

Цель занятия:**Деятельностная:**

– создать условия для формирования представления о площади криволинейной трапеции и интеграле.

Содержательная:

– сформировать представление об определенном интеграле, его геометрическом смысле;

– повторить понятие криволинейной трапеции, площадь криволинейной трапеции, нахождение площади фигуры;

– познакомиться с задачами вычисления площадей плоских фигур при помощи определенного интеграла.

Оборудование занятия: доска, учебник.

План занятия:

1. Свойства неопределенного интеграла

2. Геометрический смысл определенного интеграла (*повторение*)

3. Примеры и разбор решенных заданий

3.1. Случай, когда часть площади плоской фигуры лежит под осью

3.2. Общий случай для нахождения площади плоской фигуры, ограниченной двумя кривыми.

3.3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1. Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1 (независимость от обозначения переменной)

Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Свойство 2 (линейность) Если f_1 и f_2 интегрируемы на $[a,b]$ и A, B – произвольные числа, то

$$\int_a^b (Af_1 + Bf_2)dx = A \int_a^b f_1 dt + B \int_a^b f_2 dt$$

Свойство 3 (аддитивность) Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство (c – любое)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

при условии, что все три интеграла существуют.

2. Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл – площадь криволинейной трапеции

Достаточное условие существования определенного интеграла: если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Обязательная составляющая криволинейной трапеции – нижнее основание в виде $[a;b]$ и верхняя часть в виде кривой $y=f(x)$.

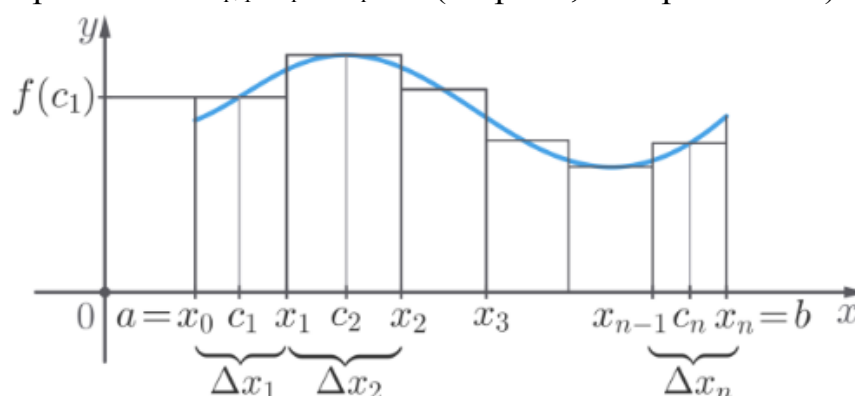
Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$. Разобьем этот промежуток на n произвольных частей точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, полагая, что

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

В каждом из полученных частичных промежутков $[x_i; x_{i+1}]$, где $i=0, 1, 2, \dots$ выберем произвольную точку c_i ($x_i \leq c_i \leq x_{i+1}$)

Вычислим значения функций $f(c_i)$ и умножим его на разность $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$. После этого составим сумму: $S_i(x) = f(c_i) \cdot \Delta x_i$. Является площадью прямоугольника высоты $f(c_i)$, ширины Δx_i .

Обозначим разбиение $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = \lambda$ (ширина, шаг разбиения).



Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$, не зависящий ни от способа дробления промежутка $[a;b]$ на части, ни от выбора точки c_i , то этот предел – определенный интеграл функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$:

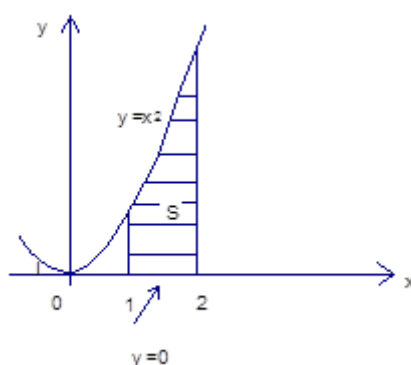
$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_i = \int_a^b f(x) dx$$

3. Примеры и разбор решенных заданий

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$.

Решение.

Вот искомая площадь:



Вот формула:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:
 Пределы интегрирования $a = 1, b = 2, f(x) = x^2$.

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}.$$

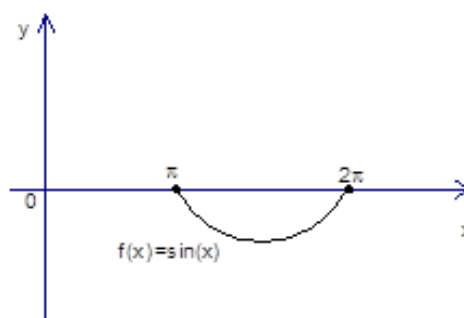
Вычислили площадь криволинейной фигуры.

Ответ: $\frac{7}{3}$

В следующей задаче площадь искомой фигуры образовывается с помощью $\sin x$. А именно:

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x, y = 0, x \in [\pi, 2\pi]$.
Решение.

Посмотрим, что это за фигура. График $y = \sin x$ в пределах от π до 2π расположен под осью Ox .



Ясно, что если возьмем определенный интеграл, то мы получим отрицательное число.

Вычисляем.

1. Сначала вычисляем определенный интеграл от π до 2π от подынтегральной функции $y = \sin x$.

Надо найти первообразную.

По таблице первообразных:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$S = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) = -1 - 1 = -2.$$

2. Для того чтобы найти площадь, надо взять модуль $S = |-2| = 2$.

Ответ: 2.

Общий случай для нахождения площади плоской фигуры, ограниченной двумя кривыми.

Нам надо найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = f(x), y = g(x), x = a, x = b, g(x) \leq f(x)$$

Мы используем известный прием: эту площадь поднимем на некоторое m , и это m потом сократилось. Так вот, эту площадь теперь можно считать без введения m . Правило следующее:

Площадь фигуры, ограниченной прямыми линиями $x=a$, $x=b$ и графиками функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ и таких, что для всех x из отрезка $[a;b]$ выполняется неравенство $g(x) \leq f(x)$, вычисляется по формуле, которую мы вывели:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

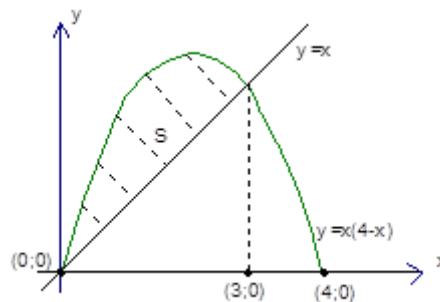
Рассмотрим первый конкретный пример на нахождение площади между двумя линиями.

3. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями

$$y = -x^2 + 4x \text{ и } y = x$$

Решение. Для начала построим графики этих линий и поймем, где та площадь, которую нам надо искать.

График квадратичной функции – парабола. Корни – 0; 4, ветви вниз. График прямой $y=x$ – биссектриса первого координатного угла. Вот площадь, которую надо найти:



Но для этого сначала надо найти точки пересечения и решить стандартную задачу.

1. Находим точки пересечения. Для этого решаем систему:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = x \end{cases}$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно x :

$$-x^2 + 4x = x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 0, x = 3$$

Мы нашли x , то есть, пределы интегрирования. Это первое важное действие.

2. Теперь стандартное действие:

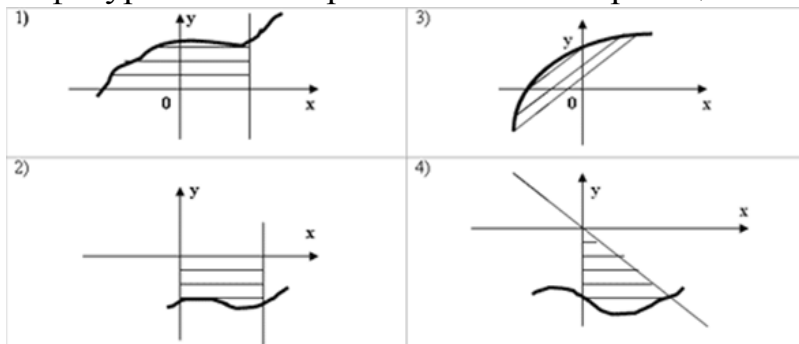
$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (-x^2 + 4x - x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3}{2} \right) - 0 = \\ &= 27 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 27 \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Искомая площадь равна 4,5

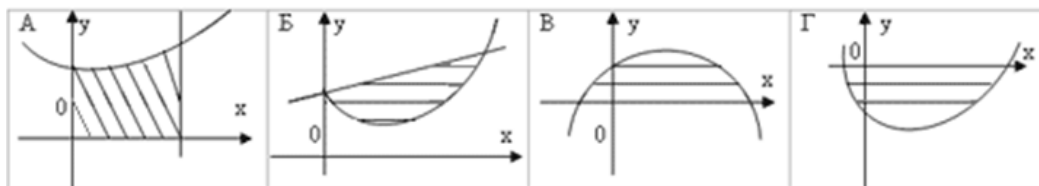
Ответ: 4,5

Вопросы для закрепления:

1. Какая фигура называется криволинейной трапецией?
2. Какие из фигур являются криволинейными трапециями:



3. Как найти площадь криволинейной трапеции?
4. На каком рисунке изображена фигура, не являющаяся криволинейной трапецией?



Домашнее задание

Домашнее задание:

1. Законспектировать основные теоретические сведения.
2. Ответить на вопросы для закрепления
3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463 §56 с. 299-300 №1000 (3,4)

Выполненную работу необходимо сфотографировать и отправить на почтовый ящик pushistaV@yandex.ru, [Бережная Валерия Александровна](#) (VK)

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСЫВАЕМ РАБОТУ НА ПОЛЯХ + в сообщении указываем дату/группу/ФИО