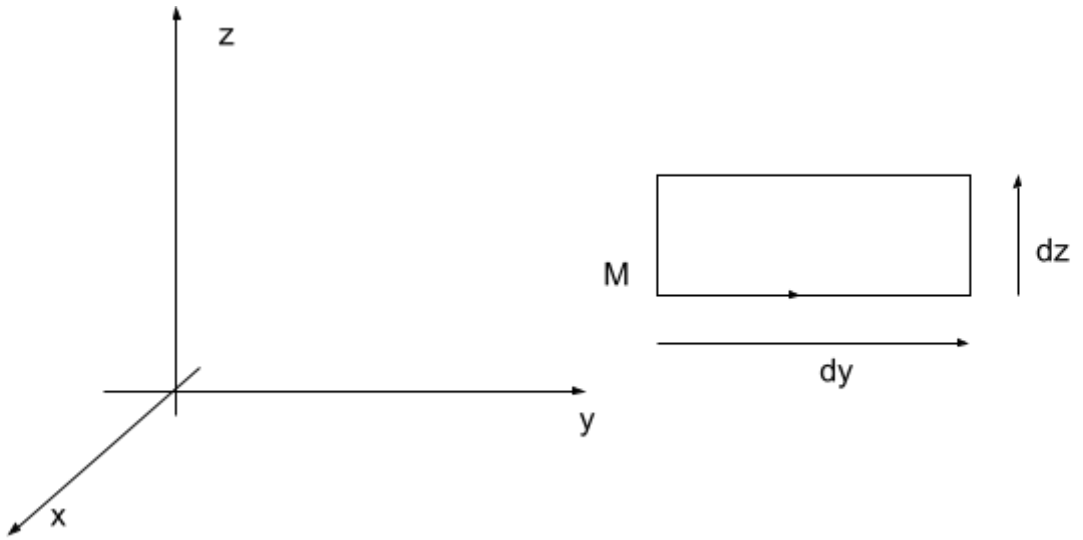
b) Equation de Maxwell-Gauss : rappeler cette équation. A la lumière des résultats du a), donner une interprétation macroscopique à cette équation locale. Que signifie-t-elle sur le caractère polaire ou axial du champ $\vec{E}$ ainsi que sur ses sources ?

c) Equation de Maxwell du flux magnétique : rappeler cette équation. En donner une interprétation macroscopique. Qu'indique cette équation sur les sources de champ magnétique?



2) Equations utilisant une circulation.

a) On reprend un champ de vecteur quelconque $\vec{C}$ que l'on va cette fois faire circuler sur un contour élémentaire défini à partir du point M(x,y,z), dans un plan x constant et obtenu par augmentation de y de dy et de z de dz (voir figure ci-dessous). Déterminer δC la circulation de $\vec{C}$ sur cette courbe élémentaire orientée par Ox comme sur le schéma. En déduire une interprétation de la composante sur Ox de l'opérateur rotationnel. Lier δC à un flux.



b) Equation de Maxwell-Ampère : la rappeler. Que devient-elle en magnétostatique ? En se basant sur le a), comment se développe le champ magnétique au voisinage des courants ? Que peut-on en conclure sur le caractère axial ou polaire de ce champ ?
Montrer qu'on retrouve un théorème macroscopique grâce à cette équation en statique ?

c) Rappeler la quatrième équation de Maxwell. Sans démonstration, rappeler à quelle équation macroscopique elle est liée.

3) Equation d'onde dans le vide.

a) En utilisant les équations de Maxwell dans le vide, retrouver la forme générale de l'équation de propagation du champ électromagnétique. On pourra déterminer l'équation concernant le champ électrique ou le champ magnétique indifféremment. On rappelle que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{grad}\,(div\overrightarrow{A}) - \Delta\overrightarrow{A}$.

b) Tirer de cette équation la relation entre la célérité de la lumière dans le vide C, la permittivité du vide ε_0 et la perméabilité du vide μ_o. Vérifier, sans utiliser l'équation de propagation, la bonne dimension de cette relation.

c) Les équations de Maxwell sont valables dans tous les référentiels galiléens. Quelle conséquence peut-on en tirer sur la valeur de C dans tous ces référentiels ? Quelle relation de la mécanique classique, liée au changement de référentiel galiléen, cela infirme-t-il ? Quelle théorie mécanique a émergé de cette contradiction au début du XX^{éme} siècle ?

d) Qu'est-ce qu'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) ? Quel est son intérêt pour décrire les ondes réelles.

4) Equation d'onde dans un milieu diélectrique.

On se place dans un milieu diélectrique sans propriété magnétique ($\mu_r = 1$). On note ρ_{libre} les charges volumiques non liées à la polarisation du milieu, pliée celles qui le sont et $\overrightarrow{j}_{liée}$ le vecteur densité de courant lié au déplacement des charges de polarisation.

a) Définir de manière générale de vecteur déplacement électrique $\overrightarrow{D}$. Rappeler, sans démonstration, les relations liant, d'une part, $\overrightarrow{P}$ et $\rho_{liée}$ puis, d'autre part, $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{j}_{liée}$.

b)Que deviennent les équations de Maxwell pour $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$. Que devient le théorème de Gauss pour $\overrightarrow{D}$?

c) Soit un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope de permittivité relative réelle ε_r. Quelle relation existe alors entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$? En l'absence de charges libres et de courants libres dans le milieu, déterminer l'équation de propagation de $\vec{D}$ et la célérité v de la lumière dans ce milieu. Comment définit-on l'indice optique n du milieu diélectrique ?

d) Montrer que les OPPM sont transverses dans ce type de milieu. Etablir la relation de dispersion entre la norme du vecteur d'onde k, la célérité v et la pulsation ω de l'onde. Relier k à λ longueur d'onde dans le milieu puis à λ_0 longueur d'onde dans le vide, et n.

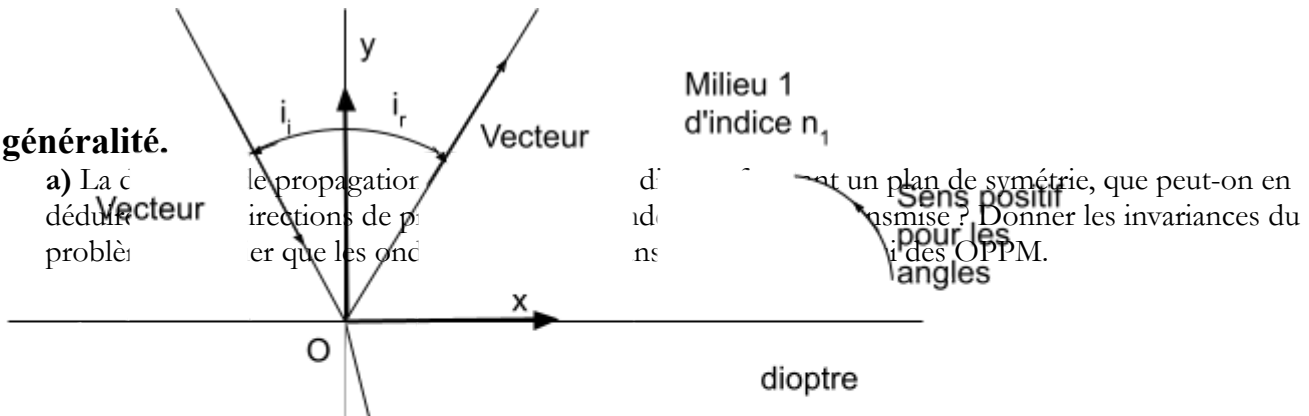
e) Dans certains milieux diélectriques, on utilise une permittivité relative complexe ε_r. Expliquer qualitativement ce que traduit le caractère complexe de ε_r dans un milieu diélectrique et à quel phénomène est associée la partie imaginaire.

Partie II-Conditions de passages dans un milieu diélectrique.

On aura besoin dans la suite du problème de savoir comment une onde passe d'un milieu diélectrique dans un autre : quelle partie de l'onde est réfléchie et quelle partie est transmise. On va considérer des modèles simples d'ondes arrivant sur des dioptres des ondes planes progressives monochromatiques (OPPM). Le dioptre est localement plan aussi considérera-t-on un dioptre plan infini dans les questions qui suivent. L'onde arrive dans un plan qu'on paramétrera avec les axes Ox et Oy (voir figure). La direction de propagation de l'onde fait un angle i; avec la normale au dioptre qui forme le plan Ozx. Les milieux considérés sont diélectriques, non absorbants, non magnétiques, ne portant ni charge ,ni courant libre et caractérisés par des indices optiques ri, et n2. On indicera i ce qui est relatif à l'onde incidente, r, à l'onde réfléchie et t à l'onde transmise. Attention, les angles i_i, i_r et i_t sont orientés.

1) généralité.

a) La c… le propagation … d… …t un plan de symétrie, que peut-on en déduir… irections de p… …nsmise ? Donner les invariances du problè… er que les onc… …ns … i des OPPM.



b) Quelles sont les conditions de passage d'un dioptre dans le cas général de milieu diélectriques portant des charges et des courants libres?. Préciser en particulier les continuités et les discontinuités observables. Donner une explication succincte à ces conditions.

2) Onde s.

On considère une OPPM polarisée rectilignement dans la direction du plan du dioptre pour laquelle le champ : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k_i}.\vec{r})$. $\vec{e_z}$. On associe à ce champ, le champ complexe $\underline{\vec{E}}_i = E_0 \exp[j(\omega t - \vec{k}_i.\vec{r})].\vec{e}_z$ où j est le complexe de carré -1 ($j^2=-1$).

a) Déterminer les composantes de $\vec{k_i}$; en fonction de n_1, λ_0 et l'angle d'incidence i_i.

b) Déterminer les composantes du champ magnétique $\vec{B_i}$ associé à l'onde incidente.

c) Déterminer les composantes de $\vec{k_r}$ en fonction de n_1, λ_0 et l'angle de réflexion i_r puis le champ $\vec{E_r}$ associé à l'onde réfléchie en fonction de E_{0r}, $\vec{k_r}$, ωt et ϕ_r où E_{0r} est l'amplitude du champ électrique et ϕ_r un déphasage éventuel dû 'à la réflexion. Déduire enfin $\vec{B_r}$ en fonction des mêmes paramètres.

d) Déterminer les composantes de $\vec{k_t}$, en fonction de n_2, λ_0 et l'angle de transmission i_t, puis, comme dans la question précédente, les champs $\vec{E_t}$, et $\vec{B_t}$ associés à l'onde transmise. On notera E_{0t}, l'amplitude du champ électrique et ϕ_t le déphasage éventuel sur le champ électrique à la transmission. On notera $\underline{E_{0t}} = E_{0t} \exp(j\phi_t)$ l'amplitude complexe associée.

e) Appliquer les conditions de passage à l'onde considérée en notation complexe. Retrouver alors les lois de Snell-Descartes puis tirer des conditions de passage deux relations indépendantes entre $\underline{E_0}$, $\underline{E_{0r}}$, $\underline{E_{0t}}$ et les angles i_i et i_t.

f) Déterminer les coefficients de réflexion $\underline{r} = \frac{\underline{E_{0r}}}{E_0}$ et de transmission $\underline{t} = \frac{\underline{E_{0t}}}{E_0}$ en fonction de n_1, n_2, i_i et i_t. Le coefficient r peut-il s'annuler ? Y a-t-il un déphasage lors de la réflexion ?

Déterminer $R = \underline{r}^2$ en fonction de n_1, n_2 et i_i. Que représente physiquement R ? Pour $n_1 = 1$ et $n_2=1,33$ (cas de l'air et de l'eau), tracer $R(i_i)$ sur papier millimétré à l'échelle 1 cm pour 10° et 10 cm par unité en ordonnée. Commenter l'allure obtenue.

3) onde p.

On reprend les considérations précédentes mais pour une onde polarisée rectilignement telle que le champ électrique se trouve dans le plan d'incidence. On admettra directement ici que les lois de Snell-Descartes s'appliquent. On a $\vec{E_i} = E_o \cos(\omega t - \vec{k_i}.\vec{r})$. $\vec{e}$ où $\vec{e}$ est un vecteur unitaire.

a) Que peut-on dire des trois vecteurs d'onde précédents ?

b) On utilise à nouveau le champ incident. Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\vec{e}$ sur Ox, Oy et Oz en choisissant e_x positif. Déterminer le champ magnétique $\vec{B_i}$, associé à l'onde incidente.

c) On trouve les coefficients r et t par les mêmes raisonnements que précédemment avec ici :

$$\underline{r} = \frac{n_1 \cos(i_t) - n_2 \cos(i_i)}{n_1 \cos(i_t) + n_2 \cos(i_i)}$$

$$\underline{t} = \frac{2n_1 \cos(i_t)}{n_1 \cos(i_t) + n_2 \cos(i_i)}$$

$\underline{r}$ peut s'annuler en un angle qu'on note i_B. Déterminer cet angle. Analyser le comportement de ϕ_r ? Déterminer R en fonction de i_i, n_1 et n_2 puis faire le tracé sur le même graphe que précédemment avec les mêmes valeurs numériques. Commenter l'allure obtenue.

d) Déterminer ce qui se passe pour une lumière naturelle, polarisée rectilignement au voisinage de l'angle i_B. Que se passe-t-il si on observe la lumière réfléchie au travers d'un polariseur ? Quelle application peut-on faire de cette constatation en photographie si on souhaite supprimer les reflets gênants ?

Partie III - Une origine des couleurs des papillons.

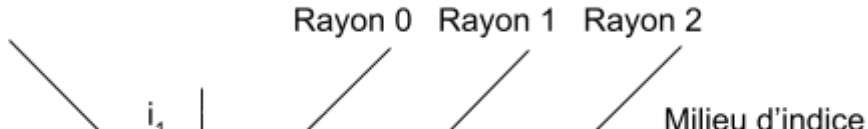
Dans cette partie, on va considérer un modèle simple à une couche puis un modèle plus complexe à plusieurs couches, pour expliquer les irisations observées sur certaines ailes d'insecte, et en particulier de papillons. Les colorations qui apparaissent dépendent parfois de l'inclinaison de la lumière arrivant sur les ailes de ces insectes. Elles sont alors changeantes et avivent l'intérêt esthétique de ces insectes.

1) Modèle simple à une couche.

On va considérer une lumière monochromatique qui arrive dans l'air d'indice $n_1 = 1$ en incidence oblique, sous un angle i_i, sur une aile de papillon modélisée par une couche d'indice $n_2 = n$ et d'épaisseur e. Dans un premier temps, on va considérer l'ensemble des rayons réfléchis : celui obtenu par réflexion lors de l'arrivée sur le dioptre (rayon 0) le second obtenu après une transmission, une réflexion sur le dioptre de sortie puis une transmission (rayon 1) et ainsi de suite (voir figure ci-dessous). On va montrer qu'on peut négliger les rayons à l'exception des deux premiers.

Les coefficients de réflexion et de transmission sont notés : r_1 et t_1 entre l'air et le milieu d'indice n (dioptre d'entrée) et r_2 et t_2 entre le milieu d'indice n et l'air (dioptre de sortie).

a) Déterminer la différence de marche δ entre deux rayons émergeants consécutivement en fonction de n, i_t et e. En déduire le déphasage ϕ correspondant.



b) En considérant une amplitude complexe $\underline{s}$ = a exp(jωt) pour l'onde incidente au point d'entrée dans le dioptre, déterminer l'amplitude de l'onde que l'on récupère à l'infini sous un angle i_i après les réflexions sous forme d'une somme infinie de termes.

c) Que remarque-t-on sur les coefficients r_1 et r_2 ? le résultat dépend-il de la direction de polarisation de la lumière ? Calculer alors la somme infini $\underline{s}_{\infty l}$ du **b)** en fonction de a, ϕ et des coefficients de réflexion et de transmission. Indiquer pourquoi, en considérant n = 1,5 (indice voisin de celui de la chitine, matière trouvée dans les ailes d'insectes), on peut négliger les rayons à partir du deuxième inclus. On retiendra ce résultat pour la suite.

2) modèle à plusieurs couches alternées.

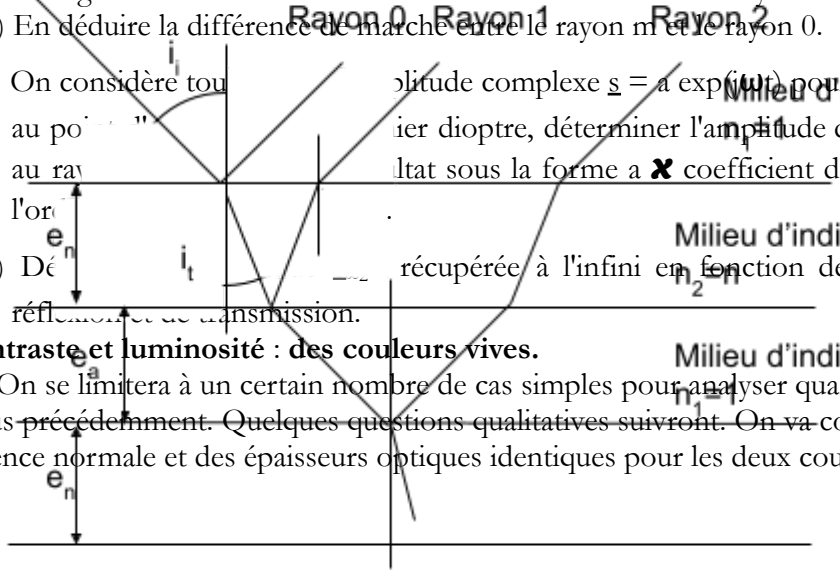
Les ailes des papillons et d'autres insectes ont une structure en couches alternées :à des couches d'épaisseur e_n et d'indice n (de la chitine par exemple) succèdent des couches d'épaisseur e_a et d'indice différent de n. Pour simplifier, on ne traitera que du cas où ces dernières sont constituées d'air et les dioptres parallèles entre eux. On ne considérera dans cette partie que le premier rayon réfléchi après chaque transmission et un nombre infini de couches successives.

a) Déterminer la différence de marche δ' entre le rayon 1 et le rayon 2. On pourra remarquer une analogie entre cette différence de marche et celle entre les rayons 0 et 1, calculée précédemment.

b) En déduire la différence de marche entre le rayon m et le rayon 0.

c) On considère tou[illegible]plitude complexe $\underline{s}$ = a exp(jωt) pour l'onde incidente sous un angle i_i au po[illegible]ier dioptre, déterminer l'amplitude de l'onde associée au rayon 2 puis au ray[illegible]ltat sous la forme a ✘ coefficient de réflexion ou transmission dans l'or[illegible].

d) Dé[illegible] récupérée à l'infini en fonction de ϕ, ϕ', a et des coefficients de réflexion et de transmission.



3) Contraste et luminosité : des couleurs vives.

On se limitera à un certain nombre de cas simples pour analyser quantitativement les résultats obtenus précédemment. Quelques questions qualitatives suivront. On va considérer le voisinage de l'incidence normale et des épaisseurs optiques identiques pour les deux couches : $e_a = n.e_n$. n = 1,5.

a) Que constate-t-on alors sur ϕ et ϕ' ? Simplifier le résultat obtenu pour $\underline{s}_{\infty 2}$ dans le modèle à plusieurs couches.

b) Déterminer une condition sur ϕ pour obtenir un maximum ou un minimum d'éclairement dans une direction. Déterminer les maxima en fonction de ϕ de $|\underline{s}_{\infty 1}|$ et $|\underline{s}_{\infty 2}|$. Comparer alors les résultats des deux interférences (à une couche ou à plusieurs couches). Lequel laisse prévoir les couleurs les plus lumineuses ?

c) On définit le contraste C par: $C = \frac{|s|^2_{max} - |s|^2_{min}}{|s|^2_{max} + |s|^2_{min}}$. Déterminer C pour les deux modèles (notés C_1 et C_2). Conclure.

d) La lumière qui éclaire les papillons est de la lumière blanche. Pourra-t-on observer les couleurs du spectre (obtenues, par exemple, lors de la dispersion de la lumière blanche sur un réseau ou un prisme) sur des ailes de papillon ?

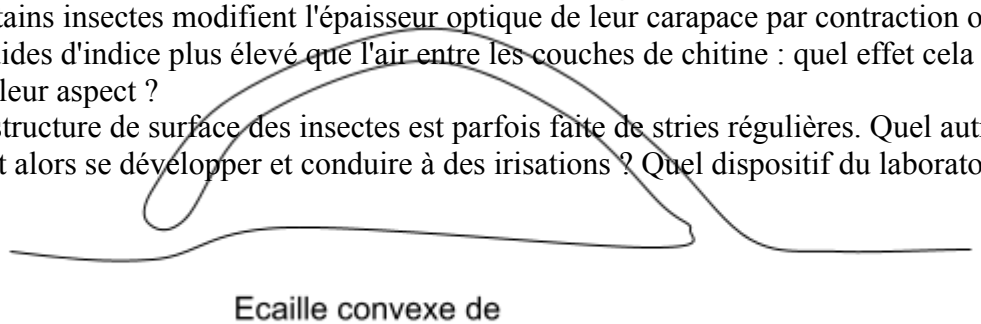
4) Dispersion, polarisation : des couleurs variées et changeantes.

Dans ces modèles plans, les ailes de papillons se comportant comme des miroirs (imparfaits), on ne devrait observer de couleur qu'autour d'une direction lorsqu'elles sont éclairées par la lumière solaire. Cette lumière est, en fait, dispersée par un système d'écailles concaves ou convexes. On va examiner le cas d'écailles convexes d'épaisseur optique constante. On se place dans le cas où λ_{0R} = 600nm (rouge orangé) est la seule longueur d'onde à être réfléchie de manière importante en incidence normale. On raisonnera sur le modèle à simple couche (qualitativement).

a) Déterminer l'épaisseur optique de l'écaille puis son épaisseur. Ce résultat va-t-il dans le sens du modèle en couche ?
b) La lumière naturelle est équivalente à de la lumière polarisée circulairement. L'état de la polarisation est-il modifié par la réflexion dans le cas de l'incidence normale ?
c) Expliquer par un schéma pourquoi il y a dispersion sur une écaille comme celle qui est schématisée ci-dessous.

.

d) Déterminer la longueur la mieux transmise sous l'incidence i deuxième partie. Quelle couleur dominante aura la lumière réfléchie dans cett ıser de la polarisation de la lumière r
e) Peut-il y avoir d'onde correspondant à un ma dans une direction de ré écaille ?
f) Que se passe-t- optique de l'écaille est de plus de 3 ou 4 fois la longueur d'onde λ_R ? Peut-il y avoir encore des irisations sur cette écaille ?
g) Certains insectes modifient l'épaisseur optique de leur carapace par contraction ou injectent des liquides d'indice plus élevé que l'air entre les couches de chitine : quel effet cela peut-il avoir sur leur aspect ?
h) La structure de surface des insectes est parfois faite de stries régulières. Quel autre phénomène peut alors se développer et conduire à des irisations ? Quel dispositif du laboratoire cela rappelle t-il ?



Fin du problème