المـادة : رياضيـات
الوحـدة : هندســة
المحـور : الهندسة الفضائية
الموضوع : التعليم في الفضاء

الكفاءات المستهدفة

تعليم نقط أعطيت إحداثياتها
تعيين معادلة مستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات
تعيين معادلة مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له
إثبات انه أشعة تنتمي إلى نفس المستوي
استعمال مبرهنة فيثاغورث لإيجاد الحافة بين نقطتين
استعمال دستور المسافة بين نقطتين لتعيين مجموعة نقط تحقق خاصية ما.

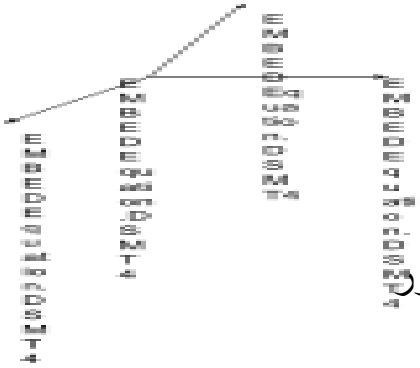
تصميـم الدرس

1 (I) التعليـم في الفضـاء
المعلم الديكارتي : إحداثيات نقطة مركبات شعاع
2) الحساب على الإحداثيـات : خواص الإحداثيات الأشعة من نفس المستوي معادلات مستقيم طرف بنقطة و شعاع توجيه له معادلات مستويات الإحداثيات معادلات المستويات الموازية لأحد مستويات الإحداثيات.
3) المسافـة بين نقطتيـن :
II- معادلات بعض المجسمات في الفضاء
1-معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم
2- معادلة المخروط الدوراني الذي محوره احد محاور الإحداثيات .
3- معادلة المخروط الدوراني الذي محوره احد محاور الإحداثيات و رأسه 0.
III- مسألة محلولـة
مسألة (1)
مسألة (2)

نشـاط (1) : (رقم 1 ص 260)

1) المعلم الديكارتـي :

تعريـف :
نسمي معلما للفضاء مبدؤه النقطة 0 كل رباعية نقط EMBED Equation.DSMT4 من نفس المعلم.
إذا وضعنا EMBED Equation.DSMT4 ، EMBED Equation.DSMT4 نركز إلى المعلم السابق بالرمز EMBED Equation.DSMT4 .



ملاحظـات :

- تشكل النقط K,J,I,O رباعي وجوه
- الأشعة $\vec{i},\vec{j},\vec{K}$ ليس من نفس المستوى
- يسمى المستقيم (OI) محور الفواصل و المستقيم (OJ) محور التراتيب و بينما يسمى (OK) و القسم (OK) محور
- إذا كانت المستقيمات (OI) و (OJ) و (OK) متعامدة مثنى مثنى نقول أن المعلم (O,I,J,K) متعامد.
- إذا كان(O,I,J,K) معلما متعامد و كان $OI=OJ=OK=1$ نقول أن : (O,I,J,K) متعامد و متجانس
- نرمز إلى المستوى (OIJ) بـ $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و إلى المستوى (OJK) بـ $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و إلى المستوى (OIK) بالرمز $P\left(O,\vec{i},\vec{k}\right)$.

2) إحداثيات نقطـة :

مبرهنة :
إذا كان EMBED Equation.DSMT4 معلما للفضاء و كانت EMBED Equation.DSMT4 نقطة من الفضاء فإنه توجد ثلاثية أعداد حقيقية وحيدة EMBED Equation.DSMT4 بحيث : EMBED Equation.DSMT4

البرهـان : نضع $\vec{OI}=\vec{i}$ و $\vec{OJ}=\vec{j}$ و $\vec{OK}=\vec{k}$
النقط K,J,I,O ليست من نفس المستوى و منه المستوى (OIJ) لا يوازي المستقيم الذي يمر من M و حيث $\vec{k}$

شعاع توجيه له فهما اذن متقاطعان و لتكن M' نقطة تقاطعهما.

النقطة M' تنتمي إلى $(O,\vec{i},\vec{j})$ و منه يوجد عددان حقيقيان n و y وحيدين بحيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

الشعاعان $\overrightarrow{MM'}$ و $\vec{k}$ مرتبطين خطيا و منه يوجد عدد حقيقي وحيد z بحيث $\overrightarrow{MM'} = z\vec{k}$

و لدينا حسب علاقة مثال : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$

و منه : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و هو المطلوب .

تطبيق : $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما متعامدا للفضاء حيث $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ} = \vec{j'}$ و $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$

علم النقطة M ذات الإحداثيات $(2;3;-3)$.

طريقة :

بتعليم نقطة EMBED Equation.DSMT4 علمت إحداثياتها EMBED Equation.DSMT4 في معلم متعامد EMBED Equation.DSMT4

نتبع الخطوات التالية :

علم النقط EMBED Equation.DSMT4

EMBED Equation.DSMT4

رسم متوازي المستطيلات : EMBED Equation.DSMT4

حل التطبيق : $M(2;3;-3)$

- نعلم النفط :

$m_3(0,0,-3)$, $m_2(0,3,-3)$, $m_1(2,0,0)$

$M_3(2,3,0)$, $M_2(2,0,-3)$, $M_1(0,3,-3)$

- نرسم متوازي المستطيلات

$m_1om_2M_3M_2m_3M_1M$

مركبات شعاع

تعريف :

EMBED Equation.DSMT4 معلما للفضاء EMBED Equation.DSMT4

شعاع و لتكن EMBED Equation.DSMT4 النقطة الوحيدة التي تحقق EMBED Equation.DSMT4

مركبات الشعاع EMBED Equation.DSMT4 هي EMBED Equation.DSMT4

إحداثيات النقطة EMBED Equation.DSMT4 في المعلم EMBED Equation.DSMT4

نكتب EMBED Equation.DSMT4

و هكذا كل شعاع EMBED Equation.DSMT4 يكتب بطريقة وحيدة على الشكل :

EMBED Equation.DSMT4

مثال : في التطبيق السابق النقطة M إحداثياتها في المعلم $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ هي $(2;3;-3)$ و عليه الشعاع $\vec{u}$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ مركباته هي $\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}$

و نكتب : $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$

الحساب على الإحداثيــات

نشاط : (رقم 2 ص260)

1) خواص الإحداثيــات : $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم للفضاء

1-إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\j\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ شعاعين من الفضاء و كان α عددا حقيقيان

فإن : - $\vec{u}=0$ يعني $x=y=z=0$

- $\vec{u}=\vec{v}$ يعني $x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$

- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ هي $\left(x+x';y+y';z+z'\right)$

- مركبات $\alpha\vec{u}$ هي $\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\\\alpha z\end{pmatrix}$

2-إذا كانت $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ نقطتين من الفضاء فإن :

- مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$
- إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $\left(\frac{x_A,x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

تطبيق : $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما ديكارتيا الفضاء

نعتبر النقط : $A(2,1,-3)$, $B(2,5,1)$, $C(4,0,-2)$, $H\left(5;\frac{-15}{2};\frac{-17}{2}\right)$

1- عين إحداثيات النقطة D بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.

2- بين أن النقط D,I و H في استقامية علما أن النقطة I هي منتصف القطعة $[AB]$

الحـل :

1) القول أن : $ABCD$ متوازي أضلاع يعني (مثلا) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

نفرض أن إحداثيات D هي (x,y,z)

لدينا : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z+3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ هي $x-2=2$ و $y-1=-5$ و $z+3=-3$

و عليه نجد $x=4$ ، $y=-6$ ، $z=-6$ أي $D(4,-4,-6)$

2) تعيين إحداثيات I منتصف $[AB]$

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=2\ ,\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=3\ ,\ z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=-1$$

و منه $I(2;3;-1)$

نبين أن النقط H,D,I على استقامية : يكفي إثبات أن : $\overrightarrow{IH}=\alpha\overrightarrow{ID}$

لدينا : $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}\frac{-21}{2}\\\frac{-15}{2}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}2\\-7\\-5\end{pmatrix}$ نلاحظ أن : $\overrightarrow{IH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{ID}$ و عليه الشعاعان $\overrightarrow{ID}$ و $\overrightarrow{IH}$ مرتبطين خطيا و منه النقط H,D,I على استقامية.

أمثلـة :

1) مقطع اسطوانة دورانية محورها (o,z) و مستوى معادلته $z=2$ هي الدائرة التي لها معادلة من الشكل :

$$\begin{cases} x2+y2=R^2 \\ z=2 \end{cases}$$

2) معادلة اسطوانة دورانية محورها (o,z) و نصف قطر مقطعها بالمستوى ذو المعادلة $z=2$ هو 1 معادلتها :

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z\geq 2 \end{cases}$$

3) معادلة اسطوانة دورانية محوها (o,z) و نصف قطر مقطعاها بالمستويين اللذين معادلتهما $y=0$ و $y=-3$ هو $\sqrt{3}$ هي :

$$\begin{cases} x^2+z^2=3 \\ -3\leq y\leq 0 \end{cases}$$

4) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي إحداثياتها تحقق : $\begin{cases} z^2+y^2=25 \\ -2\leq x\leq 3 \end{cases}$

هي الاسطوانة الدورانية التي محورها (ox) و نصف قطر مقطعاها بالمستويين $x=-2$ و $x=3$ هو 5 .

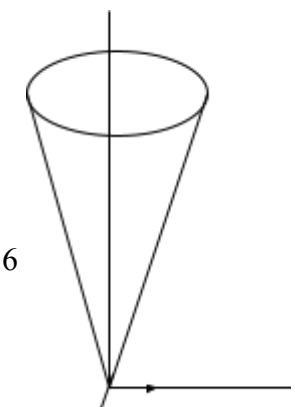
3) معادلة المخروط الدوراني الذي محوره احد محاور الاحدثيات و رأسه 0 .

دراسة مقـال : (O,I,J,K) معلم متعامد و متجانس للفضاء.

(Γ) المخروط الدوراني الذي محوره (o,z) و رأسه 0

و قاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,04)$ و نصف قطرها 2. L نقطة من (M) مسقطها العمودي على (o,z) هي النقطة A

((OL) احد مولدات المخروط (Γ)).



لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (Γ) تختلف عن 0 بحيث $M \in (OL)$
و لتكن H سقطها العمودي على (o,z).
أي $H(o,o,z)$ و منه $OH = z$
لدينا $(AL)//(HM)$ (مستقيمان عموديان على نفس القسم (o,z))
المستقيمان (ML) و (AL) متقاطعان في O .
حسب طاليس نجد : $\frac{HM}{AL} = \frac{OH}{OA}$ لكن $AL = 2$ و $OA = 4$ و عليه نجد :
$\frac{HM}{2} = \frac{OH}{4}$ أي أن $HM = \frac{1}{2}OH$ أي $HM^2 = \frac{1}{4}OH^2$
أي : $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2$ (لان $HM^2 = (x-o)^2 + (y-z)^2$)
بما أن : $H \in]OA]$ فإن $o < z_H \leq 4$
و عليه : $M(x,y,z) \in (\Gamma)$ فإن :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{1}{4}z^2 = 0 \\ 0 < z \leq 4 \end{cases}$$

الدراسة العكسيــة :

نفرض $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء بحيث :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{1}{4}z^2 = 0 \\ 0 < z \leq 4 \end{cases}$$
و منه : $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2$ .....(1)
إذا كانت H المسقط العمودي لـ M على (o,z) فإن $H(o,o,z)$
و عليه يكون $MH^2 = x^2 + y^2$ و $OH^2 = z^2$
بالتعويض في (1) نجد : $MH^2 = \frac{1}{4}OH^2$ أي : EMBED Equation. DSMT4 ..... (I)

و من جهة أخرى تظهر نقطة M' من (OL) (أي من (Γ))
مسقطها العمودي على (o,z) هي النقطة H .
مع $M' \in [MH]$
لدينا $(AL)//(M'H)$ و (LM') و (AH) مقاطعان في 0.
حسب طاليس نجد :

$\frac{M'H}{AL}=\frac{OH}{OA}$ أي : $\frac{M'H}{OH}=\frac{AL}{OA}=\frac{1}{2}$ د

و منه : EMBED Equation.DSMT4 .... (II)

من (I) و (II) نستنتج أن : $M'H=MH$ و بما أن $M'\in[MH]$ فإن M تنطبق على M' و بالتالي $M\in(\Gamma)$

خلاصة : معادلة المخروط EMBED Equation.DSMT4 هي إذن EMBED Equation.DSMT4 مع Equation.DSMT4

ملاحظة: يوضع : (α قيس نصف زاوية الرأس)

نجد : $\tan\alpha=\frac{AL}{OA}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ و منه $\tan^2\alpha=\frac{1}{4}$

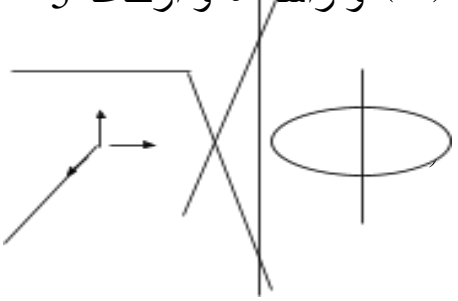
بالتعويض في المعادلة السابقة تصبح : $\begin{cases}x^2+y^2-\left(\tan^2\alpha\right)z^2=0\\0<z\le 4\end{cases}$

الحالة العامة: معادلة المخروط الذي محوره EMBED Equation.DSMT4 و رأسه EMBED Equation.DSMT4 و EMBED Equation.DSMT4 قيس نصف زاوية EMBED Equation.DSMT4 رأسه هي :

نتائج : إذا كان المحور (oy) تصبح المعادلة من الشكل : $x^2+z^2-\left(\tan^2 x\right)y^2=0$

إذا كان المحور (ox) تصبح المعادلة من الشكل : $y^2+z^2-\left(\tan^2\alpha\right)x^2=0$

تطبيق : عين معادلة المخروط الدوراني (Γ) الذي محوره (oy) و رأسه o و ارتفاعه 5 و نصف قطر قاعدته هو 3 .



الحل : نضع $A(0,5,0)$ مركز قاعدته و لتكن L نقطة من مسقطهما العمودي على (oy) هي A .

و منه : $AL=3$ و $OA=5$

نضع α قيس نصف زاوية الرأس نجد :

$$\tan\alpha=\frac{AL}{OA}=\frac{3}{5}$$

و بالتالي معادلة المخروط (Γ) الذي محوره (oy) و رأسه O و ارتفاعه 5 .

و نصف قطر قاعدته 3 هي : $\begin{cases}x^2+z^2-\left(\tan^2\alpha\right)y^2=0\\0<y\le 5\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x^2+z^2-\frac{9}{25}y^2=0\\0<y\le 5\end{cases}$

تعيين إحداثيات G بحيث $-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$

لتكن $G(x,y,z)$ و منه :

$$\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}2-x\\-y\\-2-z\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}3-x\\-y\\-3-z\end{pmatrix}$$

$-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ يكافئ $-2\begin{pmatrix}3-x\\-y\\-3-z\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2-x\\-y\\-2-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}-6+2y+6-3x=0\\2y-3y=0\\6+2z-6-3y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$$

و منه G تطبيق على O مبدأ المعلم

G تمثل مرجع الجملة $\{(A,-2),(B,3)\}$ لان $-2+3\neq 0$

2) $f(M)=-2MA^2+3MB^2$ حيث $M(x,y,z)$

لدينا $MA^2=(x-3)^2+y^2+(z+3)^2$

$MB^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2$

و منه $MA^2 = x^2 + y^2 +$ ح^2 - $6x - 6$ ح $+18$

ح$+ 8$ $MB^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4$

و منه : $f(M) = x^2 + y^2 +$ ح^2 -12

(Γ_4) هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث $x^2 + y^2 + z^2 - 12 = -12$

و منه : $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ أي : $x = y = z = 0$

و منه : $(\Gamma_{-12}) = \{0\}$

المناقشة حسب قيم K طبيعية المجموعة (Γ_K)

$f(M) = K$ نعين $x^2 + y^2 +$ ح^2 $= K + 12$

K	$-\infty$	-12	$+\infty$
إشارة $K+12$	-	+	

نميز ثلاث حالات :

1) $(\Gamma_K) = \phi$; $K \in]-\infty, -12[$

2) $(\Gamma_K) = \{0\}$, $K = -12$

3) (Γ_K) $K \in]-12, +\infty[$ هي سطح كرة مركزها 0 و نصف قطرها Γ حيث $\Gamma = \sqrt{K+12}$.

مسألة 2 :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{h})$

النقط $E(0,0,-1)$, $A(0,0,2)$, $B(0,0,-4)$, $C(\sqrt{5},0,1)$, $D(\sqrt{5},0,-3)$

لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها E و نصف قطرها 3 .

1) هل النقط D,C,B,A تنتمي إلى نفس المستوي ؟

2) ما هي معادلة (S) ، تحقق أن D,C,B,A ينتمي إلى (S).

عين نقاط تقاطع (S) مع محاور الإحداثيات.

3) ادرس حسب قيم العدد الحقيقي α الأوضاع النسبية للسطح (S) و المستوى (P_α) ذو المعادلة $\tau = 0$

4) عين مركز و نصف قطر الدائرة مقطع سطح الكرة (S) بالمستوي (P_{-2}) .

الحل :

1) D,C,B,A تنتمي إلى نفس المستوي يكافئ $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(0,0,-6)$ $\overrightarrow{AC}\left(\sqrt{5},0,-1\right)$ $\overrightarrow{AD}\left(\sqrt{5},0,-5\right)$

هل يوجد عددان حقيقيان x و y حيث $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$

أي : $\begin{cases}\sqrt{5}x+\sqrt{5}g=0\\-x-5y=0\end{cases}$ بحل الجملة نجد $x=\dfrac{-3}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}$

إذن D,C,B,A من نفس المستوي

2) معادلة (S) هي EMBED Equation.DSMT4

- لدينا : $EA^2=EB^2=EC^2=ED^2=9$ إذن D,C,B,A تنتمي إلى (S)
- تعيين نقاط تقاطع (S) مع محاور الإحداثيات

مع (xx') : $\begin{cases}x^2+y^2+(z+1)^2=9\\y=z=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x^2=8\\x=z=0\end{cases}$

$$\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\(\vee)\\x=-2\sqrt{2}\\x=z=0\end{cases}$$

و منه : $(S)\cap(xx')=\left\{\left(2\sqrt{2},0,0\right),\left(-2\sqrt{2},0,0\right)\right\}$

مع (yy') : $\begin{cases}x^2+y^2+(z+1)^2=9\\y=z=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\(\vee)\\x=-2\sqrt{2}\\x=z=0\end{cases}$

$$(S)\cap(yy')=\left\{\left(0,2\sqrt{2},0\right),\left(0,-2\sqrt{2},0\right)\right\}$$

مع (zz') : $\begin{cases}x^2+y^2+(z+1)^2=9\\y=z=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}(z+1)^2=9\\x=y=0\end{cases}$

$$\begin{cases}z=3-1=2\\z=-3-1=-4\\x=y=0\end{cases}$$

و منه : $(S)\cap(zz')=\{A,B\}$

3) $\tau = a:(P_\alpha)$ هو مستوى مواز لمستوى الإحداثيات $P\left(O,\vec{I},\vec{J}\right)$ بمتغير ثلاث حالات

- إذا كان $a \in]-\infty,-4[\cup]2,+\infty[$ فإن $(S)\cap(P_a)=\phi$
- إذا كان $a \in \{-4,2\}$ فإن

$(S)\cap(P_a)=\{A,B\}$

(P_a) مماسان لـ (S) في النقطتين A و B

- إذا كان $a \in \{-4,2\}$ فإن (P_a) يقطع سطح الكرة (P_a) وفق دائرة مركزها تنتمي إلى المحور (az)

4) (-2) تنتمي إلى $\{-4,2\}$ و منه المستوي (P_{-2}) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة مركزها H حيث $A(0,0,-2)$ النقطة P تنتمي إلى السطح (S) و منه $EH=3$

لدينا المثلث EHP القائم في H بتطبيق نظرية فيتاغورس

$$EP^2 = EH^2 + HP^2 \quad , \quad EP^2 = 9$$

نجد $EH^2 = 1$

و منه $HP^2 = z$

إذن $HP = 2\sqrt{2}$

إذن مقطع (S) بالمستوي (P_{-2}) هي دائرة مركزها H و نصف قطرها $2\sqrt{2}$