

Corrigé de l'épreuve TPE - physique commune

PREMIER PROBLÈME

Première partie

1-a) Les rayons sont paraxiaux dans l'approximation de Gauss.

b) Fermat: le chemin optique est stationnaire...pour le rayon lumineux

Stigmatisme: le chemin optique est constant...entre deux points conjugués

c) Le pluriel dans l'énoncé est ..singulier car il n'y a qu'une formule de conjugaison avec origine au sommet: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{R}$

On trouve alors que les foyers objet et image coïncident au milieu de S et C

La distance focale valant $\frac{R}{2}$ la vergence est $\frac{2}{R}$ en dioptrie (δ).

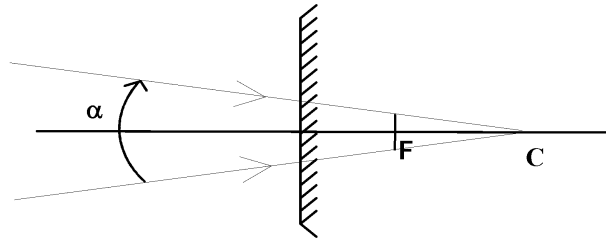
d) L'image se forme dans le plan focal et, est vue depuis le centre C sous l'angle α .

la taille est $R_2 \frac{\alpha}{2}$

l'image est virtuelle, à l'endroit

A-N: taille 22 μm

la donnée ($\alpha = 2''$) ne permet pas d'écrire un résultat plus significatif.



2-a) $\overrightarrow{A_1 M_1 F_1} \overrightarrow{M_2 F_1}$

$$\overline{S_1 F_1} = -\frac{R_1}{2} = -9,986m$$

$$\overline{S_2 F_1} = \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 F_1} = -1,802m$$

$$\frac{1}{-1,802} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{-4,465}$$

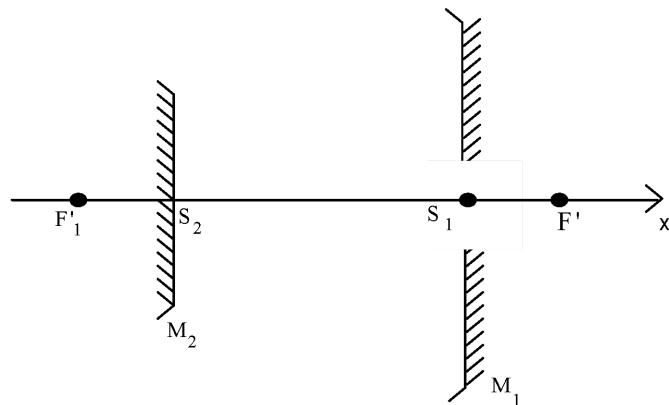
$$\overline{S_2 F_1} = 9,345m \Rightarrow F' \text{ est réel}$$

b) L'image intermédiaire dans le plan focal de (M_1) est renversée et sa taille est $R_1 \frac{\alpha}{2}$

$$\text{Le miroir } (M_2) \text{ crée un grandissement } g_2 = -\frac{x'}{x} = \frac{9,345}{1,802} = +5,182$$

L'image définitive en F' est donc renversée et a pour taille: $g_2 R_1 \frac{\alpha}{2} \approx 0,5mm$

c) La lentille équivalente a son foyer en F' et donne une image de taille $f \cdot \alpha$. On peut en déduire sa distance focale $f = g_2 \frac{R_1}{2} \approx 51,75m$ puis sa position $\overline{S_1 O} = -50,59m$



Deuxième partie

3- a) On observe la figure d'interférences de la lumière diffractée par les trous. Cette figure est formée de franges quasi rectilignes, perpendiculaires au dessin. La radiation $\lambda = 550 \text{ nm}$ correspond au vert-jaune de sensibilité rétinienne maximum.

b) On fait la figure dans le plan contenant l'axe de la lentille et les trous.

La différence de marche dans la direction θ vaut:

$$d = a(\sin q - \sin \alpha) \quad (\text{attention } \alpha \text{ est négatif}).$$

Dans les conditions de Gauss on simplifie

$$d = a(q - \alpha) = a\left(\frac{y}{f} - \alpha\right)$$

En ne tenant pas compte de l'image de diffraction la répartition lumineuse est donnée par

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2pd}{\lambda}\right) \right]$$

c) L'interfrange est la période $\Delta y = i$ de la fonction intensité $I(y)$, $i = f \frac{\lambda}{a}$

4- Le terme I_0 n'est plus constant, c'est une fonction de θ . Il faut connaître la forme des ouvertures diffractantes pour préciser le calcul.

5- **a)** L'incohérence des sources entraîne $I = I_1 + I_2$, soit

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2pd_1}{\lambda}\right) \right] + 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2pd_2}{\lambda}\right) \right] \quad \text{avec}$$

$$d_1 = a\left(\frac{y}{f} - 0\right) \quad d_2 = a\left(\frac{y}{f} - \alpha\right)$$

$$I = 4I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{pa\alpha}{\lambda}\right) \cos\left[\frac{2pa}{\lambda} \left(\frac{y}{f} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \right]$$

b) On calcule ensuite la visibilité

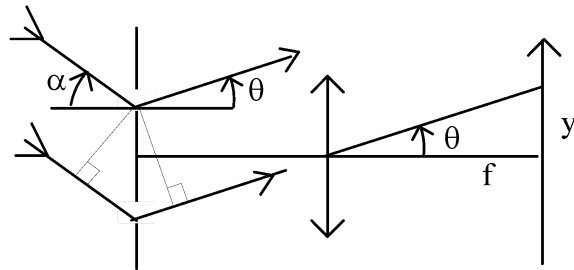
$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \cos\left(\frac{pa\alpha}{\lambda}\right)$$

6- a) L'éclairement est proportionnel à la l'intensité lumineuse; il est uniforme si la visibilité est

$$\text{nulle. } V = 0 \Rightarrow a = \frac{\lambda}{|\alpha|} \left(k + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a_{\min} = a_0 = \frac{\lambda}{2|\alpha|}$$

b) Pour deux secondes d'arc $a_0 = 28 \text{ mm}$

c) Pour 0,008 secondes d'arc $a_0 = 7,1 \text{ m} !!$ valeur supérieure à l'ouverture du télescope, il faudra réaliser un montage optique supplémentaire pour simuler cette valeur de a .



DEUXIÈME PROBLÈME

Première partie

1-a) On écrit que la chaleur qui "entre" dans le volume V sert à élever la température,

soit pour une durée dt : $dQ = - dt \oint \vec{J}_q \cdot d\vec{S} = \iiint \rho c dV \left(\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}} dt \right)$ cqfd..

b) Le théorème d'Ostrogradski combiné avec la loi de Fourier donne

$$\oint \vec{J}_q \cdot d\vec{S} = \iiint \text{div} \{ \vec{J}_q \} dV = \iiint \text{div} (- \lambda \text{grad} T) dV = - \lambda \iiint \tilde{\nabla} T dV$$

$$\iiint \rho c dV \left(\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}} \right) = - \lambda \iiint \tilde{\nabla} T dV \Rightarrow \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}} = h \tilde{\nabla} T \text{ avec } h = \frac{\lambda}{\rho c} \text{ en } m^2.s^{-1}$$

c) On écrit que c'est la chaleur qui entre plus la chaleur libérée par les sources qui élèvent la température, soit $dQ = - dt \oint \vec{J}_q \cdot d\vec{S} + dt \iiint p_e dV = \iiint \rho c dV \left(\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}} dt \right)$

l'équation locale prend alors la forme: $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}} = h \tilde{\nabla} T + \frac{p_e}{\rho c}$

2- Si p_e on a simplement: $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}} = h \frac{\mathcal{T}^2}{\mathcal{Z}^2}$

3- a) La démonstration est impossible, ce qui suit est simplement une vérification.

b) En posant $T(z,t) = f(z).g(t)$ on aboutit à: $\frac{\dot{g}}{g} = h \frac{f''}{f}$ doit être une constante
La constante est homogène à l'inverse d'un temps; on posera alors

$$\dot{g} = \pm \frac{1}{t} g \Rightarrow g = G_0 \exp(\pm \frac{t}{t}) \text{ Seule la solution } g(t) \text{ décroissante est recevable.}$$

Ecrivons $\frac{1}{t} = k^2 h$ (k^2 est une longueur), les équations et les solutions sont:

c) On a par conséquent: $T(z,t) = f = \exp(-k^2 ht) \{ F_1 \exp(-ikz) + F_2 \exp(ikz) \}$

d) On peut vérifier en dérivant l'intégrale par rapport à t et à z que l'on a bien:

$$T(z,t) = \int A(k) \exp(ikz - k^2 ht) dk \Rightarrow \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}} = h \frac{\mathcal{T}^2}{\mathcal{Z}^2}$$

On peut considérer que l'intégrale représente une combinaison linéaire de toutes les solutions particulières trouvées précédemment.

e) On peut écrire à $t = 0$ $T_o(z) = T(z, 0) = \int A(k) \exp(ikz) dk$

Donc en prenant la transformée de Fourier inverse $A(k) = \frac{1}{2\pi} \int T_o(x) \exp(-ikx) dx$

Il faut prendre garde que dans $A(k)$ la variable ξ est une variable qui ne survit pas à

l'intégration et qu'il convient de la distinguer de la variable z de l'intégrale définissant T

$$T(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int T_o(x) \int \exp[(ik(z-x) - k^2 ht)] dk dx = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{p}{ht}} \int T_o(x) \exp[-\frac{(z-x)^2}{4ht}] dx$$

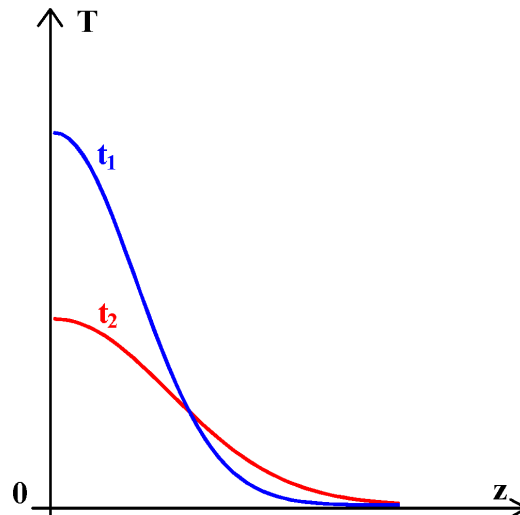
4- a) On remplace T_0 dans la dernière expression

$$T(z, t) = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{p}{ht}} q_0 \int d(x) \exp\left[-\frac{(z-x)^2}{4ht}\right] dx$$

$$T(z, t) = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{p}{ht}} q_0 \left\{ \exp\left[-\frac{(z-x)^2}{4ht}\right] \right\}_{x=0}$$

$$T(z, t) = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{p}{ht}} q_0 \exp\left[-\frac{z^2}{4ht}\right] \quad \text{cqfd}$$

il s'agit de gaussiennes, dessinées pour $t_1 < t_2$



b) Au point $z = z_0$ on peut représenter $T(t)$

le graphe a l'allure donnée ci-contre:

La température commence par croître, présente un maximum puis décroît.

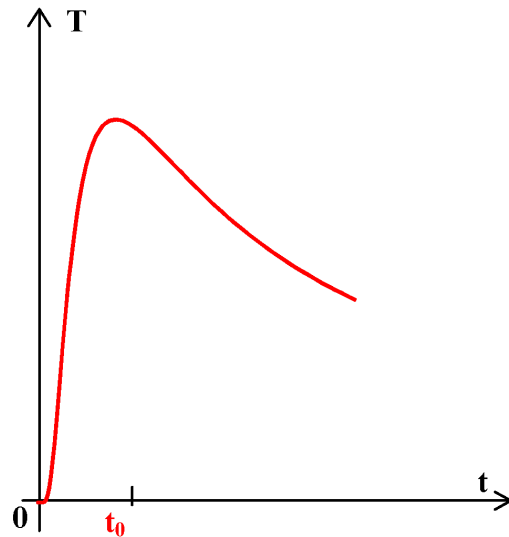
Ce qui caractérise une "bouffée de chaleur" bien que l'expression fasse la confusion entre température et chaleur.

Le maximum est atteint à une date t_0 qui

correspond à $\frac{\partial T}{\partial t} = h \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

soit au point d'inflexion de la gaussienne

c'est à dire: $\frac{z_0^2}{4ht_0} = \frac{1}{2}$



Deuxième partie

5- En régime permanent la quantité de chaleur qui rentre est égale à celle qui sort plus les pertes. Soit pour une durée dt

$$0 = J_q(z) ab dt - J_q(z + dz) ab dt - \alpha 2(a + b) dz (T_z - T_a) dt$$

$$0 = - \left[\frac{\partial J_q}{\partial z} ab + 2\alpha a(T - T_a) \right] dz dt \quad \text{car } a \gg b$$

Compte tenu de la loi de Fourier on écrit: $0 = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - m^2(T - T_a)$

6-a) La question est erronée puisque $\frac{\alpha}{\lambda}$ est dimensionné ! On peut toutefois penser à écrire à l'extrémité de l'ailette l'égalité des flux thermiques de conduction et de convection. Soit

$$- \lambda ab \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_L = \alpha ab (T_L - T_a)$$

En supposant T_L différent de T_a (ce qui est l'esprit de cette partie) la condition proposée conduit à:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_L \gg 0$$

b) La solution qui satisfait les conditions en $z = 0$ et $z = L$ est

$$T - T_a = (T_0 - T_a) \frac{\cosh[m(L-z)]}{\cosh(mL)}$$

7- a) Lorsque L tend vers l'infinie

$$\frac{ch[m(L-z)]}{ch(mL)} = \frac{ch(mL)ch(mz) - sh(mL)sh(mz)}{ch(mL)} L \rightarrow \forall ch(mz) - sh(mz) = exp(mz)$$

b) Pour l'ailette de longueur finie: $T_L - T_a = (T_0 - T_a) \frac{1}{ch(mL)}$

Pour l'ailette infinie : $T_L^{\infty} - T_a \rightarrow 0$

En tolérant un écart de 1% il faut que $T_L - T_L^{\infty} = (T_0 - T_a) \frac{1}{ch(mL)} = \frac{T_a}{100}$

La condition ne dépend pas seulement de m et L mais aussi de T_0 ce qui est logique.

8- a) En régime permanent cette quantité est celle qui rentre en $z=0$

$$P_{th} = - \lambda \left(\frac{\nabla T}{\nabla z} \right)_{z=0} . ab = \lambda mab(T_0 - T_a) \tanh(mL)$$

b) En passant à la limite: $P_{th} \rightarrow \lambda mab(T_0 - T_a)$

Troisième partie

9- a) La définition suppose que le flux est indépendant de r, donc $J_q = - \lambda \frac{dT}{dr} = \frac{F}{4\pi r^2}$

s'intègre selon : $T_2 - T_1 = \frac{F}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] \Rightarrow R_{th} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2}$

b) de façon similaire on a: $T - T_1 = \frac{F}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right]$

10- Le flux produit par la sphère S_1 est conduit par (M) à la sphère S_2 . Soit

$$G \frac{dT_1}{dt} = - F G \frac{dT_2}{dt} = + F \text{ ce qui implique } T_1 + T_2 = C^{te} = T_{1,0} + T_{2,0}$$

De là on écrit $G \frac{dT_1}{dt} = - F = - \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \Rightarrow GR_{th} \frac{dT_1}{dt} + 2T_1 = T_{1,0} + T_{2,0}$

C'est l'équation de charge d'un condensateur, on trouve facilement

{

11- a) Pour S_1 : $DS_1 = \int \frac{dQ_{rev}}{T_1} = \int \frac{GdT_1}{T_1} = G \int \frac{1}{T_1} \frac{dT_1}{dt} dt$

Pour S_2 : $DS_2 = \int \frac{dQ_{rev}}{T_2} = \int \frac{GdT_2}{T_2} = G \int \frac{1}{T_2} \frac{dT_2}{dt} dt$

b) Pour le système la capacité de (M) étant négligée $DS = DS_1 + DS_2$

$$DS = G \int \frac{dT_1}{T_1} + G \int \frac{dT_2}{T_2} = G \ln \left(\frac{T_1^f T_2^f}{T_{1,0} T_{2,0}} \right)$$

Pour l'état final {

Car il est connu que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique.

Ce résultat est prévu par le second principe.

Quatrième partie

12- En régime permanent $\frac{\nabla T}{\nabla t} = 0 \hat{U} \frac{\nabla^2 T}{\nabla z^2} = \frac{d^2 T}{dz^2} = 0$ donc: $T - T_2 = (T_1 - T_2) \frac{e^{-z}}{e}$

D'où la densité de flux: $\vec{J}_q = - \lambda \text{grad} T = \lambda \frac{T_1 - T_2}{e} \vec{u}_z$

13- a) Les grandeurs, température T et potentiel V, satisfont l'équation de Laplace

$$DV = 0 \text{ et } DT = 0$$

et les conditions aux limites sont identiques (valeurs imposées sur les plans);
 Les solutions mathématiques des deux problèmes sont donc isomorphes en particulier
 pour les champs définis par: $\vec{E} = - \text{gr} \{ \vec{adV} \text{ et } \vec{J}_q = - \lambda \text{gr} \{ \vec{adT} \}$.

Pour les deux problèmes une sphère de conductivité nulle se traduit par la condition
 qu'à la surface de la sphère ($r = a$) le champ total doit être orthoradial. Car l'existence
 d'une composante radiale signifierait que la sphère est "pénétrable" soit par des charges
 soit par la chaleur.

Si pour l'extérieur la sphère est assimilable à un dipôle de moment $\vec{p} = - p. \vec{u}_z$

le champ total en coordonnées polaires vaut:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{dipole}} = \{ \quad E_r = 0 \text{ pour } r = a \Rightarrow E_0 a^3 = \left[\frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \right]$$

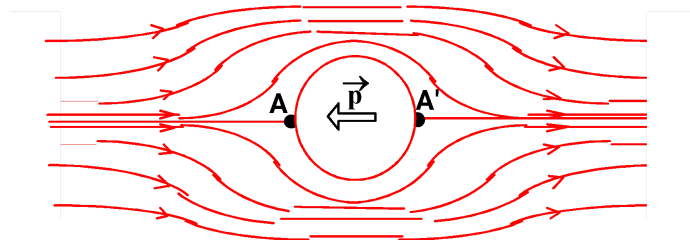
Ce modèle satisfait donc la condition avec la propriété de ne pas modifier le champ
 près des plans si ceux ci sont éloignés ($a \ll \text{distance } e$)

b) On écrit $\vec{E} = \{$

14- Sur la sphère ($r = a$) le module vaut: $\|\vec{J}_q\| = \sqrt{J_0^2 \sin^2 q (1 + \frac{1}{2})^2} = \frac{3}{2} J_0 |\sin q|$

Il est maximum pour $q = \pm \frac{\pi}{2}$ et il est nul pour $q = 0 \text{ ou } \pi$.

D'où l'allure des lignes de champ



FIN