

1) Le système est invariant selon Oz et la propagation se fait selon Ox; en conséquence, le champ électro- magnétique ne dépend pas de z.

2) Le plus simple est d'utiliser l'équation de **Maxwell-Faraday**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \left(\frac{dE(y)}{dy} \vec{u}_x - j\alpha E(y) \vec{u}_y \right) \exp[j(\alpha x - \omega t)] = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'où:
$$\vec{B} = - \frac{j}{\omega \mu_0} \left(\frac{dE(y)}{dy} \vec{u}_x - j\alpha E(y) \vec{u}_y \right) \exp[j(\alpha x - \omega t)]$$

3) On utilise les relations de **Maxwell**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; e_r = n^2; \epsilon_0 \mu_0 c_0^2 = 1; k_0 = \frac{\omega}{c_0};$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(- \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = - \epsilon_0 \omega^2 \vec{E}$$

C'est bien de la forme annoncée.

4) On calcule:
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{u}_z \Delta E = \vec{u}_z \left(- \alpha^2 E(y) + \frac{d^2 E(y)}{dy^2} \right) \exp[j(\alpha x - \omega t)] = - k_z^2 E(y) \vec{u}_z$$

d'où l'équation différentielle:
$$\frac{d^2 E(y)}{dy^2} + \beta_z^2 E(y) = 0 \Rightarrow E(y) = A_{i-} \exp(-j\beta_z y) + A_{i+} \exp(+j\beta_z y)$$

5) L'onde s'atténue selon y dans les milieux extrêmes à condition que les exponentielles soient réelles, c'est à dire que β_z soit complexe.

L'onde 1 doit décroître lorsque y tend vers moins l'infini, alors que l'onde 3 doit décroître lorsque y tend vers plus l'infini, ce qui implique: $A_{1+} = 0; A_{3-} = 0$.

6) On multiplie par $E'(y)dy$ l'équation différentielle précédente et on intègre entre a et b, en utilisant l'intégration par partie; on aboutit immédiatement à l'expression proposée, mais avec un second membre constant. Cette constante est nulle, comme on le voit en faisant: $a = b$.

7) Les conditions générales de passage imposent ici la continuité des champs à la traversée des interfaces, c'est à dire, comme le montrent les expressions des champs, la continuité de $E(y)$ et de $E'(y)$.

On applique la relation (2) dans chaque milieu, en faisant varier y de moins l'infini à plus l'infini au total, puis on additionne les trois équations obtenues:

$$\left[E_1^- E_1' \right]_{-\infty}^0 - \int E_1^- E_1' dy - b_{1^2} \int E_1^- E_1' dy = 0 \left[E_2^- E_2' \right]_0^e - \int E_2^- E_2' dy + \beta_{2^2} \int E_2^- E_2' dy = 0 \left[E_3^- E_3' \right]_e^{+\infty} - \int E_3^- E_3' dy - b_{3^2} \int E_3^- E_3' dy = 0$$

Du fait de la continuité de E et E', et puisque les champs sont nuls à l'infini (en y), la somme des trois premiers termes est nulle.

Les autres termes concernent l'intégration de quantités positives (modules au carré); toutes sont affectées d'un signe moins sauf celle en β_{2^2} : il faut donc que β_{2^2} soit positif et que β_2 soit réel.

8) À partir de la relation $\beta_{2^2} = k_{2^2}^2 - \alpha^2$, et compte-tenu du fait que $\beta_{1^2} \leq 0; \beta_{2^2} \geq 0; \beta_{3^2} \leq 0$, on déduit

les résultats qui suivent:
$$n_1 \leq \frac{a}{k_0}; n_2 \geq \frac{a}{k_0}; n_3 \leq \frac{a}{k_0} \Rightarrow n_1 \leq n_2; n_3 \leq n_2$$

9) On exprime les quatre conditions de passage:

$$E_1(y=0) = E_2(y=0); E_1'(y=0) = E_2'(y=0); E_2(y=e) = E_3(y=e); E_2'(y=e) = E_3'(y=e)$$

$$A_{1-} = A_{2+} + A_{2-}; -j\beta_1 A_{1-} = j\beta_2 (A_{2+} - A_{2-}); A_{2-} \exp(-j\beta_2 e) + A_{2+} \exp(j\beta_2 e) = A_{3+} \exp(j\beta_3 e);$$

$$j\beta_2 [A_{2+} \exp(j\beta_2 e) - A_{2-} \exp(-j\beta_2 e)] = j\beta_3 A_{3+} \exp(j\beta_3 e)$$

d'où:
$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{A_{2-} - A_{2+}}{A_{2+} + A_{2-}}; \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{A_{2+} \exp(j\beta_2 e) - A_{2-} \exp(-j\beta_2 e)}{A_{2+} \exp(j\beta_2 e) + A_{2-} \exp(-j\beta_2 e)}$$

10) Après avoir multiplié le second membre de la deuxième équation par $\exp(j\beta_2 e)$ au numérateur et au dé- nominateur, on calcule:

$$\frac{A_{2+}}{A_{2-}} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1}; \frac{A_{2+}}{A_{2-}} \exp(2j\beta_2 e) = \frac{\beta_2 + \beta_3}{\beta_2 - \beta_3} \Rightarrow \exp(2j\beta_2 e) = \frac{(\beta_2 + \beta_3)(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_1)}$$

11) En utilisant par exemple les relations: $\cos(j) = \frac{\exp(jj) + \exp(-jj)}{2}$ et $\sin(j) = \frac{\exp(jj) - \exp(-jj)}{2j}$, on arrive rapidement au résultat demandé: $\frac{1+j\tan(j)}{1-j\tan(j)} = \exp(2jj)$.

$$\text{On en déduit: } \tan(j) = j \frac{1 - \exp(2jj)}{1 + \exp(2jj)} \Rightarrow \tan(\beta_2 e) = -j \frac{\beta_2(\beta_1 + \beta_3)}{\beta_2^2 + \beta_1\beta_3} = \frac{\beta_2(b_1 + b_3)}{\beta_2^2 - b_1b_3}.$$

$$\text{Compte-tenu de: } \beta_2 = k_0 \sqrt{n_2^2 - \alpha_0^2}; b_1 = k_0 \sqrt{\alpha_0^2 - n_1^2}; b_3 = k_0 \sqrt{\alpha_0^2 - n_3^2},$$

on trouve, sachant que: $\arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) = \arctan(u) + \arctan(v) + np; n = 0 \text{ ou } 1$, où:

$$u = \frac{b_1}{\beta_2}; v = \frac{b_3}{\beta_2},$$

$$\text{le résultat: } \beta_2 e = \arctan\left(\frac{b_1}{\beta_2}\right) + \arctan\left(\frac{b_3}{\beta_2}\right) + pp,$$

ce qui correspond bien à ce que donne l'énoncé:

12) α_0 est nécessairement compris entre $n_1 = 1,52$ et $n_2 = 1,57$, d'où les courbes.

13) La fonction $F_p(\alpha_0)$ doit être égale à $k_0 e = 2pe/\lambda_0$: sur le graphe, une horizontale coupe en général plusieurs courbes, d'où plusieurs valeurs de α_0 et donc de $\alpha = k_0 \alpha_0$. Il y a d'autant plus de modes que l'épaisseur e est grande, pour un λ_0 donné.

Le graphe montre qu'il n'y a pas de solution lorsque l'épaisseur est trop faible.

L'horizontale coupe une seule fois la courbe correspondant à $p = 0$, si, pour $\alpha_0 = n_1 = 1,52$, le point représentatif de $F_p(\alpha_0)$ est compris entre les courbes $p = 0$ ($e_{\min}$) et $p = 1$ ($e_{\max}$). Soit:

$$e_{\min} = \frac{\lambda_0}{2p\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \arctan\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_2^2 - n_1^2}} = 254nm \quad e_{\max} = \frac{\lambda_0}{2p\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \left(\arctan\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_2^2 - n_1^2}} + p \right) = 890nm$$

14) La condition devient: $\frac{2pe}{\lambda_0} = F_p(\alpha_0) = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - \alpha_0^2}} \left(2\arctan\sqrt{\frac{\alpha_0^2 - n^2}{n_2^2 - \alpha_0^2}} + pp \right) \text{ avec } n \leq \alpha_0 \leq n_2$

$F_p(\alpha_0)$, pour $p = 0$ et $\alpha_0 = n$, est nul: il y a donc un mode guidé si l'épaisseur de la lame est presque nulle.

L'épaisseur est maximale pour $p = 1$ et $\alpha_0 = n = 1$, soit: $e_{\max} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{n_2^2 - 1}} = 207nm$

