

**Вступительное испытание «Абитуриент Лицея БГУ – 2009»
по математике**

10 мая 2009 г.

Тестовая часть.

Среди вариантов ответа ТОЛЬКО ОДИН правильный.

1. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны, а основания равны 3 и 4. Тогда меньшая диагональ трапеции равна	А) $\sqrt{21}$; Б) $2\sqrt{3}$; В) $2\sqrt{6}$; Г) 5; Д) $2\sqrt{7}$.
2. В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 2:3, а высота разбивает гипотенузу на отрезки, один из которых на 2 больше другого. Чему равна длина гипотенузы?	А) $\sqrt{13}$; Б) 4,8; В) 5; Г) 5,2; Д) другой ответ.
3. На доске было записано несколько чисел. Вася приписал еще число 39, после чего среднее арифметическое всех чисел увеличилось на 2. Затем Вася приписал еще число 4, и в результате среднее арифметическое всех чисел уменьшилось на 1. Сколько чисел было записано на доске изначально?	А) 15; Б) 11; В) 39; Г) 20; Д) описанная ситуация невозможна.
4. В арифметической прогрессии с ненулевой разностью сумма членов с 4-го по 14-й включительно равна 77. Найдите номер того члена прогрессии, который равен 7.	А) 1; Б) 11; В) 7; Г) 13; Д) 9.
5. Если 40% некоторого числа составляют $\sqrt{(9-2\sqrt{21})^2} + \sqrt{(2\sqrt{21}+9)^2}$, то само число равно	А) 7,2; Б) $1,6\sqrt{21}$;

	В) $10\sqrt{21}$; Г) 45; Д) 18.
--	----------------------------------

Задачи

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 + (2\sqrt{2} - 2a)x - 3a^2 + 6\sqrt{2}a - 2 = 0$ не имеет решений.
2. Диагонали трапеции равны 10 и 24, средняя линия равна 13. Найдите площадь трапеции, ее высоту и угол между диагоналями.
3. Решите уравнение $2x^4 + x^2(2 - |x|) = 3(2 - |x|)^2$.
4. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 155, а сумма первых двух членов геометрической прогрессии равна 9. Найдите первые члены этих прогрессий, если первый член арифметической прогрессии равен знаменателю геометрической, а первый член геометрической прогрессии равен разности арифметической.
5. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, точка L лежит на стороне AB и $AL = LB$. Описанная около треугольника AOL окружность пересекает сторону AC в точке K . Известно, что $\angle OAL = 30^\circ$, $LK = 3$, $AK = 4$. Найдите площадь треугольника ABC и радиус окружности, описанной около треугольника AOL .

Время работы – 180 минут

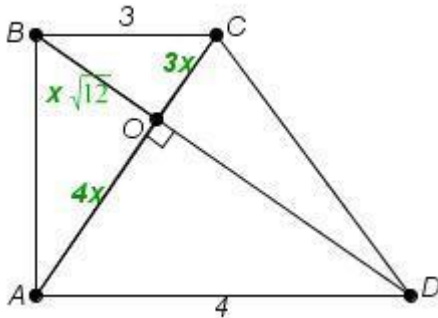
Использование калькуляторов не разрешается!

Ответы к задачам тестовой части

1	2	3	4	5
А	Г	Б	Д	В

Решение задач тестовой части

1.



Треугольники BOC и DOA подобны. Значит, $\frac{CO}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{3}{4}$. Тогда обозначим $CO = 3x$, $AO = 4x$.

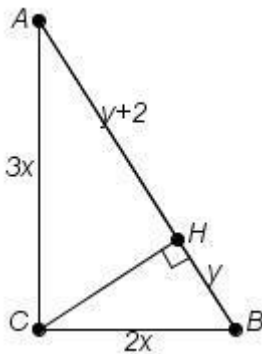
Так как диагонали трапеции перпендикулярны и трапеция прямоугольная, то BO – высота прямоугольного треугольника ABC , а, значит, $BO = \sqrt{AO \cdot OC} = x\sqrt{12}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BOC . По теореме

Пифагора: $BO^2 + OC^2 = BC^2$, или $12x^2 + 9x^2 = 9$, откуда $x = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Меньшая диагональ $AC = 7x = 7 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{21}$.

2.



У меньшего катета меньшая проекция на гипотенузу, значит, $BH = y$, $AH = y + 2$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ACH и BCH и в обоих по теореме Пифагора выразим CH : $9x^2 - (y + 2)^2 = 4x^2 - y^2$, откуда $5x^2 = 4y + 4$.

По теореме Пифагора для треугольника ABC : $9x^2 + 4x^2 = (2y + 2)^2$, откуда $13x^2 = 4y^2 + 8y + 4$.

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} 5x^2 = 4y + 4, \\ 13x^2 = 4y^2 + 8y + 4 \end{cases}$$

Обе части первого уравнения умножим на 13, обе части второго – на 5 и вычтем почленно из второго уравнения первое. Получим:

$$20y^2 - 12y - 32 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 3y - 8 = 0$$

Неотрицательным корнем этого уравнения является число 1,6

Значит гипотенуза AB равна $2y + 2 = 5,2$ $AB = 2y + 2 = 5,2$.

3. Пусть на доске было записано n чисел и их среднее арифметическое равно a . Значит сумма этих чисел равна an . После того как Вася приписал число 39, среднее арифметическое

увеличилось на 2, значит, $\frac{an + 39}{n + 1} = a + 2$.

Затем Вася приписал еще число 4 и среднее арифметическое чисел

уменьшилось на 1, значит, $\frac{an + 39 + 4}{n + 2} = a + 1$.

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{an + 39}{n + 1} = a + 2, \\ \frac{an + 39 + 4}{n + 2} = a + 1, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} an + 39 = an + 2n + a + 2, \\ an + 43 = an + n + 2a + 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 37 = 2n + a, \\ 41 = n + 2a. \end{cases}$$

Обе части первого уравнения умножим на 2 и вычтем из него почленно второе уравнение: $33 = 3n$, откуда $n = 11$.

$$4. \quad a_4 + \dots + a_{14} = \frac{a_4 + a_{14}}{2} \cdot 11 = \frac{a_1 + 3d + a_1 + 13d}{2} \cdot 11 = (a_1 + 8d) \cdot 11 = 77 \Rightarrow a_1 + 8d = 7$$

Или $a_9 = 7$. Значит 9-ый член прогрессии равен 7.

$$5. \sqrt{(9-2\sqrt{21})^2} + \sqrt{(2\sqrt{21}+9)^2} = |9-2\sqrt{21}| + |9+2\sqrt{21}| = 2\sqrt{21} - 9 + 9 + 2\sqrt{21} = 4\sqrt{21}$$

Тогда искомое число равно $\frac{4\sqrt{21}}{0,4} = 10\sqrt{21}$.

Решение задач

1. Квадратное уравнение $x^2 + (2\sqrt{2} - 2a)x - 3a^2 + 6\sqrt{2}a - 2 = 0$ не имеет решений при $D < 0$.

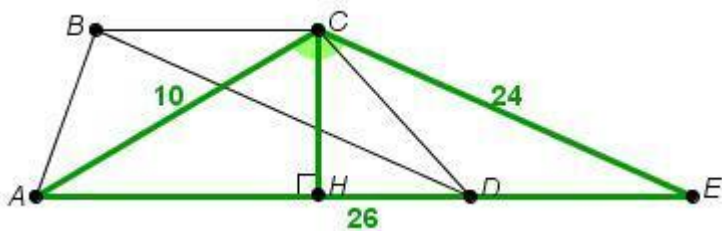
$$x^2 + (2\sqrt{2} - 2a)x - 3a^2 + 6\sqrt{2}a - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(\sqrt{2} - a)x - 3a^2 + 6\sqrt{2}a - 2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2} - a)^2 + 3a^2 - 6\sqrt{2}a - 2 = 2 - 2\sqrt{2}a + a^2 + 3a^2 - 6\sqrt{2}a + 2 = 4a^2 - 8\sqrt{2}a + 4$$

Значит, $4a^2 - 8\sqrt{2}a + 4 < 0 \Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{2}a + 1 < 0 \Leftrightarrow a \in (\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} + 1)$.

Ответ: $(\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} + 1)$

2.



Через точку C проведем прямую параллельную BD , при пересечении которой с прямой AD поставим точку E . Тогда $BCED$ – параллелограмм, значит, $DE = BC$, и $AE = AD + DE = AD + BC = 2 \cdot 13 = 26$ (так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований).

Рассмотрим треугольник ACE :

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} AE \cdot CH = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CH = S_{ABCD}$$

Таким образом, площадь трапеции равна площади треугольника ACE . Могли заметить, что стороны треугольника ACE таковы, что квадрат одной из них равен сумме квадратов двух других, что по теореме обратной теореме Пифагора позволяет утверждать, что треугольник ACE является прямоугольным, т. е. $\angle ACE = 90^\circ$. Тогда

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} AC \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120$$

Высота трапеции равна высоте

прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе. Значит,

по формуле $h_c = \frac{ab}{c}$ найдем $CH = \frac{10 \cdot 24}{26} = \frac{120}{13}$.

Если не заметили, что треугольник ACE – прямоугольный, то площадь треугольника ACE найдем по формуле Герона:

$S_{ACE} = \sqrt{30 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{10^2 \cdot 6^2 \cdot 2^2} = 120$. Так как $S_{ACE} = \frac{1}{2} AE \cdot CH$, то

высота трапеции CH равна $\frac{2S_{ACE}}{AE} = \frac{2 \cdot 120}{26} = \frac{120}{13}$. Угол между диагоналями трапеции равен углу ACE . Косинус угла ACE найдем по теореме косинусов для треугольника ACE :

$\cos \angle ACE = \frac{AC^2 + CE^2 - AE^2}{2AC \cdot CE} = \frac{100 + 576 - 676}{2 \cdot 10 \cdot 24} = 0$. Значит, $\angle ACE = 90^\circ$.

Ответ: $120, \frac{120}{13}, 90^\circ$.

3. $2x^4 + x^2(2 - |x|) = 3(2 - |x|)^2$.

Заметим, что значения x , при которых $2 - |x| = 0$, не обращают уравнение в истинное равенство. Тогда рассмотрим все x , при которых $2 - |x| \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $(2 - |x|)^2$:

$$2 \frac{x^4}{(2 - |x|)^2} + \frac{x^2(2 - |x|)}{(2 - |x|)^2} = 3 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{x^2}{2 - |x|} \right)^2 + \frac{x^2}{2 - |x|} - 3 = 0.$$

Выполним замену переменной $t = \frac{x^2}{2 - |x|}$ и решим квадратное уравнение $2t^2 + t - 3 = 0$.

Корнями этого уравнения являются числа 1 и $-\frac{3}{2}$.

Тогда,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2 - |x|} = 1, \\ \frac{x^2}{2 - |x|} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 - |x|, \\ 2x^2 = -6 + 3|x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + |x| - 2 = 0, \\ 2x^2 - 3|x| + 6 = 0 \end{cases}$$

Корнями первого уравнения являются числа 1 и -2 , т.е. $|x|=1$, или $x = \pm 1$; $|x| = -2$ решений не имеет.

У второго уравнения отрицательный дискриминант, а, значит, оно не имеет решений.

Ответ: ± 1 .

4. Пусть a_n — n -й член арифметической прогрессии с разностью d .

Тогда,
$$\frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 155 \Leftrightarrow (2a_1 + 9d) \cdot 5 = 155 \Leftrightarrow 2a_1 + 9d = 31$$
.

Пусть b_n — n -й член геометрической прогрессии со знаменателем q .

Тогда, $b_1 + b_1 q = 9$.

По условию задачи $a_1 = q$; $b_1 = d$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a_1 + 9d = 31, \\ b_1(1+q) = 9, \\ a_1 = q, \\ b_1 = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 9b_1 = 31, \\ b_1(1+a_1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{31-9b_1}{2}, \\ b_1 \left(1 + \frac{31-9b_1}{2} \right) = 9 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение полученной системы:

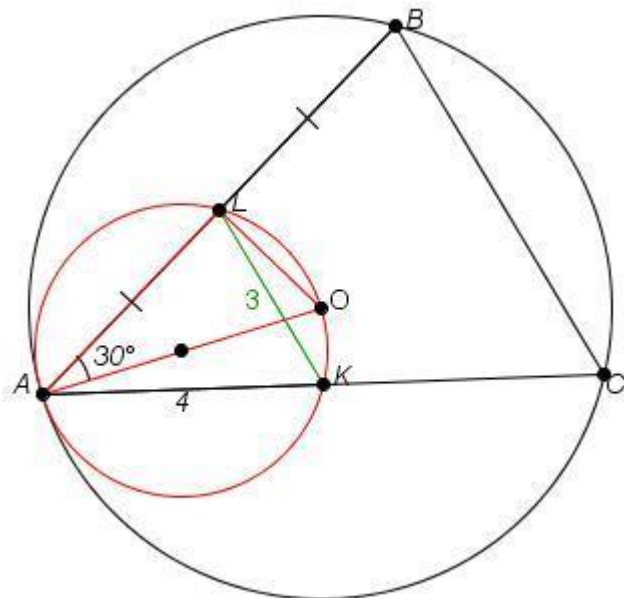
$$b_1 \left(1 + \frac{31-9b_1}{2} \right) = 9 \Leftrightarrow b_1 \cdot (33-9b_1) = 18 \Leftrightarrow 9b_1^2 - 33b_1 + 18 = 0 \Leftrightarrow 3b_1^2 - 11b_1 + 6 = 0$$

Корнями этого уравнения являются числа 3 и $\frac{2}{3}$, соответствующие

им значения a равны 2 и $\frac{25}{2}$.

Ответ: $a_1 = 2$, $b_1 = 3$; или $a_1 = \frac{25}{2}$, $b_1 = \frac{2}{3}$.

5.



Так как O – центр описанной около треугольника ABC окружности, а L – середина стороны AB , то угол ALO – прямой (центр описанной около треугольника окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров), значит центр окружности, описанной около треугольника AOL – середина AO , значит угол AKO также прямой, а значит

K – середина стороны AC , следовательно, $AC = 8$. $AL = LB$, $AK = KC$. Тогда LK – средняя линия треугольника ABC , и $BC = 2KL = 6$, $\angle AKL = \angle ACB$.

$\angle OAL = 30^\circ$, значит, $\angle AOL = 60^\circ$. $\angle AKL = \angle AOL = 60^\circ$ (как вписанные в одну окружность и опирающиеся на дугу AL). Т. е. $\angle ACB = 60^\circ$.

Площадь треугольника ABC найдем по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

По теореме косинусов для треугольника AKL :

$$AL^2 = AK^2 + KL^2 - 2AK \cdot KL \cdot \cos \angle AKL = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 13, \text{ откуда } AL = \sqrt{13}.$$

$$AO = \frac{AL}{\sin \angle AOL} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{\frac{13}{3}}$$

Тогда , и радиус окружности, описанной

около треугольника AOL равен $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Ответ: $12\sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{13}{3}}$.