

# Fiche technique

**Professeur : Mouad ZILLOU**

**Matière : Mathématiques**

## Polynômes

**Niveau : TCSF**

euclidienne par  $x - \alpha$  et

**Capacités attendues**

reconnaitre la divisibilité par  $x - \alpha$ .

**Contenu du programme**

- Notion de polynôme, égalité de deux polynômes.
- Somme et produit de deux polynômes.
- Racine d'un polynôme, division par  $x - \alpha$ .
- Factorisation d'un polynôme.

**Recommandations pédagogiques**

- Il faudra écarter toute construction théorique de la notion de polynôme. On se basera pour son introduction sur des exemples simples en indiquant les éléments caractéristiques d'un polynôme (degré, termes, coefficient).
- La technique de la division euclidienne par  $x - \alpha$  joue un rôle dans la factorisation d'un polynôme dont une racine est  $\alpha$ , toutefois une importance devra être accordée aux autres techniques de factorisation.

**Fichiers utilisés dans la préparation du cours**

- Les orientations pédagogiques.
- Livre d'élève.
- Des sites électroniques.
- Distribution périodique du programme de mathématiques.

**Rôle de l'enseignant**

- Ecrire l'activité au tableau
- Marquer les difficultés
- Répartir les tâches
- Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle
- Diagonaliser les prérequis des apprenants
- Noter les observations

**Rôle de l'apprenant**

- Ecrire les activités
- Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions.
- Formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème, une

**Outils didactiques** : Tableau, livre ,craie, marqueurs .....

**Etapes**

**Contenu du cours**

**Durée**

|                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                   |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| <b>Activité d'initiation</b> | <p><b><u>Définition d'un polynôme –égalité de deux polynômes –opérations sur les polynômes</u></b></p> <p>Soit un parallélépipède dont les dimensions sont <math>x, x+3</math> et <math>x+5</math> avec <math>x</math> est un réel positif. Calculer <math>V(x)</math> le volume du parallélépipède.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>60 minutes</b> |
| <b>Résumer du cours</b>      | <p><b><u>Définition d'un polynôme</u></b></p> <p>On appelle polynôme (ou fonction polynôme) ,se note souvent <math>P</math> ,une expression (ou fonction) de la forme :</p> $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ <p>Où <math>a_n, a_{n-1}, \dots, a_0</math> sont des nombres réels et s'appellent les <b>coefficients</b> du polynôme <math>P</math> .</p> <p>Si <math>a_n \neq 0</math> alors <math>n</math> s'appelle le degré du polynôme <math>P</math> et se note <math>d^\circ P</math> tel que <math>d^\circ P = n</math></p> <p>Si tous les coefficients sont nuls alors le polynôme <math>P</math> s'appelle le polynôme nul (sans degré) .</p> <p><b><u>Exemple :</u></b></p> <p>On considère l'expression suivante <math>P(x) = -5x^4 + 3x^2 + 4x - 7</math></p> <p><math>P(x)</math> est un polynôme de degré 4 ; on écrit <math>d^\circ P = 4</math></p> <p>Les nombres réels <math>-5, 0, 3, 4, -7</math> sont les coefficients de <math>P(x)</math> car on peut écrire <math>P(x)</math> sous forme <math>P(x) = -5x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 4x - 7</math> .</p> <p><b><u>Remarque :</u></b></p> <p>Soit <math>a</math> un nombre réel non nul.</p> <p>" <math>P(x) = ax + b</math> "est le polynôme de degré 1 s'appelle binôme.</p> <p>" <math>P(x) = ax^2 + bx + c</math> "est un polynôme de degré 2 s'appelle trinôme.</p> <p><b><u>Exemple :</u></b></p> <p><math>P(x) = 2x - 3</math> est un binôme. // <math>P(x) = -3x^2 + 2x + 4</math> est un trinôme.</p> |                   |
| <b>Évaluation</b>            | <p><b>1)</b> Donner l'expression d'un polynôme <math>P(x)</math> dont le degré est 6 et ses coefficients sont -1, 0, 0,-3,1 et 2.</p> <p><b>2)</b> Parmi les expressions suivantes, préciser celles qui représentent un polynôme en précisant son degré.</p> $P(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 3 \quad ; \quad Q(x) = 2x^2 - x - \sqrt{x} \quad ;$ $R(x) = 5 x ^2 + 4 x  - 5 \quad ; \quad S(x) = (a-1)x^4 + x + 1; (a \in \mathbb{R})$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                   |
| <b>Résumer du cours</b>      | <p><b><u>2. Égalité de deux polynômes</u></b></p> <p><b><u>Propriété :</u></b></p> <p>Soient <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> deux polynômes.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>60 minutes</b> |

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|                          | <p>On dit que <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> Sont <b>égaux</b> si et seulement si :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ils ont même degré</li> <li>• Les coefficients des termes en même degré sont deux à deux égaux .</li> </ul> <p>Signifier que : si</p> $\begin{cases} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \\ \text{et} \\ Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \end{cases}$ <p>Alors <math>\begin{cases} d^\circ P = d^\circ Q \Leftrightarrow n = m \\ a_n = b_m ; a_{n-1} = b_{m-1} ; \dots ; a_0 = b_0 \end{cases}</math></p> <p><b>Exemple</b></p> <p>Etudions l'égalité de <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> tels que :</p> $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \quad \text{Et} \quad Q(x) = 3x^2 + x^3 - 4x + 1 + 3x^3$ $\begin{cases} d^\circ P = d^\circ Q = 3 \\ \text{les termes de même degré ont mêmes coefficients} \end{cases}$ <p>Alors <math>P(x) = Q(x)</math></p> |  |
| <p><b>Évaluation</b></p> | <p>1) Etudier l'égalité de <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> dans les cas suivants :</p> <p>a) <math>P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1</math> ; <math>Q(x) = (x+1)^3</math></p> <p>b) <math>P(x) = x^3 + (x-1)^2</math> ; <math>Q(x) = x^2 - 3x + 4</math></p> <p>c) <math>P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x</math> ; <math>Q(x) = x^2(3x-2) + x</math></p> <p>2) Déterminer le nombre réel <math>a</math> pour que <math>P(x) = Q(x)</math></p> $P(x) = (a-1)x^3 + 2ax^2 + 5x + 6$ ; $Q(x) = x^3 + 4x^2 + (3+a)x + 3a$ <p>3) Déterminer <math>a</math> et <math>b</math> et <math>c</math> et <math>d</math> pour que <math>P(x) = Q(x)</math></p> $P(x) = ax^3 + (b-2)x^2 + (4-c)x + d$ ; $Q(x) = -3x^3 + x^2 + 7$                                                                                                                                                                                                                    |  |

|                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |            |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Résumé du cours | <p><b><u>3. Opérations sur les polynômes</u></b><br/><b><u>a. Somme de deux polynômes</u></b></p> <hr/> <p>Soient <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> deux polynômes</p> <p>La somme de <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> est le polynôme qu'on note <math>P+Q</math> tel que :</p> $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$ <hr/> <p><b><u>Exemples :</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>On a : <math>P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1</math> et <math>Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2x - 4</math></li></ul> <p>Donc <math>P(x) + Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x - 5</math></p> <ul style="list-style-type: none"><li>On a <math>P(x) = 2x^2 + 3x + 4</math> et <math>Q(x) = -2x^2 + x - 1</math></li></ul> <p>Donc <math>P(x) + Q(x) = 4x + 3</math></p> <p><b><u>Remarque :</u></b></p> <p>Si <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> deux polynômes non nuls et <math>P+Q</math> un polynôme non nul alors on a</p> $d^\circ(P+Q) \leq d^\circ P \quad \text{OU} \quad d^\circ(P+Q) \leq d^\circ Q$ <hr/> <p><b><u>b. Produit de deux polynômes</u></b></p> <hr/> <p>Soient <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> deux polynômes.</p> <p>Le produit de <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> est le polynôme qu'on note <math>P \times Q</math> tel que</p> $(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$ <hr/> <p><b><u>Exemple :</u></b></p> <p>On a <math>P(x) = x^2 + 1</math> et <math>Q(x) = x - 1</math></p> <p>Donc <math>P(x) \times Q(x) = (x^2 + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 + x - 1</math></p> <p><b><u>Remarque :</u></b></p> <p>Si <math>P(x)</math> et <math>Q(x)</math> deux polynômes non nuls, alors on a <math>d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q</math></p> | 30 minutes |
|                 | Évaluation                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |            |

## II. La divisions par $x - \alpha$

### 1. La division euclidienne d'un polynôme par $x - \alpha$

#### a. Définition et propriété

Soit  $P(x)$  un polynôme de degré  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

S'il existe un polynôme  $Q(x)$  qui vérifié :  $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$  ; alors :

- $Q(x)$  : S'appelle **quotient** de la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x - \alpha$ .
- $P(\alpha)$  : S'appelle reste de la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x - \alpha$ .

**Exemple**  $P(x) = x^2 - 8$  ,  $x - \alpha = x - 3$

On a  $P(x) = (x - 3)(x + 3) + 1$

Donc :  $x + 3$  est le quotient de la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x - 3$

1: est le reste de la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x - 3$ .

#### b. Racine d'un polynôme

##### Définition

Soit  $P(x)$  un polynôme et  $\alpha \in \mathbb{R}$

On dit que  $\alpha$  est une racine de  $P(x)$  si et seulement si  $P(\alpha) = 0$

##### Exemple

Parmi les nombres suivants déterminons qui sont les racines de  $P(x)$

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 \quad / \quad 1, -2 \text{ et } 3$$

### c. La division euclidienne de $P(x)$ sur $x - \alpha$

Pour effectuer la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x - \alpha$ , on suit même étapes que celle des nombres entiers naturels.

##### Exemple

Effectuons la division euclidienne de  $P(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$  par  $x + 1$

### 2. La divisibilité par $x - \alpha$

Soit  $P(x)$  un polynôme et  $\alpha \in \mathbb{R}$  avec  $d^\circ P = n$

- On dit que  $P(x)$  est divisible par  $x - \alpha$ , s'il existe un polynôme  $Q(x)$  de degré  $n - 1$  tel que  $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$
- $P(x)$  est divisible par  $x - \alpha$  si et seulement si  $\alpha$  est un zéro ou racine de  $P(x)$

##### Exemple

On considère le polynôme suivant :  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Résum  
er du  
cours

90  
min  
ute  
s

|                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|                                    | <p>Etudier la divisibilité de <math>P(x)</math> par <math>x-1</math>.</p> <p>On a <math>P(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 8 = 1 - 3 - 6 + 8 = 0</math></p> <p>Donc <math>P(x)</math> est divisible par <math>x-1</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
| <p><b>Exercice de synthèse</b></p> | <p>Soit <math>P(x)</math> un polynôme définie par <math>P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2</math></p> <p>1) Montrer que si <math>\alpha</math> est une racine de <math>P(x)</math> alors <math>\frac{1}{\alpha}</math> est aussi est une racine de <math>P(x)</math></p> <p>2) a- Montrer que 2 est une racine de <math>P(x)</math></p> <p>b- En effectuant la division euclidienne de <math>P(x)</math> par <math>x-2</math>, déterminer le polynôme <math>Q(x)</math> tel que <math>P(x) = (x-2)Q(x)</math> puis déduire que <math>Q(1/2) = 0</math></p> <p>3) Déterminer <math>a</math>, <math>b</math> et <math>c</math> tels que <math>Q(x) = (x-1/2)(ax^2 + bx + c)</math></p> <p>4) Factoriser <math>P(x)</math> en produit des binômes puis résoudre l'équation <math>P(x) = 0</math></p> |  |