Fiche technique

Professeur : Mouad ZILLOU	Matière : Mathématiques

Polynômes

Niveau : TCSF

Capacités attendues	**uclidienne par $x-\alpha$ et reconnaitre la divisibilité par $x-\alpha$.**
Contenu du programme	• **Notion de polynôme, égalité de deux polynômes.** • **Somme et produit de deux polynômes.** • **Racine d'un polynôme, division par $x-\alpha$.** • **Factorisation d'un polynôme.**
Recommandations pédagogiques	• **Il faudra écarter toute construction théorique de la notion de polynôme. On se basera pour son introduction sur des exemples simples en indiquant les éléments caractéristiques d'un polynôme (degré, termes, coefficient).** • **La technique de la division euclidienne par $x-\alpha$ joue un rôle dans la factorisation d'un polynôme dont une racine est α , toutefois une importance devra être accordée aux autres techniques de factorisation.**
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	• Les orientations pédagogiques. • Livre d'élève. • Des sites électroniques. • Distribution périodique du programme de mathématiques.
Rôle de l'enseignant	• Ecrire l'activité au tableau • Marquer les difficultés • Répartir les tâches • Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle • Diagonaliser les prérequis des apprenants • Noter les observations
Rôle de l'apprenant	• Ecrire les activités • Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions. • Formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème, une

Outils didactiques : Tableau, livre ,craie, marqueurs ……

Etapes	***Contenu du cours***	**Durée**

Activité d'initiation	***Définition d'un polynôme –égalité de deux polynômes –opérations sur les polynômes*** Soit un parallélépipède dont les dimensions sont $x, x+3$ et $x+5$ avec x est un réel positif. Calculer $V(x)$ le volume du parallélépipède.	**60 minutes**
Résumer du cours	***Définition d'un polynôme*** On appelle polynôme (ou fonction polynôme) ,se note souvent P ,une expression (ou fonction) de la forme : $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0x^0=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ Où $a_n, a_{n-1}.....,a_0$ sont des nombres réels et s'appellent les **coefficients** du polynôme P . Si $a_n \neq 0$ alors n s'appelle le degré du polynôme P et se note $d°P$ tel que $d°P=n$ Si tous les coefficients sont nuls alors le polynôme P s'appelle le polynôme nul (sans degré) . ***Exemple*** : On considère l'expression suivante $P(x)=-5x^4+3x^2+4x-7$ $P(x)$ est un polynôme de degré 4 ; on écrit $d°P=4$ Les nombres réels $-5,\ 0,3,\ 4,-7$ sont les coefficients de $P(x)$ car on peut écrire $P(x)$ sous forme $P(x)=-5x^4+0x^3+3x^2+4x-7$. ***Remarque :*** Soit a un nombre réel non nul. " $P(x)=ax+b$ "est le polynôme de degré 1 s'appelle binôme. " $P(x)=ax^2+bx+c$ "est un polynôme de degré 2 s'appelle trinôme. ***Exemple :*** $P(x)=2x-3$ est un binôme. // $P(x)=-3x^2+2x+4$ est un trinôme.	
Evaluation	***1)*** Donner l'expression d'un polynôme $P(x)$ dont le degré est 6 et ses coefficients sont -1, 0, 0,-3,1 et 2. 2) Parmi les expressions suivantes, préciser celles qui représentent un polynôme en précisant son degré. $P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-3$; $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$; $R(x)=5\lvert x\rvert^2+4\lvert x\rvert-5$; $S(x)=(a-1)x^4+x+1;(a\in\mathbb{R})$	
Résumer du cours	***2. Egalité de deux polynômes*** ***Propriété*** : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.	**60 minutes**

On dit que $P(x)$ et $Q(x)$ Sont **égaux** si et seulement si :

- Ils ont même degré
- Les coefficients des termes en même degré sont deux à deux égaux .

Signifier que : si $\begin{cases} P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \\ et \\ Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} d°P = d°Q \Leftrightarrow n = m \\ a_n = b_m ; a_{n-1} = b_{m-1} ; ..... ; a_0 = b_0 \end{cases}$

Exemple

Etudions l'égalité de $P(x)$ et $Q(x)$ tels que :

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ Et $Q(x) = 3x^2 + x^3 - 4x + 1 + 3x^3$

$\begin{cases} d°p = d°Q = 3 \\ les\ termes\ de\ même\ degré\ ont\ mêmes\ coefficients \end{cases}$

Alors $P(x) = Q(x)$

Evaluation

1) Etudier l'égalité de $P(x)$ et $Q(x)$ dans les cas suivants :

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $Q(x) = (x+1)^3$

b) $P(x) = x^3 + (x-1)^2$; $Q(x) = x^2 - 3x + 4$

c) $P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x$; $Q(x) = x^2(3x-2) + x$

2) Déterminer le nombre réel a pour que $P(x) = Q(x)$

$P(x) = (a-1)x^3 + 2ax^2 + 5x + 6$; $Q(x) = x^3 + 4x^2 + (3+a)x + 3a$

3) Déterminer a et b et c et d pour que $P(x) = Q(x)$

$P(x) = ax^3 + (b-2)x^2 + (4-c)x + d$; $Q(x) = -3x^3 + x^2 + 7$

Pr: ZILLOU MOUAD

Résumer du cours	***3. Operations sur les polynômes*** ***a. Somme de deux polynômes*** Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes La somme de $P(x)$et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P+Q$ tel que : $(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)$ ***Exemples*** : • On a : $P(x)=x^4-x^3+2x^2-1$ et $Q(x)=3x^3-2x^2+2x-4$ Donc $P(x)+Q(x)=x^4+2x^3+2x-5$ • On a $P(x)=2x^2+3x+4$ et $Q(x)=-2x^2+x-1$ Donc $P(x)+Q(x)=4x+3$ ***Remarque*** : Si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls et $P+Q$ un polynôme non nul alors on a $d°(P+Q)\leq d°P$ OU $d°(P+Q)\leq d°Q$ ***b. Produit de deux polynômes*** Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes. Le produit de $P(x)$et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P\times Q$ tel que $(P\times Q)(x)=P(x)\times Q(x)$ ***Exemple*** : On a $P(x)=x^2+1$ et $Q(x)=x-1$ Donc $P(x)\times Q(x)=(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1$ ***Remarque*** : Si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls, alors on a $d°(P\times Q)=d°P+d°Q$	**30 minutes**
Evaluation	On considère les deux polynômes suivants $f(x)=2x^2+3x-2$ et $g(x)=x^3-x^2+1$ Calculer les expressions suivantes $A(x)=2f(x)-3g(x)$; $B(x)=f(x)\times g(x)$; $C(x)=(f(x))^2$ et $D(x)=(g(x))^2$	

Pr. ZILLOU MOUAD

Résumer du cours		**90 minutes**

II. La divisions par $x - \alpha$

1. La division euclidienne d'un polynôme par $x - \alpha$

a. Définition et propriété

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n $(n \in \mathbb{N}^*)$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

S'il existe un polynôme $Q(x)$ qui vérifié : $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + P(\alpha)$; alors :

- $Q(x)$: S'appelle **quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-\alpha$.
- $P(\alpha)$: S'appelle reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-\alpha$.

Exemple $P(x) = x^2 - 8$, $x - \alpha = x - 3$

On a $P(x) = (x-3)(x+3)+1$

Donc : $x+3$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$

1: est le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$.

b. Racine d'un polynôme

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$

On dit que α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$

Exemple

Parmi les nombres suivants déterminons qui sont les racines de $P(x)$

$P(x) = x^2 - 2x + 1$ / 1, -2 et 3

c. La division euclidienne de $P(x)$ sur $x - \alpha$

Pour effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x-\alpha$,on suit même étapes que celle des nombres entiers naturels.

Exemple

Effectuons la division euclidienne de $P(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ par $x + 1$

2. La divisibilité par $x - \alpha$

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $d°P = n$

- Ont dit que $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$, s'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$
- $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$ si et seulement si α est un zéro ou racine de $P(x)$

Exemple

On considère le polynôme suivant : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

	Etudier la divisibilité de $P(x)$ par $x-1$. On a $P(1)=1^3-3\times1^2-6\times1+8=1-3-6+8=0$ Donc $P(x)$ est divisible par $x-1$.	
Exercice de synthèse	Soit $P(x)$ un polynôme définie par $\boldsymbol{P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2}$ 1) Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi est une racine de $P(x)$ 2) a- Montrer que 2 est une racine de $P(x)$ b- En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$, déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-2)Q(x)$ puis déduire que $Q(1/2)=0$ 3) Déterminer a, b et c tels que $\boldsymbol{Q(x)=(x-1/2)(ax^2+bx+c)}$ 4) Factoriser $P(x)$ en produit des binômes puis résoudre l'équation $P(x)=0$	

Pr: ZILLOU MOUAD